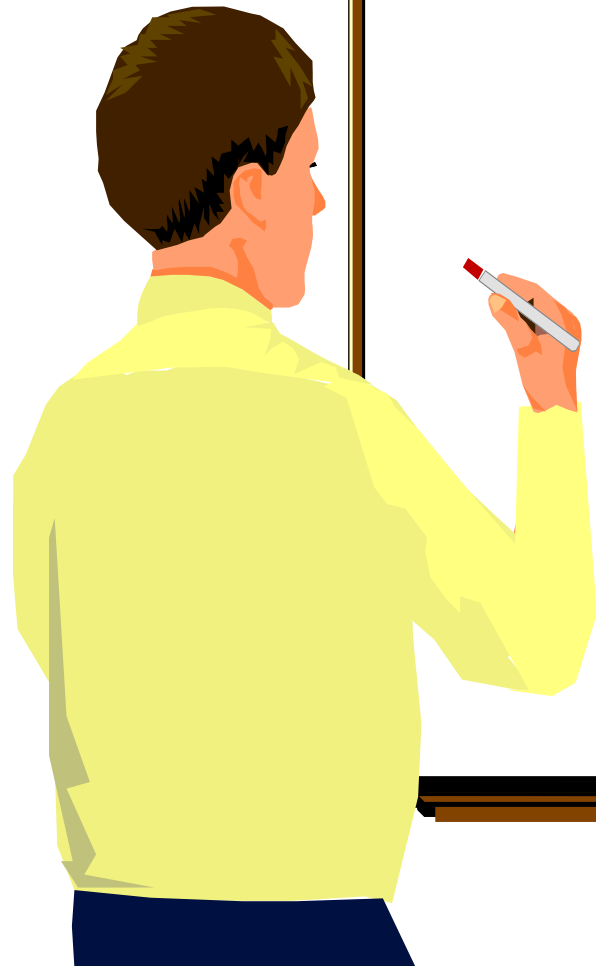




Analisi matematica

Asintoti
orizzontali
verticali
obliqui

Prof. Domenico Lo Iacono

Algebra dei limiti

Algebra dei limiti

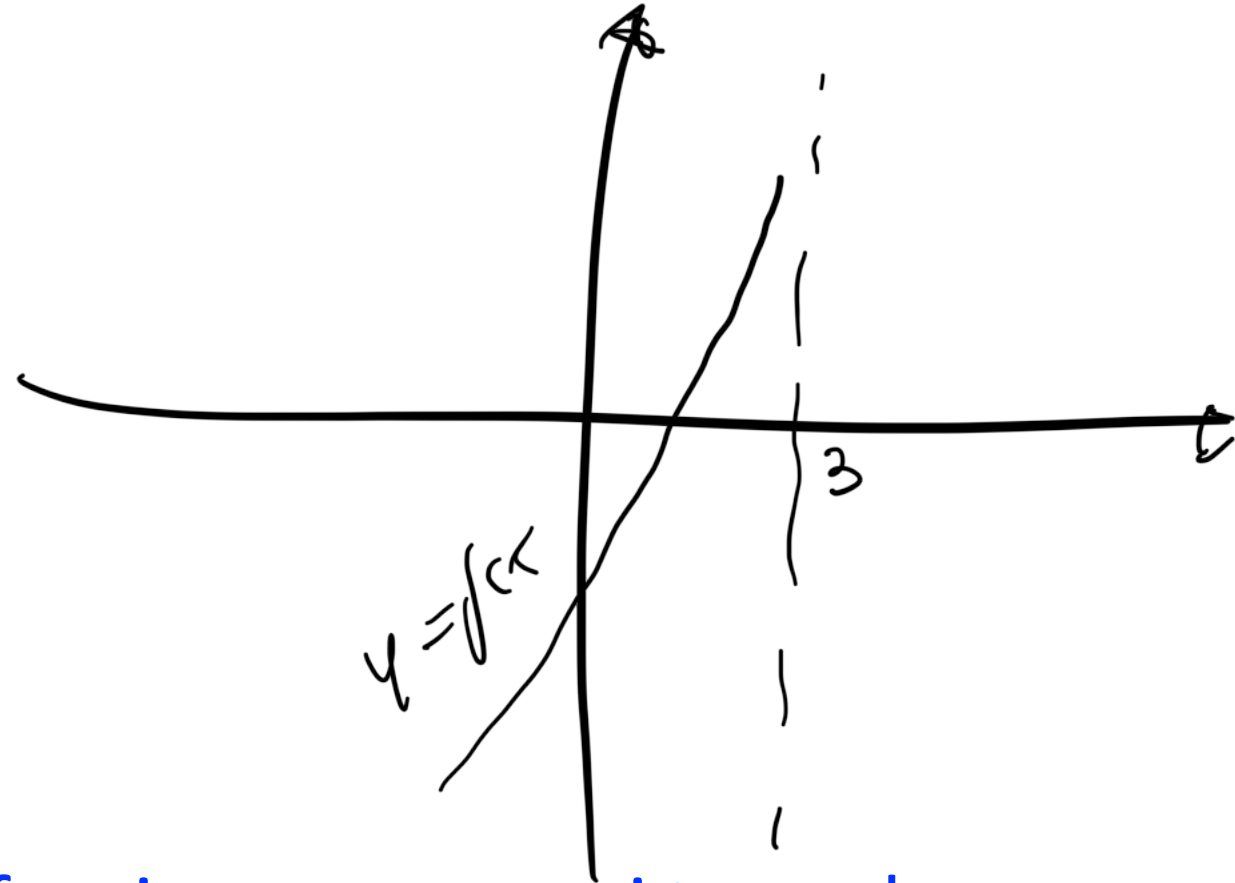
Asintoti

Definizione di **Asintoto**

Parola che deriva dal Greco:

A: privativo che significa **NO**
 Sympiptein = **congiungere**

Significa che non tocca,
 Si tratta di retta che si avvicina alla funzione senza mai toccarla

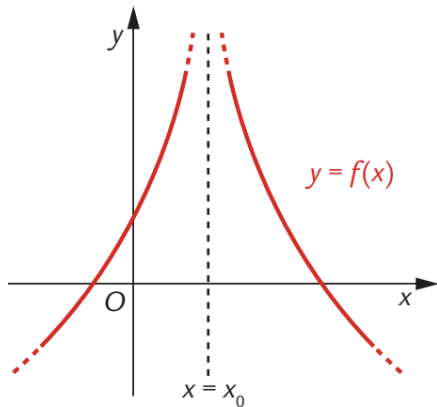


Asintoti verticali

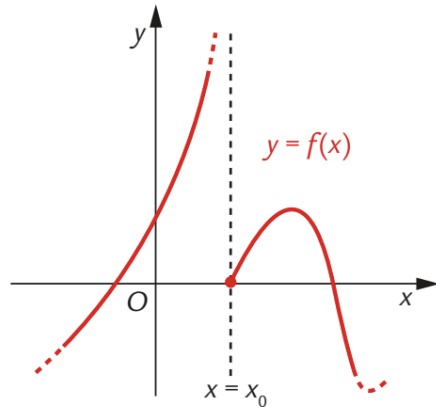
Funzione $y=f(x)$

- 1) ricerca del campo di esistenza
- 2) Verificare gli eventuali punti singolari
- 3) Calcolare il limite in corrispondenza dei punti di singolarità.

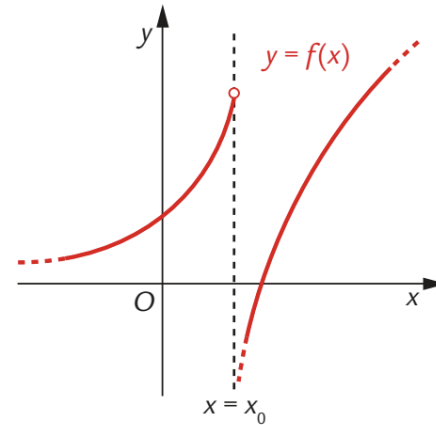
1) D.
2)



Asintoto verticale



Asintoto verticale
sinistro



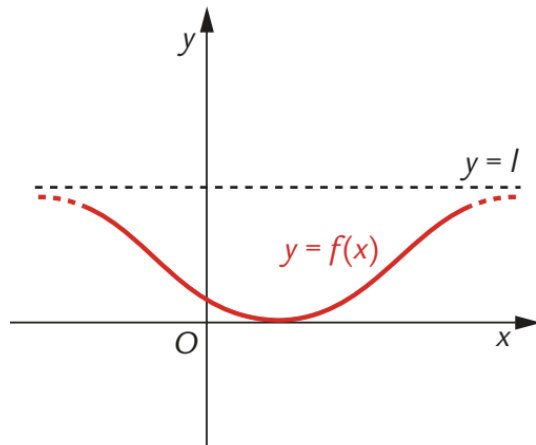
Asintoto verticale
destro

Asintoti Orizzontali

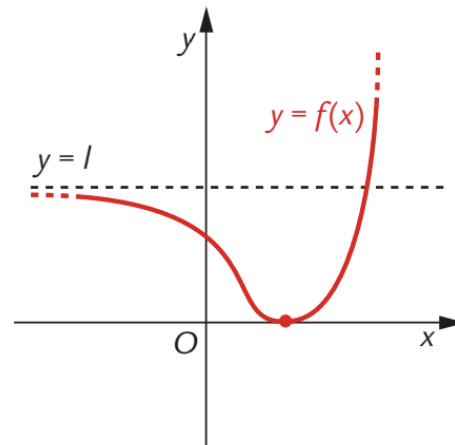
Funzione $y=f(x)$

- 1) Calcolare i limiti agli estremi infiniti degli intervalli che costituiscono il dominio
 $x \rightarrow +\infty$. e per $x \rightarrow -\infty$

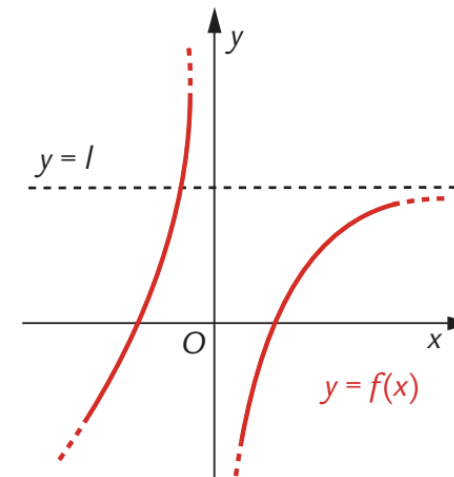
Se calcolando il limite, non ci sono asintoti orizzontali allora calcoliamo eventuali asintoti obliqui



Asintoto orizzontale



Asintoto orizzontale
sinistro



Asintoto orizzontale
destro

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Dominio $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Asintoti Verticali

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \infty$, quindi $x = -1$ è un asintoto *verticale*

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \infty$, quindi $x = 1$ è un asintoto *verticale*

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

Esercizi

Ricerca di asintoti verticali e orizzontali

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Dominio $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

Asintoti Orizzontali

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1$, quindi $y = 1$ è un asintoto *orizzontale* (bilatero)
- + 20*

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 2}$$

Dominio $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

Asintoti Verticali

- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 2} = \infty$, quindi $x = -2$ è un asintoto *verticale*

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 2}$$

Dominio $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

Asintoti Orizzontali

- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = -1$$

$y = -1$ è un asintoto *orizzontale sinistro*.

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

quindi $y = 1$ è un asintoto *orizzontale destro*.

Asintoti obliqui del tipo $y=mx+q$

Funzione $y=f(x)$

1) Calcolo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

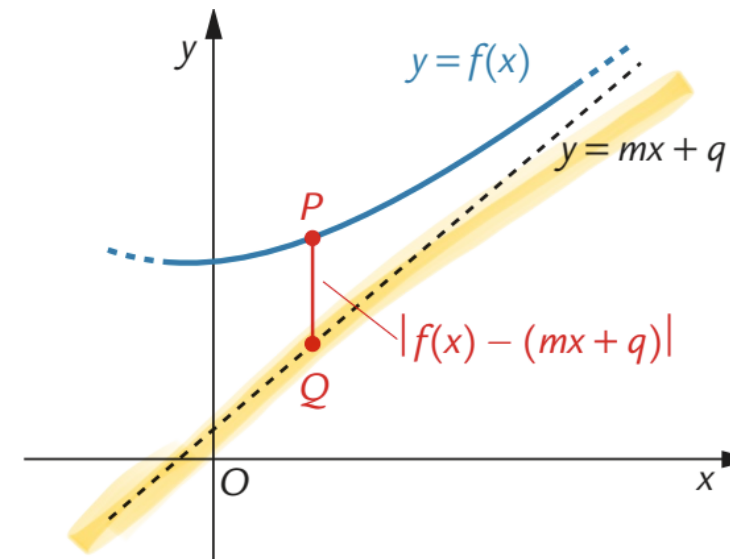
2) Calcolo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = q$

1) La retta trovata $y = m(x) + q$ è l'eventuale asintoto obliquo

m q

$y = mx + q$

Figura 4.27 La retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per f se e solo se la distanza PQ tende a 0 quando x tende a infinito.



Teorema Asintoti obliqui del tipo $v=mx+a$

Esistenza e calcolo dell'asintoto obliquo

La retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per la funzione $y = f(x)$ se e solo se:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ [4.2]

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = q$ [4.3]

essendo $m, q \in \mathbf{R}$, con $m \neq 0$.

Se le condizioni [4.2] e [4.3] sono verificate solo per $x \rightarrow +\infty$ oppure per $x \rightarrow -\infty$, l'asintoto obliquo sarà soltanto destro o sinistro.

Esercizi Ricerca di asintoti obliqui

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x}$$

Dominio $\mathbb{R} - \{-2, 0\},$

ha senso indagare sul comportamento della funzione sia per $x \rightarrow -\infty$ sia per $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm \infty$$

non ci sono asintoti orizzontali; *potrebbero* allora esistere asintoti obliqui.

Asintoti Obliqui

Asintoti Obliqui

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 + 2x^2} = 1$$

$$m = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\underbrace{f(x) - 1 \cdot x}_{f(x) - mx} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\underbrace{\frac{x^3 + 1}{x^2 + 2x} - x}_{\text{forma indeterminata}} \right) =$$

forma indeterminata
 $+\infty - \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 1 - x(x^2 + 2x)}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x^2}{x^2 + 2x} = -2$$

$$q = -2$$

l'asintoto obliquo esiste e ha equazione

$$y = mx + q$$

$$y = x - 2$$



Esercizi

Esercizi

$$y = mx + q$$



Esercizi



Esercizi