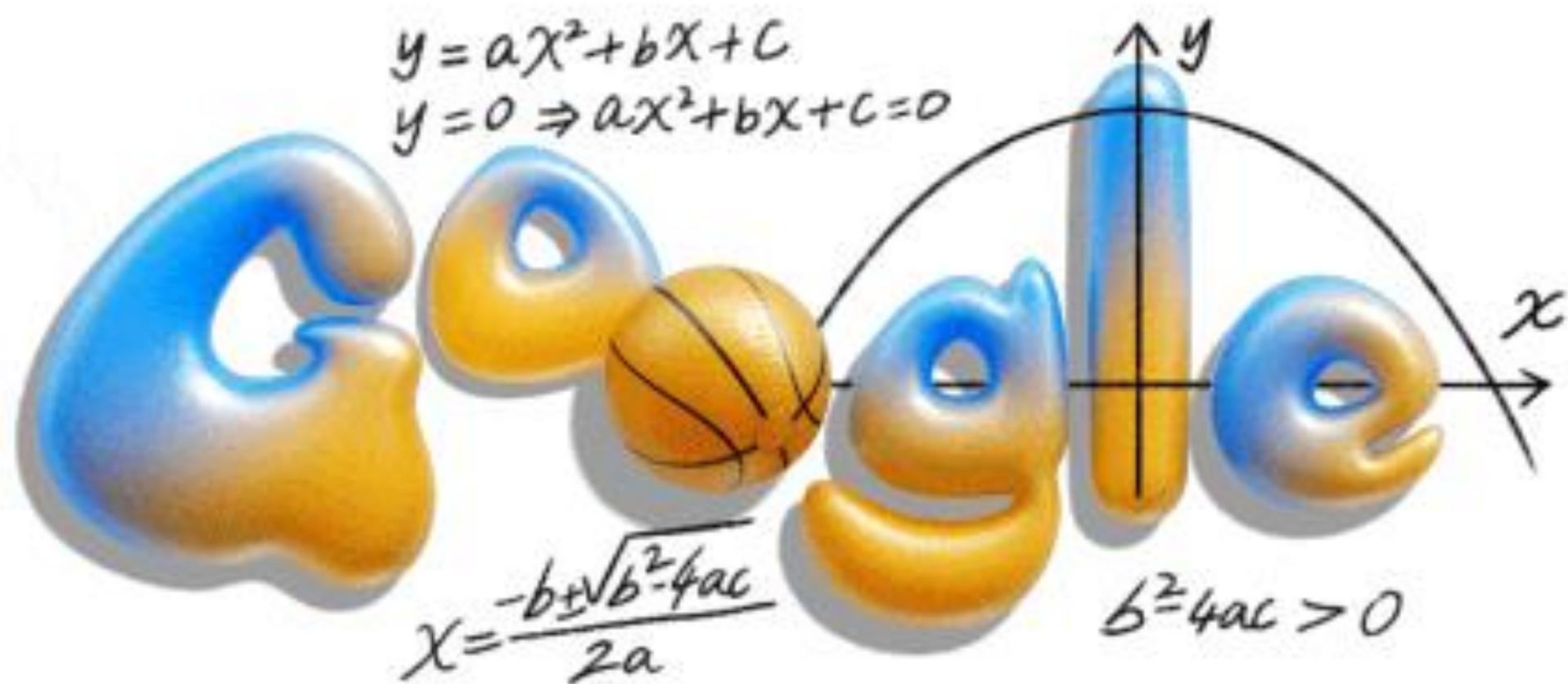


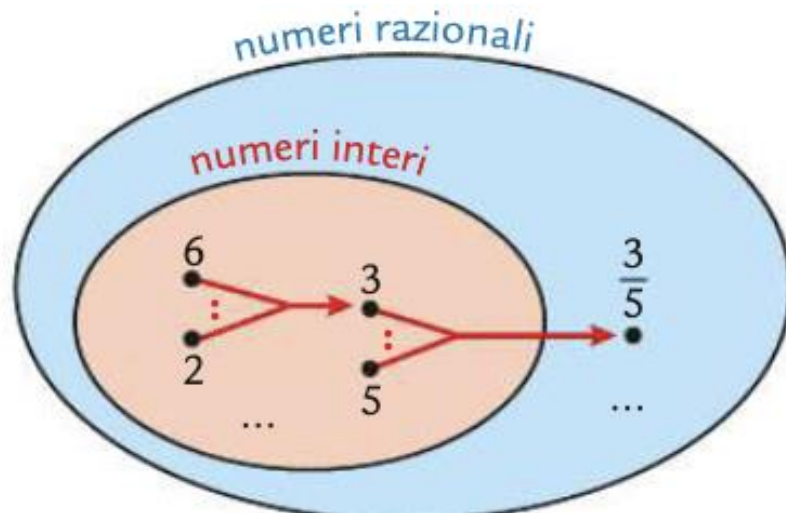


Le frazioni algebriche

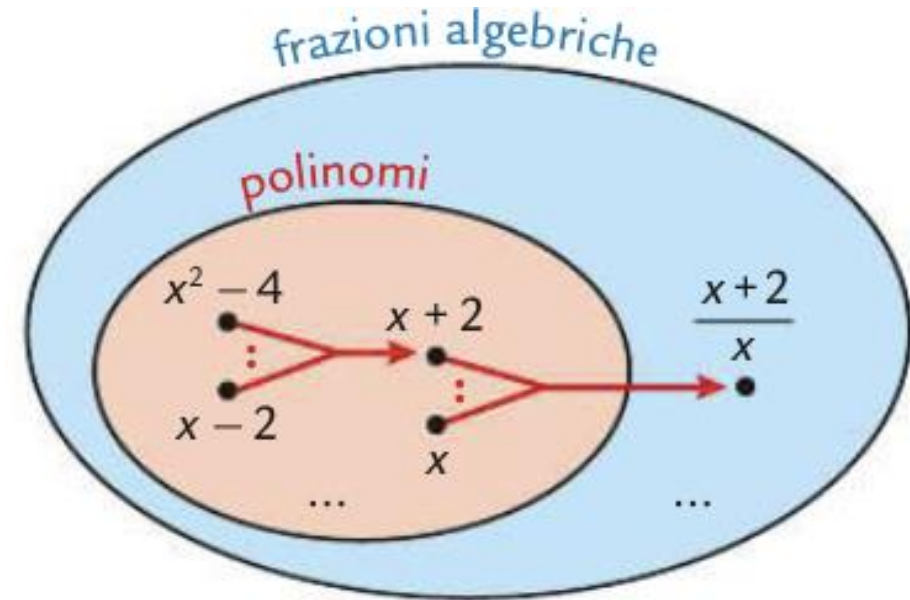
Indice

- Le frazioni algebriche - 5
- Condizioni di Esistenza, «C.E.» - 12
- Frazioni algebriche equivalenti - 26
- Riduzione allo stesso denominatore - 31
- Semplificazione tra frazioni algebriche - 40
- Addizioni e sottrazioni tra frazioni algebriche - 50
- Prodotto tra frazioni algebriche - 56

Frazione algebrica



Abbiamo ampliato l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, passando all'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, per rendere sempre possibile la divisione



Ampliamo l'insieme dei polinomi, passando all'insieme delle frazioni algebriche, per rendere sempre possibile la divisione.

SEMPLIFICARE

» Quale il principio che mi permette di **SEMPLIFICARE** ? ".

Risposta:
la **proprietà invariante**

dividere numeratore e denominatore per uno stesso numero (il loro M.C.D.)
non cambia il valore della frazione.

Semplificazione (solo numeri):

Semplifichiamo la frazione. $\frac{70}{42}$

scomponiamo: $70 = 7 \cdot 10 = 7 \cdot 2 \cdot 5$

$42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

Semplifichiamo

$$\frac{70}{42} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{2} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{7}} = \frac{5}{3}$$

Semplificazione (numeri e lettere):

frazione. $\frac{15a^3b^2}{5a^2b}$

scomponiamo: $15a^3b^2 = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$

$5a^2b = 5 \cdot a \cdot a \cdot b$

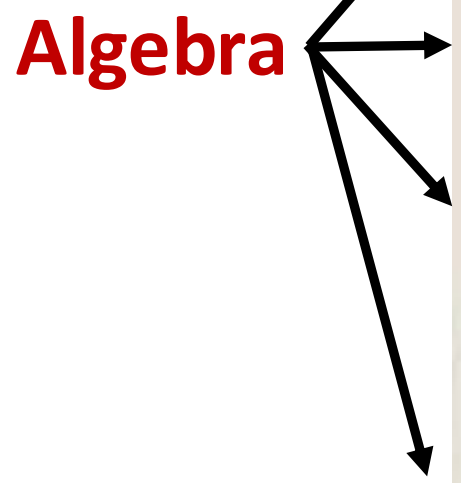
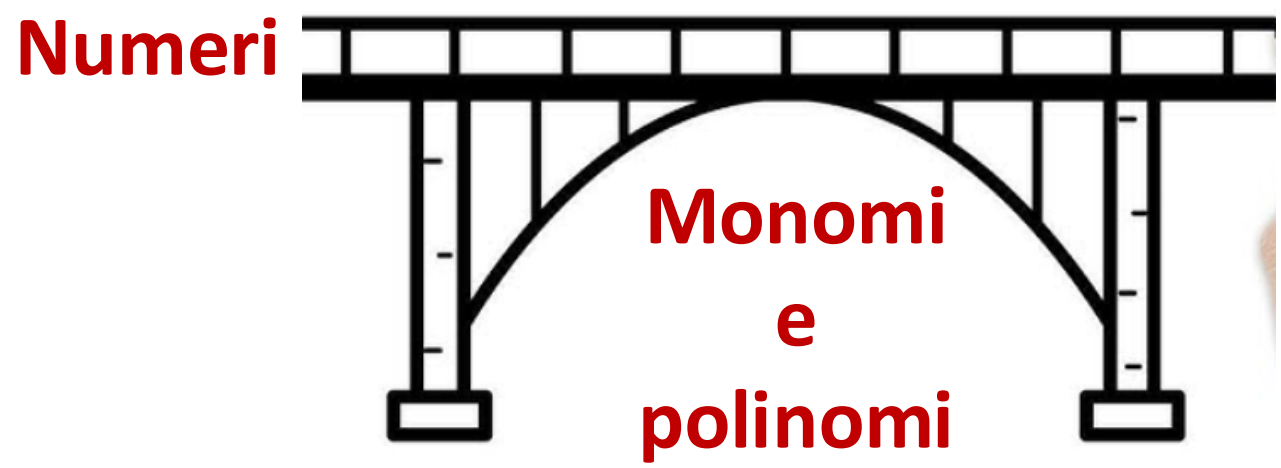
Semplifichiamo

$$\frac{3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{b} \cdot b}{\cancel{5} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot b} = 5 \cdot a \cdot b$$

Le frazioni algebriche

← Il Ponte dall'aritmetica all'Algebra:

I Monomi e polinomi



I **monomi e polinomi** rappresentano il ponte che mi permette di passare dai numeri all'algebra

Per poi entrare e visitare quell'immensa cattedra e che è **l'analisi Matematica.**



L'Introduzione delle Frazioni Algebriche

Rapporto tra polinomi

Espressione letterale del tipo $\frac{A}{B}$, con A e B monomi o polinomi e $B \neq 0$

Data la frazione algebrica $\frac{x-3}{x+2}$. è un rapporto tra due polinomi.

il Problema del Denominatore!

Da scomposizione con numeri → scomposizione numeri e lettere

Ragazzi, cosa facevamo con. $\frac{70}{42}$?

- Lo scomponiamo in fattori
- semplificavamo i fattori comuni.

Introduciamo le lettere:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

Qui faremo la stessa identica cosa!"

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$$

scomponiamo



$$\frac{(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{(x + 2)\cancel{^2}}$$

semplifichiamo



$$\frac{(x - 2)}{(x + 2)}$$

risultato

• **Errore comune:**

• Sottolinea che *non* possiamo fare questo:

$$\frac{12}{18} = \frac{\cancel{10}+2}{\cancel{10}+8} \quad \text{e cancellare il 10.}$$



NOOOOOOOO



Si possono cancellare solo i **fattori** (parti di una moltiplicazione), non gli **addendi** (parti di una somma).



Definizione

Una **frazione algebrica** è semplicemente una frazione in cui numeratore e/o denominatore sono polinomi.

Esempi:

$$\frac{5}{x}, \quad \frac{x+2}{x-1}, \quad \frac{x^2-9}{x^2+4x+4}.$$

La regola d'oro:

Richiama una regola fondamentale della matematica:

In matematica si può dividere per qualsiasi numero, tranne che per lo **zero**.

QUINDI.....Il nostro denominatore **non può mai essere zero**.

**il Problema
del
Denominatore!**



Frazioni Algebriche Condizioni di Esistenza "C.E."

il Problema
del
Denominatore!

Per le frazioni numeriche:

Il denominatore, non può essere mai zero

Per le frazioni algebriche

Lo stesso

Condizioni di Esistenza (C.E.):

Dato che una frazione è una divisione, il denominatore *non può mai essere zero*.

Questo introduce il primo nuovo passo obbligatorio: le **Condizioni di Esistenza** (o Campo di Esistenza).

Esempio 1:

Nella frazione $\frac{5}{x}$; la $x \neq 0$. Questa è la C.E.

Esempio 2:

Nella frazione $\frac{x+2}{x-1}$, Il denominatore $x - 1$ deve essere zero;
quindi $x - 1 \neq 0$, ossia, $x \neq 1$; Questa è la C.E.

Frazioni algebriche

Condizioni di Esistenza, «C.E.»



Frazioni Algebriche Condizioni di Esistenza "C.E."

- Rappresentano la "carta d'identità" della frazione,
- la prima cosa da controllare.
- insieme dei valori che è possibile attribuire alle lettere.

condizione di esistenza: condizioni che indicano quali valori delle lettere devono essere esclusi.

ESEMPI

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 3}$$

C. E. $x - 3 \neq 0$
 $x \neq 3$

La Semplificazione è importante nella Scomposizione



Prerequisito indispensabile è la Scomposizione

Per semplificare la frazione. $\frac{70}{42}$. Abbiamo dovuto scomporre in fattori primi

scomposizione $70 = 7 \cdot 10 = 7 \cdot 2 \cdot 5$

$$42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Rapido ripasso

1) Raccoglimento totale (fattor comune), $3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

2) Differenza di quadrati, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

3) Quadrato di un binomio, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

Rapido ripasso



Frazioni Algebriche Condizioni di Esistenza "C.E."

La Regola d'Oro: "Si semplificano solo i FATTORI, mai gli ADDENDI!"

Data la frazione algebrica

$$\frac{x^2 + 2x}{x}$$

Metodo corretto:

Passo 1: SCOMPORRE

$$\frac{x(x+2)}{x}$$

Passo 2: PORRE LE C.E.

$$x \neq 0$$

Passo 3: SEMPLIFICARE

$$\frac{x(x+2)}{x} \Rightarrow x + 2$$

2 Una delle seguenti quattro frazioni algebriche è definita per ogni numero reale x . Quale?

☐ A $\frac{1}{x-64}$

☐ C $\frac{1}{x^2-16}$

☐ B $\frac{1}{x+64}$

☒ D $\frac{1}{x^2+16}$

3 Una delle seguenti frazioni algebriche è definita per ogni numero reale diverso da 2. Quale?

☐ A $\frac{1}{2x-2}$

☐ C $\frac{1}{2x+4}$

☐ B $\frac{1}{2x+2}$

☒ D $\frac{1}{2x-4}$

4 Quale delle seguenti frazioni algebriche **non** è equivalente a $\frac{x-3}{x-4}$?

☐ A $\frac{x^2-3x}{x^2-4x}$

☒ C $\frac{x^2-3x}{4x-x^2}$

☐ B $\frac{3-x}{4-x}$

☐ D $\frac{2x-6}{2x-8}$

5 Quale delle seguenti frazioni algebriche **non** è l'opposta di $\frac{x-3}{x-4}$?

☐ A $-\frac{x-3}{x-4}$

☒ C $\frac{3-x}{4-x}$

☐ B $\frac{3-x}{x-4}$

☐ D $\frac{x-3}{4-x}$

1 Vero o falso?

a. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ è una frazione algebrica

☐ V ☒ F

b. un polinomio non è una frazione algebrica

☐ V ☒ F

c. una frazione algebrica è definita per tutti i valori per cui non si annulla il denominatore

☒ V ☐ F

d. due frazioni algebriche opposte sono equivalenti

☐ V ☒ F

e. una frazione algebrica è uguale a zero per tutti i valori che annullano il numeratore (ma non il denominatore)

☒ V ☐ F

f. due frazioni algebriche $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ sono equivalenti se $AC = BD$

☐ V ☒ F

[2 affermazioni vere e 4 false]



Le condizioni di esistenza

26 Completa la seguente tabella.

Frazione algebrica	Frazione con il denominatore fattorizzato	Condizioni di esistenza (C.E.)
$\frac{1}{x-2}$	$\frac{1}{x-2}$ il denominatore è irriducibile	$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
$\frac{1}{x^2-4}$	$\frac{1}{(x-.....)(x+.....)}$	$(x-.....)(x+.....) \neq 0 \Rightarrow x \neq \text{ e } x \neq$
$\frac{1}{x^2+2}$	$\frac{1}{x^2+2}$ il denominatore è irriducibile	Nessuna, perché il denominatore risulta sempre
$\frac{1}{2x^2+10x}$	$\frac{1}{2x(x+.....)}$	$2x(x+.....) \neq 0 \Rightarrow x \neq \text{ e } x \neq$

ESERCIZI - Dalle Parole alle frazioni algebriche.

Scrivi l'espressione algebrica che esprime l'espressione descritta a parole.

6 **Videolezione** a. Il rapporto tra un numero naturale n e il quadrato del suo successivo.

b. Il rapporto tra un numero naturale n e la somma del quadrato di n con 1.

7 **Videolezione** a. Il reciproco della somma dei quadrati di due numeri x e y .

b. Il quadrato del reciproco della somma di un numero x con un numero y .

8 a. Il rapporto tra il precedente di un numero naturale n e il successivo di n (con $n > 1$).

b. Il rapporto tra il successivo di un numero naturale n e il precedente di n (con $n > 1$).

9 a. La somma di due numeri x e y , divisa per la somma dei quadrati degli stessi due numeri.

b. Il quadrato del quoziente tra la somma di due numeri x e y e la differenza tra x e y .

10 a. Il rapporto tra il doppio di un numero naturale n e il quadrato del successivo di n .

b. Il rapporto tra il doppio del successivo di n e il quadrato di n .

Scrivi l'espressione algebrica che esprime l'espressione descritta a parole.

- 11** a. La somma del doppio del reciproco di x con il triplo del reciproco di y .
b. Il reciproco della somma del doppio di x con il triplo di y .

- 12** a. La somma dei reciproci dei cubi di x e di y .
b. Il cubo della somma dei reciproci di x e di y .

- 13** a. Il quoziente tra il triplo di un numero naturale n e il cubo del successivo di n .
b. Il quoziente tra il cubo di n e il triplo del successivo di n .

- 14** a. La somma del quadrato di x con il reciproco del doppio di x .
b. La somma del quadrato del doppio di x con il reciproco del quadrato di x .

- 15** a. Il prodotto tra la somma di x con il reciproco di y e la somma del reciproco di x con y .
b. Il prodotto tra il reciproco della somma di x con y e la somma dei reciproci di x e di y .

Descrivi a parole le seguenti espressioni algebriche frazionarie.

16 $\frac{xy}{x+y}$

17 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

18 $\frac{x+y}{x^2+y^2}$

19 $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

20 $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2}$

21 $\frac{n^2}{n+1}$

22 $\frac{n}{(n+1)^2}$

23 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

24 $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

25 $\frac{1}{n(n+1)}$

27 $\frac{1}{x-1}$

28 $\frac{1}{x+2}$

29 $\frac{1}{4-x}$

30 $\frac{1}{x^2}$

31 $\frac{1}{2x-8}$

32 $\frac{1}{x^2-3x}$

33 $\frac{1}{x^2-4x}$

M ESERCIZI - Determina le C.E. delle seguenti frazioni algebriche.

Matematica a colori ed. verde
Pag 352 vol 1

34 $\frac{x}{8x^2 + 8}$

35 $\frac{1}{x^2 + 4x}$

36 $\frac{1}{x - y}$

37 $\frac{x + y}{xy}$

38 $\frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$

39 $\frac{x - 1}{9 - x^2}$

40 $\frac{a - 3}{2a^2 - 2}$

M ESERCIZI - Determina le C.E. delle seguenti frazioni algebriche.

Matematica a colori ed. verde

Pag 353 vol 1

41
$$\frac{1}{a^2 + 16}$$

42
$$\frac{1}{x^2 - 3x - 4}$$

43
$$\frac{1}{a^2 + 10a + 25}$$

44
$$\frac{1}{6x^2 - 9x}$$

45
$$\frac{a + 3}{6a^2 - 10a}$$

46
$$\frac{k + 1}{k^2 + 7k - 8}$$

47
$$\frac{a - 2}{2a^2 + a - 3}$$

48
$$\frac{1}{x^3 - x^2}$$

49
$$\frac{1}{a^3 + 2a^2 - 3a}$$

50
$$\frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$$

M ESERCIZI - Determina le C.E. delle seguenti frazioni algebriche.

Matematica a colori ed. verde
Pag 353 vol 1

51 $\frac{1}{a^4 + 2a^2 - 3}$

52 $\frac{1}{(x-3)^2 - 25}$

53 $\frac{1}{(x-1)^2 - 36}$

54 $\frac{1}{(2x-3)^2 - 25}$

55 $\frac{1}{(k+2)^2 - 4k^2}$

56 $\frac{1}{a^3 + 5a^2 - 4a - 20}$

57 $\frac{1}{2k^3 + 3k^2 - 2k - 3}$

58 $\frac{t}{8t^3 + 36t^2 + 54t + 27}$

59 $\frac{a+3}{a^4 - 5a^2 + 4}$

Frazioni algebriche equivalenti



Frazioni equivalenti

Due **frazioni algebriche**, funzioni delle stesse variabili, sono **equivalenti** se diventano numeri uguali in corrispondenza di ogni valore che è possibile attribuire alle variabili.

Regola per individuare l'equivalenza: $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ sono equivalenti se $A \cdot D = B \cdot C$

ESEMPIO

$$\frac{2a}{a^2 - a} \quad \text{è equivalente a} \quad \frac{2a + 2}{a^2 - 1}$$

Infatti:

$$2a (a^2 - 1) = (2a + 2) (a^2 - a)$$

$$\Rightarrow [2a (a - 1) (a + 1) = 2(a + 1) a (a - 1)]$$

$$\Rightarrow 2a (a - 1) (a + 1) = 2 a (a - 1) (a + 1)]$$

ESEMPIO

Per $a=2$

$$\frac{2a}{a^2 - a} = \frac{2 \cdot 2}{2^2 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{2a + 2}{a^2 - 1} = \frac{2 \cdot 2 + 2}{2^2 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$



Proprietà invariantiva

Per la **proprietà invariantiva**, possiamo moltiplicare o dividere numeratore e denominatore di una **frazione algebrica** per uno stesso polinomio non nullo ottenendo una **frazione algebrica equivalente** a quella di partenza

Proprietà invariante Esercizi

Completa le seguenti uguaglianze in modo che risultino corrette: presta attenzione ai segni!

87 $\frac{a - 2b}{x - 3} = \frac{2b - a}{3 - x}$

$\frac{a - 2b}{x - 3} = -\frac{2b - a}{3 - x}$

$-\frac{a - 2b}{x - 3} = \frac{2b - a}{x - 3}$

88 $\frac{x^2 - y^2}{x - 2y} = -\frac{x^2 - y^2}{2y - x}$

$\frac{x^2 - y^2}{x - 2y} = \frac{y^2 - x^2}{2y - x}$

$-\frac{x^2 - y^2}{x - 2y} = \frac{y^2 - x^2}{x - 2y}$

89 $\frac{a - 2}{(a - 3)^2} = \frac{\dots}{(3 - a)^2}$

$\frac{a - 2}{(a - 3)^2} = -\frac{\dots}{(a - 3)^2}$

$-\frac{a - 2}{(a - 4)^2} = \frac{\dots}{(4 - a)^2}$

Operazioni

Riduzione allo stesso denominatore



Riduzione allo stesso denominatore Esercizi

Ripassiamo l'aritmetica

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{8}$$

Scomponiamo anzitutto i denominatori

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2^3$$

$$\text{mcm}(6, 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$$

$$24 \div 6 = 4$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24}$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore delle frazioni date per un fattore opportuno (colorato in rosso): **proprietà invariante**

$$24 \div 8 = 3$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{8} = \frac{4}{24} + \frac{15}{24} = \frac{19}{24}$$

Concetto da fissare:

Il m.c.m. è il "denominatore di arrivo" più piccolo possibile.

La trasformazione avviene moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore "mancante".

Raccoglimento totale : $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

Somma per differenza: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

Quadrato di un binomio $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$

Trinomio particolare.: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$



Il Salto all'Algebra: il m.c.m. tra Polinomi

Questa è la "nuova" regola, che in realtà è identica a quella vecchia.

La regola dell'm.c.m. tra polinomi:

Il prodotto di tutti i **fattori** (comuni e non comuni), presi una sola volta con l'**esponente più alto**.

- Tutto
- Una sola volta
- Max esponente

Esempio guidato: Trovare l'm.c.m. tra i polinomi A, B e C.

- $A = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$
- $B = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$
- $C = 3x + 6 = 3(x + 2)$

Analisi dei fattori:

- Fattore $(x - 2)$: Esponente più alto è 1 (presente in A).
- Fattore $(x + 2)$: Esponente più alto è 2 (presente in B).
- Fattore 3 (parte numerica): Esponente più alto è 1 (presente in C).

Costruzione dell'm.c.m.: $mcm(A, B, C) = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)^2$

M Riduzione allo stesso denominatore Esercizi

Trasformiamo le seguenti frazioni in altre due equivalenti, che abbiano come denominatore il m.c.m. dei denominatori delle frazioni date:

$$\frac{x}{x+1}, \quad \frac{1}{x^2-1}$$

Scomponiamo anzitutto i denominatori

mcm: $(x-1)(x+1)$

$$\frac{x}{x+1}, \quad \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore delle frazioni date per un **fattore opportuno** (colorato in rosso): **proprietà invariante**

1^a frazione

$$\frac{x}{x+1}$$

Fattore opportuno $\frac{mcm}{denominatore} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = (x-1)$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)}$$

2^a frazione

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

Fattore opportuno $\frac{mcm}{denominatore} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 1$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1 \cdot 1}{(x-1)(x+1) \cdot 1}$$

$$\frac{x(x-1)}{(x+1) \cdot (x-1)}, \quad \frac{1}{(x-1)(x+1) \cdot 1}$$

M Riduzione allo stesso denominatore Esercizi

Trasformiamo le seguenti frazioni in altre tre equivalenti, che abbiano come denominatore il m.c.m. dei denominatori delle frazioni date:

$$\frac{x}{x+1}, \frac{1}{x^2-1}, \frac{1}{x^2-x}$$

Scomponiamo anzitutto i denominatori

$$\frac{x}{x+1}, \frac{1}{(x-1)(x+1)}, \frac{1}{x(x-1)}$$

mcm: $x(x-1)(x+1)$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore delle frazioni date per un fattore opportuno (colorato in rosso): **proprietà invariante**

Fattore opportuno $\frac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)} = x(x-1)$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x \cdot x \cdot (x-1)}{(x+1)x(x-1)}$$

Fattore opportuno $\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = x$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1 \cdot x}{(x-1)(x+1) \cdot x}$$

Fattore opportuno $\frac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = (x+1)$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1 \cdot (x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

M Riduzione allo stesso denominatore Esercizi

le tre frazioni algebriche con lo stesso denominatore

$$\frac{x^2(x-1)}{x(x-1)(x+1)}, \frac{x}{x(x-1)(x+1)}, \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)}$$

Trasforma le seguenti frazioni in altre equivalenti, che abbiano come denominatore il m.c.m. dei denominatori delle frazioni date.

96 $\frac{1}{a^2 - a}; \quad \frac{1}{a^3 + a^2}; \quad \frac{1}{a}$

97 $\frac{a}{a + 1}; \quad \frac{1}{a^2 + a}; \quad \frac{2}{a^2 - 1}$

$$\left[\frac{a^3 - a^2}{a(a^2 - 1)}; \quad \frac{a - 1}{a(a^2 - 1)}; \quad \frac{2a}{a(a^2 - 1)} \right]$$

98 $\frac{1}{x^2}; \quad \frac{1}{x^4 - 4x^2}; \quad \frac{1}{x^2 + 2x}$

Trasforma le seguenti frazioni in altre equivalenti, che abbiano come denominatore il m.c.m. dei denominatori delle frazioni date.

99 $\frac{1}{x-1}; \quad \frac{x}{x^4-1}; \quad \frac{x}{x^2+1}$
 $\left[\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^4-1}; \quad \frac{x}{x^4-1}; \quad \frac{x(x^2-1)}{x^4-1} \right]$

100 $\frac{1}{x^2-1}; \quad \frac{1}{x-x^2}; \quad \frac{1}{x^2-3x-4}$

101 $\frac{a}{a^2-b^2}; \quad \frac{1}{a^2+ab}; \quad \frac{1}{a}$
 $\left[\frac{a^2}{a(a^2-b^2)}; \quad \frac{a-b}{a(a^2-b^2)}; \quad \frac{a^2-b^2}{a(a^2-b^2)} \right]$

102 $\frac{1}{a}; \quad \frac{1}{b}; \quad \frac{1}{a^2-ab}$

Operazioni

Semplificazione tra frazioni algebriche

1.

$$\frac{3a^2x^2 - 9a^3x}{ax^3 - 3a^2x^2} = \frac{\cancel{3a^2}^{\text{red}} \cancel{x}^{\text{blue}} (\cancel{x - 3a})^{\text{blue}}}{\cancel{ax^2}^{\text{red}} (\cancel{x - 3a})^{\text{blue}}} = \frac{3a}{x}$$

Il numeratore e il denominatore **hanno** divisori comuni al di fuori dell'unità e quindi la frazione è **riducibile**.

2.

$$\frac{a + 2b}{a^2 - b^2} = \frac{a + 2b}{(a - b)(a + b)}$$

Il numeratore e il denominatore **non hanno** divisori comuni al di fuori dell'unità e quindi la frazione è **irriducibile**.

L'algoritmo per semplificare una frazione è il seguente:

- si scompongono numeratore e denominatore
- si individuano i divisori comuni, cioè il *M.C.D.*
- si dividono il numeratore e il denominatore per il loro *M.C.D.*

Se il numeratore e il denominatore non hanno divisori comuni si dice che la frazione è **irriducibile**.



Semplificazione	È corretta?	Eventuale correzione
$\frac{\cancel{2}x - \cancel{3}y}{\cancel{2}x + \cancel{3}y} = \frac{x - y}{x + y}$	☐ Sì ☐ No	
$\frac{\cancel{x} + \cancel{y}}{\cancel{x} - \cancel{y}} = -1$	☐ Sì ☐ No	
$\frac{\cancel{2}\cancel{x} - y}{\cancel{x}} = 2 - y$	☐ Sì ☐ No	
$\frac{(2 - x)^2}{x(x - 2)} = \frac{(x - 2)^2}{x(\cancel{x - 2})} = \frac{x - 2}{x}$	☐ Sì ☐ No	
$\frac{(3 - t)^3}{t^2 - 3t} = \frac{(3 - t)^{\cancel{3}}}{t(\cancel{t - 3})} = \frac{(t - 3)^2}{t}$	☐ Sì ☐ No	
$\frac{2z^2 - 2y^2}{y - z} = \frac{2(\cancel{z - y})(z + y)}{\cancel{y - z}} = -2(z + y)$	☐ Sì ☐ No	

Test

108 Quale delle seguenti frazioni è *irriducibile*?

☐ A $\frac{a+b}{a^2-b^2}$

☐ C $\frac{a^2+b^2}{a-b}$

☐ B $\frac{a^2-b^2}{a-b}$

☐ D $\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$

109 Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

☐ A $\frac{t^2-4}{4t-t^3} = 0$

☐ C $\frac{t^2-4}{4t-t^3} = \frac{1}{t}$

☐ B $\frac{t^2-4}{4t-t^3} = \frac{t-2}{t+2}$

☐ D $\frac{t^2-4}{4t-t^3} = -\frac{1}{t}$

110 Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

☐ A $\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 + ab + b^2$

☐ C $\frac{a - b}{a + b} = -1$

☐ B $\frac{x^4 - y^2}{x^2 - y} = x^2 + y$

☐ D $\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 - b^2$

111 Quale delle seguenti uguaglianze **non** è vera?

☐ A $\frac{x^6 - y^3}{x^2 - y} = x^4 + x^2y + y^2$

☐ C $\frac{a^6 - b^6}{a^3 - b^3} = a^2 - b^2$

☐ B $\frac{x^6 - 1}{x^3 + 1} = x^3 - 1$

☐ D $\frac{a^4 - b^4}{b^2 - a^2} = -a^2 - b^2$

Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

a. $\frac{3a^2b^3c^4}{15ab^5c^6}$

b. $\frac{15x^2 - 15x}{6x - 6}$

c. $\frac{a^3 - a^2}{a^3 - a}$

d. $\frac{a^2b - ab^2}{a^2b - a^3}$

$$\text{113} \quad \frac{4a^2b^3c^4}{12ab^5c^6}$$

$$\left[\frac{a}{3b^2c^2} \right]$$

$$\text{114} \quad \frac{a^6 + a^4}{a^3}$$

$$[a^3 + a]$$

$$\text{115} \quad \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

$$\left[\frac{x}{x - 1} \right]$$

$$\text{116} \quad \frac{2a^6b^2c^7}{5ab^5c^6}$$

$$\left[\frac{2a^5c}{5b^3} \right]$$

$$\text{117} \quad \frac{2a^2 + 4a}{8a^3}$$

$$\left[\frac{a + 2}{4a^2} \right]$$

$$\text{118} \quad \frac{x^2 + 2x}{8x + 16}$$

$$\left[\frac{x}{8} \right]$$

$$\text{119} \quad \frac{12a^6b^9c^{10}}{20a^7b^5c^6}$$

$$\left[\frac{3b^4c^4}{5a} \right]$$

$$\text{120} \quad \frac{a^7 + a^5}{a^2 + 1}$$

$$[a^5]$$

$$\text{121} \quad \frac{6x^2 + 3x}{36x^2 - 9}$$

$$\left[\frac{x}{3(2x - 1)} \right]$$

$$122 \quad \frac{10a^4b^3c^4}{15ab^3c^6d}$$

$$\left[\frac{2a^3}{3c^2d} \right]$$

$$123 \quad \frac{12a^3}{6a^6 + 9a^4}$$

$$\left[\frac{4}{2a^3 + 3a} \right]$$

$$124 \quad \frac{6x^5 + 6x^3}{10x^4 + 10x^2}$$

$$\left[\frac{3x}{5} \right]$$

$$125 \quad \frac{x^5 - 3x^4}{x^4 - 9x^2}$$

$$\left[\frac{x^2}{x + 3} \right]$$

$$126 \quad \frac{a^3 - ab^2}{a^2b + ab^2}$$

$$\left[\frac{a - b}{b} \right]$$

$$127 \quad \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$$

$$\left[\frac{x + 2}{x - 2} \right]$$

$$128 \quad \frac{x^2y - y^3}{x^3 - xy^2}$$

$$\left[\frac{y}{x} \right]$$

$$129 \quad \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x^3}$$

$$\left[-\frac{1}{x} \right]$$

$$130 \quad \frac{x^2y - 2xy^2}{2v^3 - xv^2}$$

$$\left[-\frac{x}{v} \right]$$

$$\text{131} \quad \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

[Irriducibile]

$$\text{132} \quad \frac{3x - 3y}{6x^2 + 6x - 6xy - 6y}$$

$$\left[\frac{1}{2(x+1)} \right]$$

$$\text{133} \quad \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8}$$

$$\left[\frac{x+3}{x-4} \right]$$

$$\text{134} \quad \frac{x^2 - 2,25}{x^2 - 3x + 2,25}$$

$$\left[\frac{2x+3}{2x-3} \right]$$

$$\text{135} \quad \frac{a^2 - 4b^2}{ax + 2bx + 2a + 4b}$$

$$\left[\frac{a-2b}{x+2} \right]$$

$$\text{136} \quad \frac{0,25x^2 - 1}{0,5x^2 - x}$$

$$\left[\frac{x+2}{2x} \right]$$

$$\text{137} \quad \frac{b^2 - a^2}{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\left[\frac{b-a}{a+b} \right]$$

$$\text{138} \quad \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 8}$$

$$\left[\frac{x+1}{2(x+2)} \right]$$

Operazioni

Addizioni e sottrazioni tra frazioni algebriche

SOMMA ALGEBRICA DI FRAZIONI CON LO STESSO DENOMINATORE

La **somma algebrica** di due o più frazioni algebriche **aventi lo stesso denominatore** è la frazione algebrica che ha per **denominatore** il denominatore comune, e per **numeratore** la somma algebrica dei numeratori



Operazioni Addizione e sottrazione

Per sommare o sottrarre due o più frazioni algebriche, si deve seguire questa procedura:

- Scomporre i denominatori delle frazioni e porre le condizioni di esistenza
- Semplificare le frazioni che non sono irriducibili
- Trovare il *m.c.m.* fra i denominatori
- Ridurre tutte le frazioni allo stesso denominatore
- Eseguire le addizioni e le sottrazioni e semplificare la frazione ottenuta se necessario

ESEMPIO

$$\frac{3b}{2x+y} + \frac{b}{2x-y} =$$

$$\text{C.E. : } 2x+y \neq 0 \quad 2x-y \neq 0$$

$$m.c.m = (2x+y)(2x-y)$$

$$\frac{3b(2x-y) + b(2x+y)}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{6bx - 3by + 2bx + by}{(2x+y)(2x-y)} = \frac{8bx - 4by}{(2x+y)(2x-y)}$$

Stesso denominatore

Esegui le seguenti operazioni e semplifica, se possibile, i risultati ottenuti.

$$\text{235} \quad \frac{1}{x} + \frac{3}{x}$$

$$\left[\frac{4}{x} \right]$$

$$\text{236} \quad \frac{3a}{a+b} - \frac{2a}{a+b}$$

$$\left[\frac{a}{a+b} \right]$$

$$\text{237} \quad \frac{3}{2x} - \frac{5}{2x}$$

$$\left[-\frac{1}{x} \right]$$

$$\text{238} \quad \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-2}{x-1}$$

$$\left[\frac{3}{x-1} \right]$$

$$\text{239} \quad \frac{a-b}{a+b} - \frac{2(b-a)}{a+b}$$

$$\left[\frac{3a-3b}{a+b} \right]$$

$$\text{240} \quad \frac{3a-2b}{a^2-b^2} - \frac{2a-b}{a^2-b^2}$$

$$\left[\frac{1}{a+b} \right]$$

$$\text{241} \quad \frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3}$$

$$[x-3]$$

$$\text{242} \quad \frac{3x}{x+1} - \frac{x-2}{x+1}$$

$$[2]$$

$$\text{243} \quad \frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{x}{x^2+2x+1}$$

$$\left[\frac{1}{x+1} \right]$$

$$\text{244} \quad \frac{1}{x^2-2x+1} - \frac{x}{x^2-2x+1}$$

$$\left[-\frac{1}{x-1} \right]$$

diverso denominatore

Esegui le seguenti operazioni e semplifica, se possibile, i risultati ottenuti:

$$\text{246} \quad \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$\left[\frac{(x-1)^2}{x^3} \right]$$

$$\text{247} \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$\left[\frac{b-a}{ab} \right]$$

$$\text{248} \quad \frac{a-b}{a^2b} - \frac{a+b}{ab^2}$$

$$\left[-\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \right]$$

$$\text{249} \quad \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{3xy} - \frac{1}{6y^2}$$

$$\left[\frac{3y^2 - 4xy - x^2}{6x^2y^2} \right]$$

$$\text{250} \quad \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$$

$$\left[\frac{a^2+b^2}{ab} \right]$$

$$\text{251} \quad \frac{a^2-b+a}{a} - \frac{ab+b-a}{b}$$

$$\left[\frac{a^2-b^2}{ab} \right]$$

$$\text{252} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$\left[\frac{yz - xz + xy}{xyz} \right]$$

$$\text{253} \quad \frac{x+y}{x^2y} - \frac{x-y}{xy^2}$$

$$\left[\frac{y^2 - x^2 + 2xy}{x^2y^2} \right]$$

Semplifica le seguenti espressioni in cui compaiono addizioni e sottrazioni tra frazioni algebriche.

$$255 \quad \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}$$

$$\left[\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \right]$$

$$256 \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2 - a}$$

$$\left[\frac{1}{a-1} \right]$$

$$257 \quad \frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{x^2 + 2x}$$

$$\left[\frac{4}{x(x^2 - 4)} \right]$$

$$258 \quad \frac{3y}{4x - 2y} - \frac{y}{x} - \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{y^2 - x^2}{x(2x - y)} \right]$$

$$259 \quad \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2+a} - \frac{1}{a^2 - 4}$$

$$\left[-\frac{5}{a^2 - 4} \right]$$

$$260 \quad \frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

$$[1]$$

$$261 \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x^2 - 2x}$$

$$\left[-\frac{1}{2x^2 - 2x} \right]$$

$$270 \quad \frac{b}{4a-4b} - \frac{b}{4a+4b} + \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{a^2}{2(a^2 - b^2)} \right]$$

$$271 \quad \frac{1}{a} + \frac{3}{a^2 - 3a} - \frac{1}{a^2 - 9}$$

$$\left[\frac{a+2}{a^2 - 9} \right]$$

$$272 \quad \frac{1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

$$\left[\frac{2-x}{(x-1)^2} \right]$$

$$273 \quad \frac{a}{2a+2b} + \frac{b}{3b-3a} + \frac{2b^2 + 5ab}{6a^2 - 6b^2}$$

$$\left[\frac{a^2}{2(a^2 - b^2)} \right]$$

$$274 \quad \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{2}{x^3 + 2x^2} - \frac{1}{x^3 - 2x^2}$$

$$\left[\frac{x-1}{x^2(x+2)} \right]$$

$$275 \quad \frac{2}{x+1} - \frac{x+2}{x^2 + x} - \frac{6x}{x^2 - 1}$$

$$\left[\frac{5x-2}{x(1-x)} \right]$$

$$276 \quad \frac{1}{1-x^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1}$$

$$\left[\frac{4-x}{x^2 - 1} \right]$$

Operazioni

Prodotto tra frazioni algebriche

PRODOTTO TRA FRAZIONI ALGEBRICHE

Il **prodotto** di due frazioni algebriche è la frazione algebrica che ha per **numeratore** il prodotto dei numeratori e per **denominatore** il prodotto dei denominatori

M Operazioni Prodotto

Per moltiplicare due o più frazioni algebriche, si deve seguire questa procedura:

- Scomporre i denominatori delle frazioni da moltiplicare
- Semplificare («in croce» o tra il numeratore e il denominatore di una stessa frazione algebrica);
- Si calcola il prodotto dei numeratori e il prodotto dei denominatori.

ESEMPIO numerico

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{20}{21} =$$

$$\frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{5}} \cdot \frac{2^2 \cdot \cancel{5}}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 2^2}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$$

ESEMPIO Frazione algebrica

$$\frac{x^2 + x}{2x} \cdot \frac{6x}{x^2 - 1} =$$

$$\frac{\cancel{x} \cdot (\cancel{x} + 1)}{\cancel{2} \cdot \cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot x}{(x - 1)(\cancel{x} + 1)} = \frac{3 \cdot x}{x - 1}$$

313 Vero o falso?

a. $\frac{2-x}{x} \cdot \frac{x+1}{2-x} \cdot \frac{x}{x+1} = 0$

☐ V ☐ F

b. $(a^2 + b^2) \cdot \frac{2}{a^2 - b^2} = -2$

☐ V ☐ F

c. $\frac{2-x}{x} \cdot \frac{1-x}{x-2} \cdot \frac{x}{x-1} = 1$

☐ V ☐ F

d. $(a^2 - b^2) \cdot \frac{2}{b^2 - a^2} = -2$

☐ V ☐ F

e. $\frac{2-x}{x-3} \cdot \frac{1-x}{x-2} \cdot \frac{3-x}{x-1} = 1$

☐ V ☐ F

f. $(a^4 - b^4) \cdot \frac{1}{a^2 - b^2} = a^2 - b^2$

☐ V ☐ F

g. $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^{-2} = \frac{y^4}{x^9}$

☐ V ☐ F

h. $\frac{x}{y} : \frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

☐ V ☐ F

[3 uguaglianze vere e 5 false]

314 Caccia all'errore. Completa la seguente tabella.

Divisione	È stata svolta correttamente?	Eventuale correzione
$\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \cdot (x^2 + 4x + 4) = \frac{x^2}{x+2} \cdot (x+2)^2 = x^2(x+2)$	☐ Sì ☐ No	
$\frac{x-y}{2x} : \frac{y^2-x^2}{6x} = \frac{3}{x+y}$	☐ Sì ☐ No	
$\frac{a^2}{2a-b} : \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2a-b} \cdot \frac{2}{a} = \frac{a}{a-b}$	☐ Sì ☐ No	
$\frac{1-x^2}{y} : \left(1 - \frac{x}{y}\right) = \frac{1-x^2}{y} \cdot \left(1 - \frac{y}{x}\right) = \frac{(1-x^2)(x-y)}{xy}$	☐ Sì ☐ No	

Esegui le seguenti moltiplicazioni.

$$316 \quad \frac{3x^2y}{6z^4} \cdot \frac{2z^3}{9xy}$$

$$317 \quad \frac{16x^3y^2}{6xz^4} \cdot \frac{2yz^3}{9y^4}$$

$$318 \quad \frac{a^3}{a^2 - 4} \cdot \frac{a + 2}{a^2}$$

$$322 \quad \frac{x^4 - x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{x + 2}{x^3 - x}$$

$$323 \quad \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^4 - 1}{x^2 - 2x}$$

$$324 \quad \frac{2x^3 + 2x^2y}{x^2y - xy^2} \cdot \frac{xy^2 - y^3}{x^2 + xy}$$

$$325 \quad \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 + 8x + 12}$$

$$\left[\frac{x}{9z} \right]$$

$$\left[\frac{16x^2}{27yz} \right]$$

$$\left[\frac{a}{a - 2} \right]$$

$$319 \quad \frac{t^2 + 3t}{t^2 - t^4} \cdot \frac{t^2 + t^3}{t^3 + 6t^2 + 9t}$$

$$320 \quad \frac{a^2bc}{a^3 - ab^2} \cdot \frac{a^3 - a^2b}{ab^2c^2}$$

$$321 \quad \frac{3x - 3y}{2x + 2y} \cdot \frac{4x + 4y}{6x^2 - 12xy + 6y^2}$$

$$\left[\frac{1}{(1 - t)(t + 3)} \right]$$

$$\left[\frac{a^2}{bc(a + b)} \right]$$

$$\left[\frac{1}{x - y} \right]$$

$$\left[\frac{x}{x - 2} \right]$$

$$\left[\frac{(x + 5)(x^2 + 1)}{x} \right]$$

$$[2y]$$

$$\left[\frac{x}{x + 2} \right]$$

326 **Videolezione** $\frac{4x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{(x^2 - 4)^2}{2x + 2}$

$$[2(x - 1)(x - 2)^2]$$

327 $\frac{a^6 - a^3b^3}{a^4 - b^2} \cdot \frac{a^2 + b}{a^4 + a^3b + a^2b^2}$

$$\left[\frac{a(a - b)}{a^2 - b} \right]$$

328 $\frac{a^3 - 1}{a^3 + 1} \cdot \frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1}$

$$\left[\frac{a - 1}{a + 1} \right]$$

329 $\frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12} \cdot \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x + 4}$

$$\left[\frac{x - 2}{(x + 2)^2} \right]$$

330 $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x} \cdot \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$

$$\left[\frac{x(x - 1)}{x - 3} \right]$$

331 $\frac{m^3 + m^2}{n^2m + n^3} \cdot \frac{nm^2 - n^3}{m^2 - 2mn} \cdot \frac{m^2 - 4mn + 4n^2}{m^2 + m}$

$$\left[\frac{(m - n)(m - 2n)}{n} \right]$$

Semplifica le seguenti espressioni contenenti addizioni, sottrazioni e moltiplicazioni tra frazioni algebriche.

$$\text{335} \quad \left(\frac{a}{ab + b^2} - \frac{b}{a^2 + ab} \right) \cdot \frac{ab^2}{a - b} \quad [b]$$

$$\text{337} \quad \left(\frac{a - b}{a^2 + b^2} + \frac{a + b}{a^2 - b^2} \right) \cdot \frac{a^4 - b^4}{2a^3 + 2b^3} \quad [1]$$

$$\text{336} \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \cdot \frac{x^3 - x}{x^3 - 1} - \frac{1}{x} \quad \left[\frac{1}{x^2} \right]$$

$$\text{338} \quad \left(\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2}{x^2 + x} - \frac{1}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{(x^3 - x)^2}{2x - 1} \quad [x(x^2 - 1)]$$

$$\text{339} \quad \left[\frac{1}{(3 - a)^2} + \frac{1}{6a - 2a^2} + \frac{3}{3a^2 - 27} \right] \cdot \frac{2a^3 - 18a}{6a^2 + 18} \quad \left[\frac{1}{2(a - 3)} \right]$$

$$\text{340} \quad \left(\frac{1}{x^2 - 2x} - \frac{1}{x^2 + 3x - 10} \right) \cdot \frac{x^2 - 2x}{10} + \frac{1}{2x + 10} \quad \left[\frac{1}{x + 5} \right]$$

$$\text{341} \quad \left(\frac{1}{xy^2 - y} + \frac{1}{x^2y - x} \right) \cdot \frac{x^3y^2 + x - 2x^2y}{x + y} + \frac{1}{y} \quad [x]$$

$$342 \quad \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x + 2}{x^2 + 4x - 5} \right) \left(\frac{42}{x + 5} + x - 8 \right)$$

$$\left[\frac{5x + 4}{(x + 5)^2} \right]$$

$$343 \quad \left[\left(\frac{1}{x^4 - x^3} - \frac{1}{x^4 + x^3} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{2} + \frac{1}{x^2} \right] \left(\frac{1}{x + 1} + x - 1 \right)$$

$$\left[\frac{1}{x} \right]$$

$$344 \quad \left(\frac{1}{3a^2 + 5a - 2} + \frac{1}{a^2 - 4} \right) \cdot \left(\frac{3}{4}a - \frac{19}{16} - \frac{25}{64a - 48} \right)$$

$$\left[\frac{1}{a + 2} \right]$$

$$345 \quad \left(\frac{1}{a + b - c} - \frac{c}{a^2 + b^2 + 2ab - c^2} \right) \left(1 + \frac{c}{a + b} \right)$$

$$\left[\frac{1}{a + b - c} \right]$$

$$346 \quad \left(\frac{ab}{a^3 - b^3} + \frac{1}{a - b} \right) \cdot \left(\frac{b^2}{a^2 + 2ab + b^2} - \frac{b}{a + b} + 1 \right)$$

$$\left[\frac{1}{a - b} \right]$$

$$347 \quad \left(\frac{1}{ax - bx - a + b} - \frac{1}{bx - ax - b + a} + \frac{1}{ax + bx - a - b} \right) \cdot \left(\frac{a}{3} - \frac{8b^2}{27a + 9b} - \frac{b}{9} \right)$$

$$\left[\frac{1}{x - 1} \right]$$



STOP