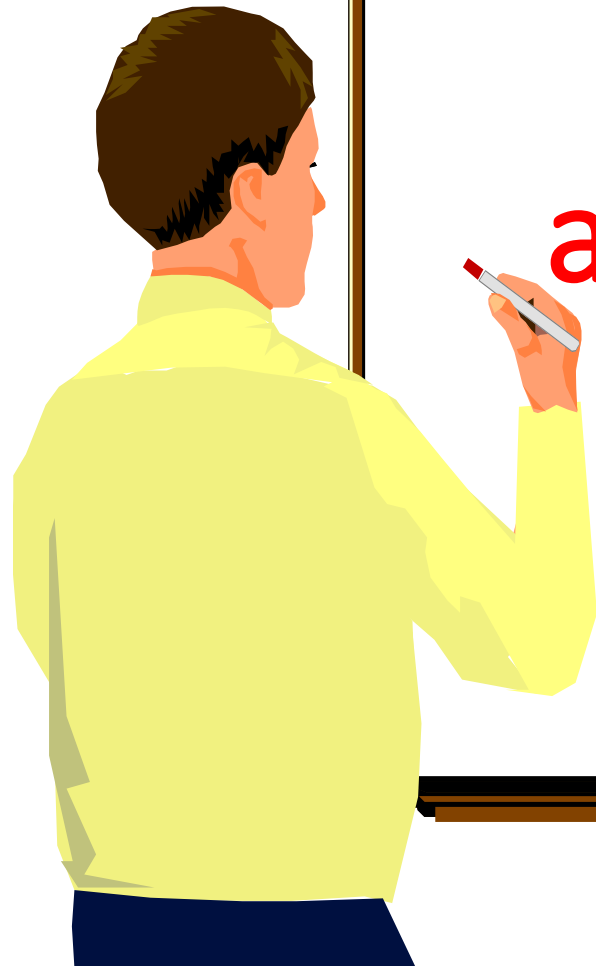




Analisi matematica

Continuità e algebra dei limiti

Prof. Domenico Lo Iacono

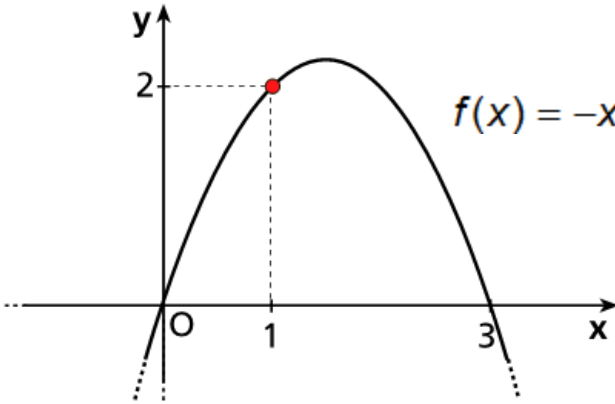
Funzioni continue

• Funzioni continue	4
• Definizione	6
• Continuità delle funzioni elementari (tabella)	8
• Continuità dalla Dx e dalla Sx	15
• Continuità in un intervallo	16
• Limiti funzioni elementari	17
• Esercizi	20

• Esercizi	43
------------	----

Funzioni continue

Osserviamo le seguenti figure



$$f(x) = -x^2 + 3x$$

Le due funzioni hanno lo stesso limite per $x \rightarrow 1$

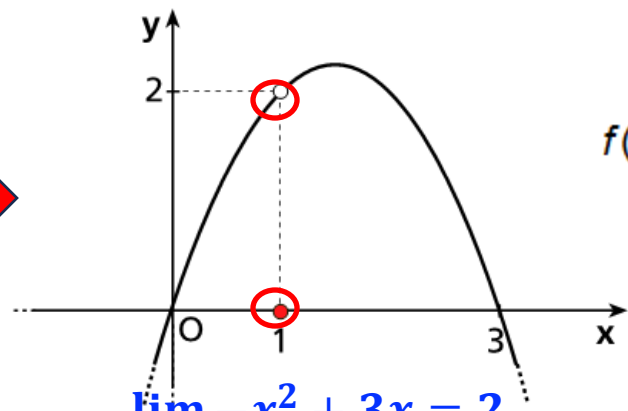


$$\lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + 3x = 2$$

$$f(1) = 2$$

Nel primo caso il valore del limite coincide con quello della funzione in x_0 : $f(x_0) = l$.

Questa funzione è continua in $x = 1$



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + 3x = 2$$

$$f(1) = 0$$

Nel secondo caso il valore di f non coincide con quello del limite.

Questa Funzione è discontinua



il caso in cui $f(x_0) = l$ è particolarmente importante.

Definizione

Sia f una funzione definita in un intorno (completo) di x_0 ;

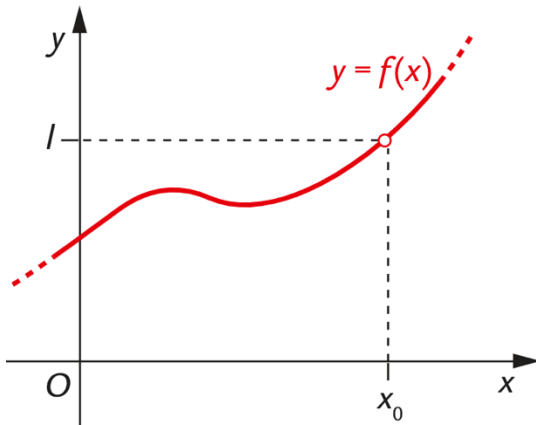
se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, la f si dice continua in x_0



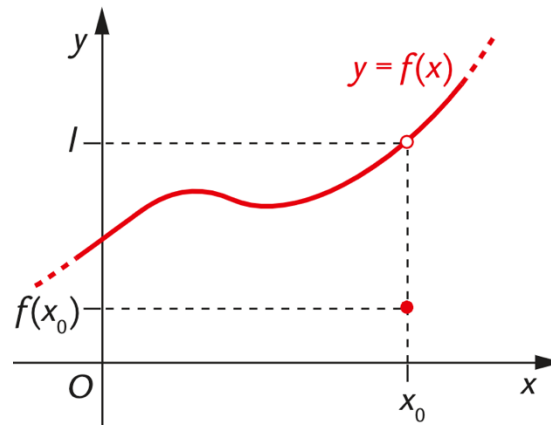
la f si dice continua in x_0

Funzioni continue

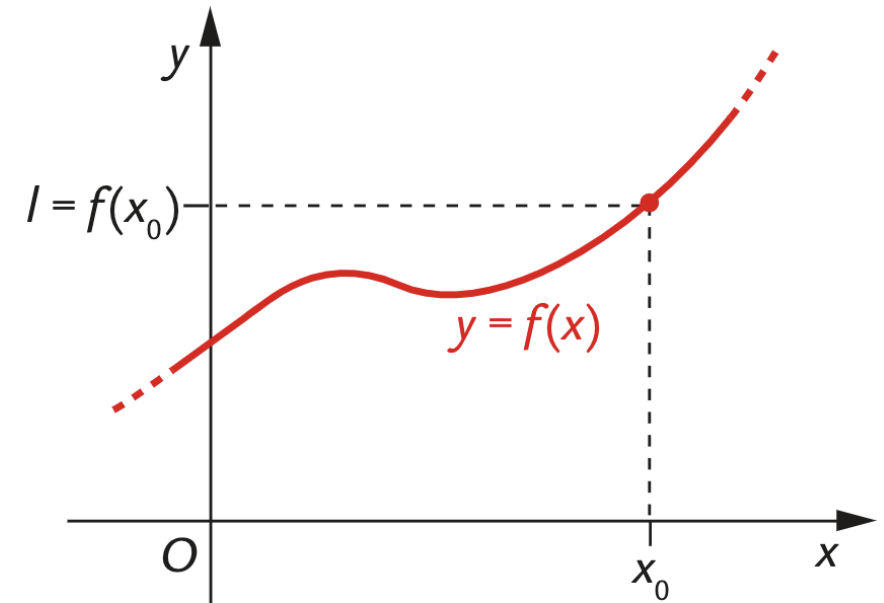
Osserviamo le seguenti figure



- Esiste a dx e a sx il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
- $f(x_0) \neq l$

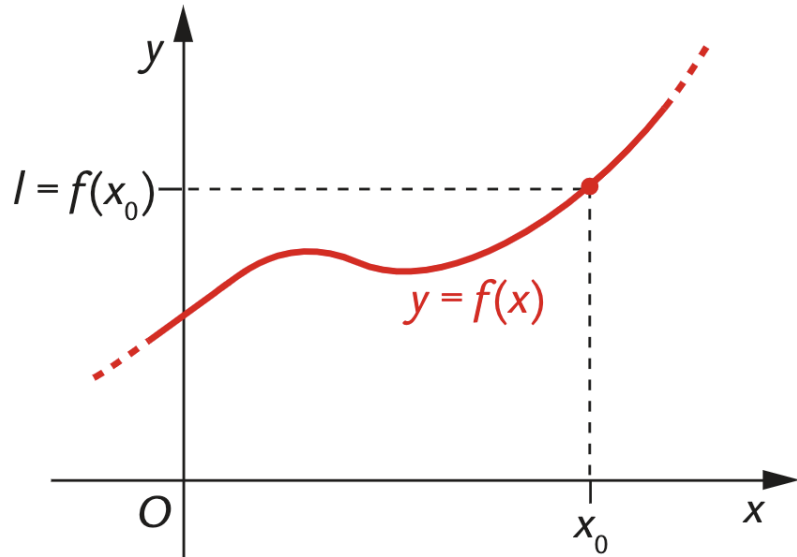


- La funzione è definita in x_0
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$



- La funzione è definita in x_0
- Esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = f(x_0)$
- $f(x_0) = l$

Funzioni continue



- La funzione è definita in x_0
- Esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Definizione di Funzioni continue

Sia ***f*** una funzione definita in un intorno (completo) di x_0 ;

se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, la ***f*** si dice continua in x_0



la ***f*** si dice continua in x_0

Funzioni continue

Verifichiamo che la funzione $f(x) = 2x^4 - 3$ è continua in $x_0 = 2$.

La funzione ha come dominio $\mathbb{R}$ ed è quindi definita in un intorno del punto 2.

Calcoliamo $f(x_0)$: $f(2) = 29$

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^4 - 3) = 29$

Avendo trovato due valori uguali, la funzione è continua.

Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari sono continue nei punti dove sono definite.

Continuità delle funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n \quad \forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0} \quad \forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \quad \forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R} \quad \rightarrow \text{Potenza}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0| \quad \forall x_0 \in \mathbf{R} \quad \rightarrow \text{Radicale}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad \forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1 \quad \rightarrow \text{Esponenziale}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbf{R} \quad \rightarrow \text{Valore assoluto}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbf{R} \quad \rightarrow \text{Logaritmo}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0 \quad \forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightarrow \text{Sinusoide}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbf{R} \quad \rightarrow \text{Cosinusoide}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0 \quad \forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightarrow \text{Tangente}$$

Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari sono continue nei punti dove sono definite.

Continuità delle funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^4 = 2^4 = 16$$

Potenza

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{5} ; \quad \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{9} = 3$$

Radicale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} 12^x = 12^2 = 144$$

Esponenziale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} |x| = |-2| = 2$$

Valore assoluto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \log_{10} x = \log_{10} 2 = 0,301;$$

Logaritmo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$\rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln x = \ln 2 = 0,69$$

Sinusoide

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$\rightarrow$

Cosinusoide

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$$

$$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$\rightarrow$

Tangente

Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari sono continue nei punti dove sono definite.

Continuità delle funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^4 = 2^4 = 16$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

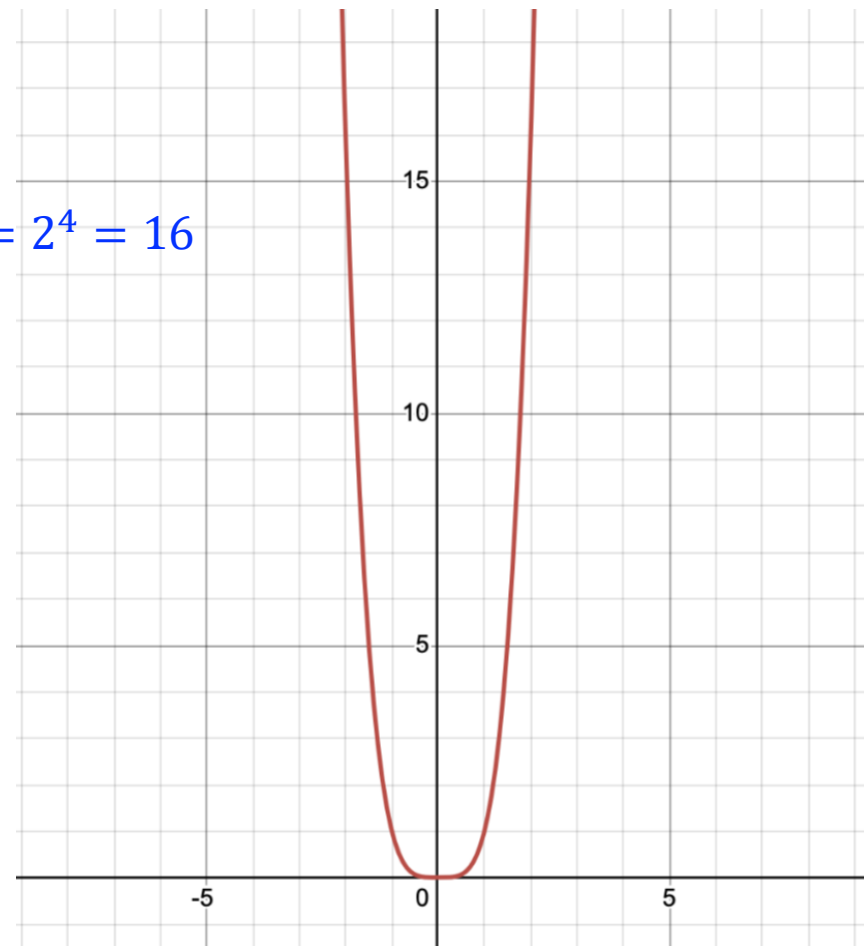
$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$$

$$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

→



Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari sono continue nei punti dove sono definite.

Continuità delle funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

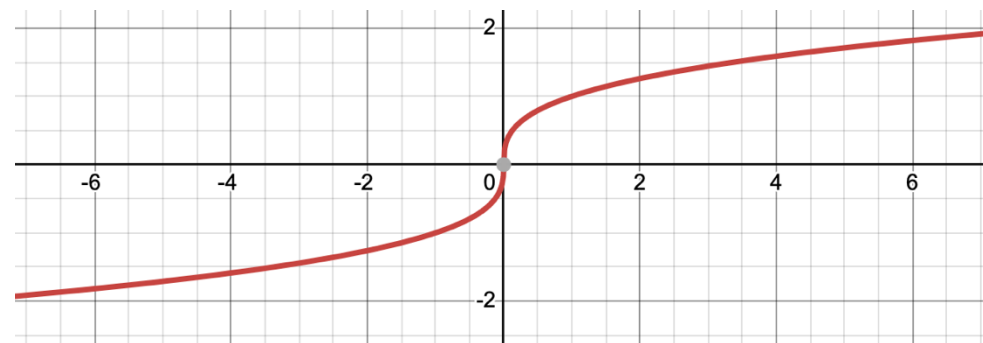
→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$$

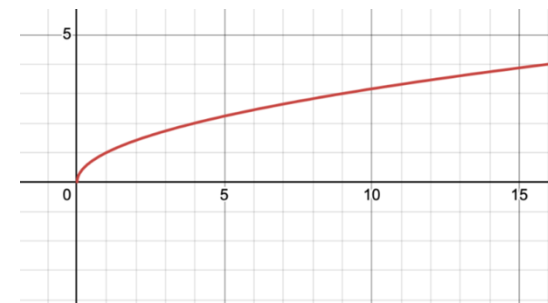
$$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

→

$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{5} ;$$



$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{5} ;$$



Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari sono continue nei punti dove sono definite.

Continuità delle funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

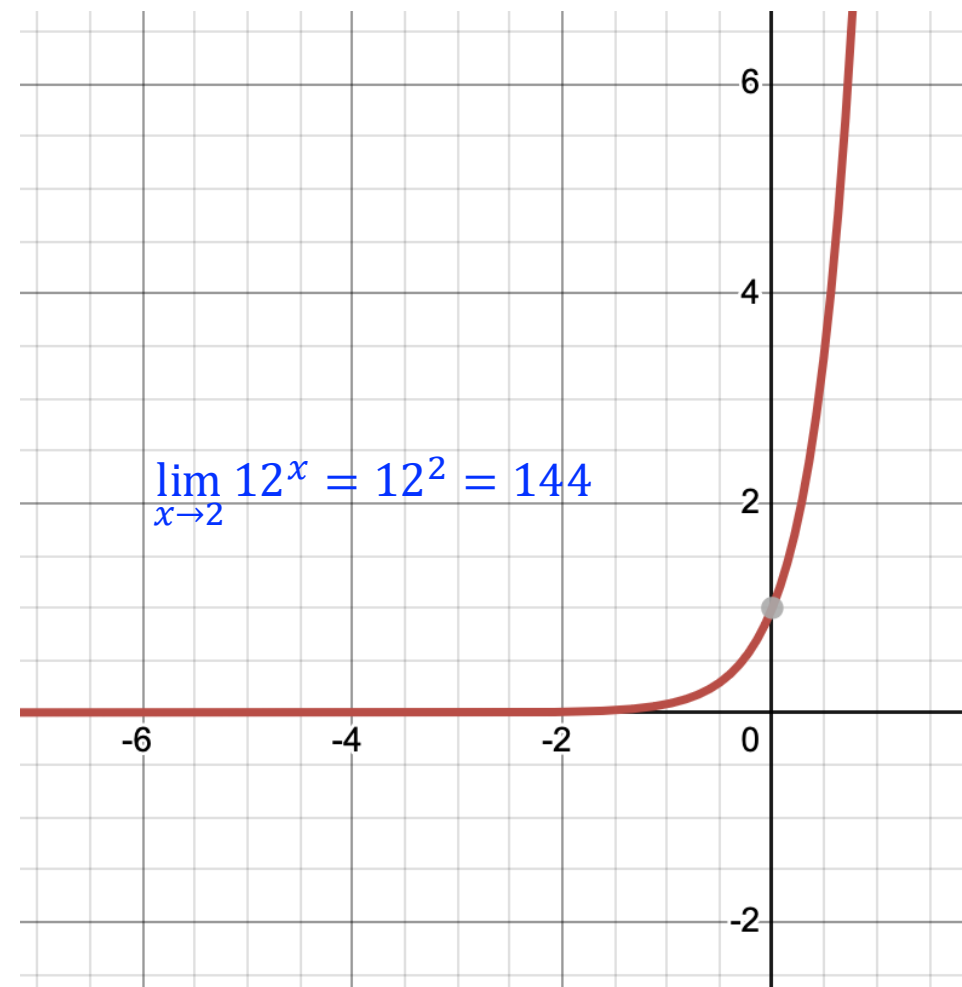
$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$$

$$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

→



Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari sono continue nei punti dove sono definite.

Continuità delle funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

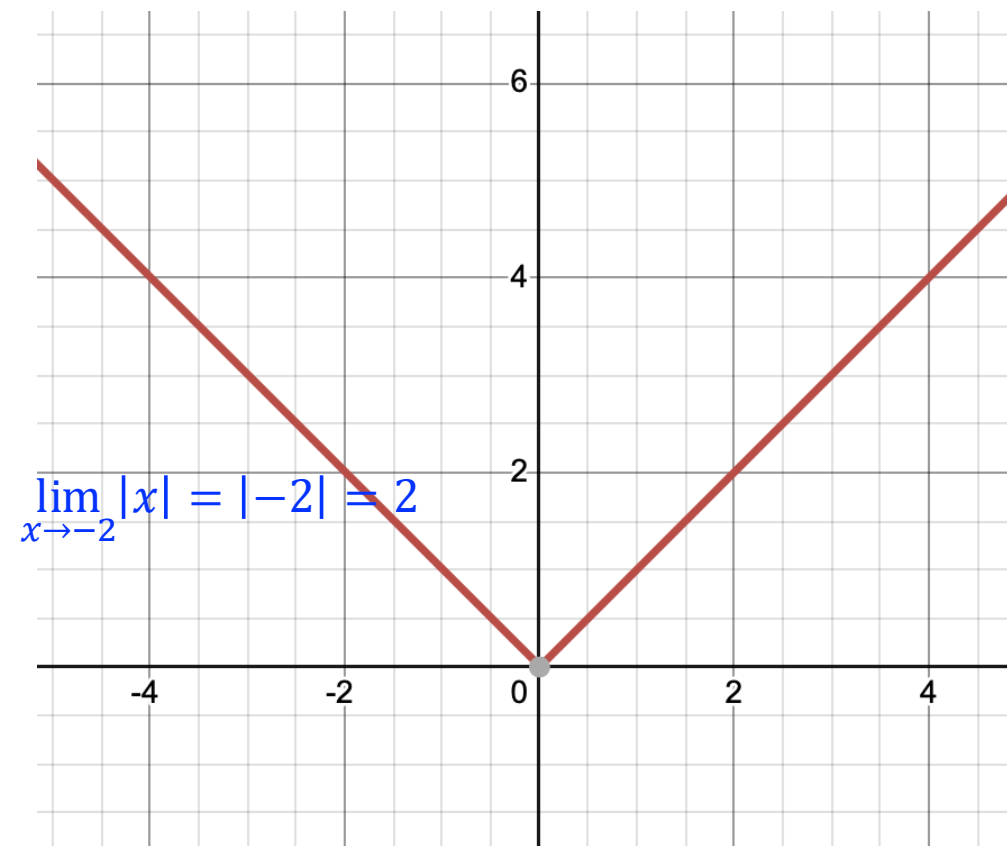
$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

→

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$$

$$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

→



Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari sono continue nei punti dove sono definite.

Continuità delle funzioni elementari

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

$$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

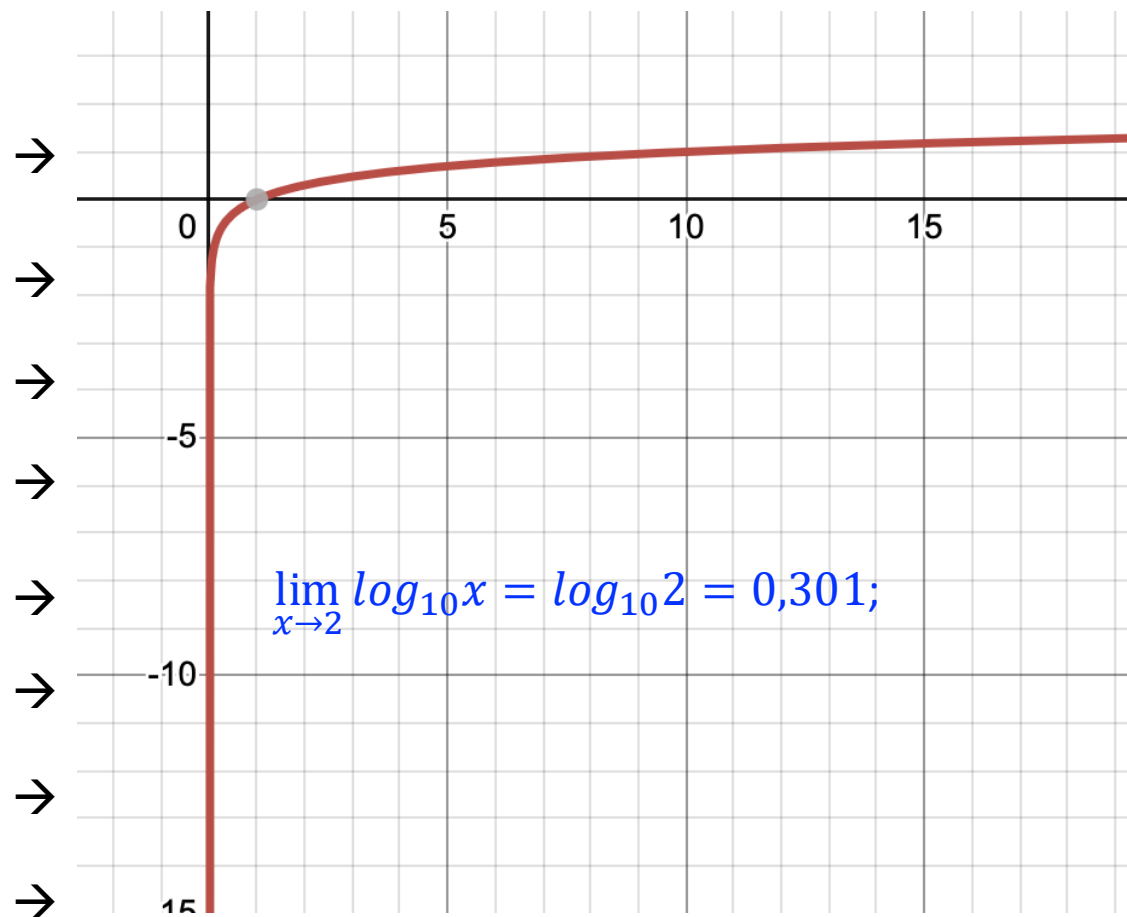
$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$$

$$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$



La continuità dalla destra e dalla sinistra

Una funzione $f(x)$ è:

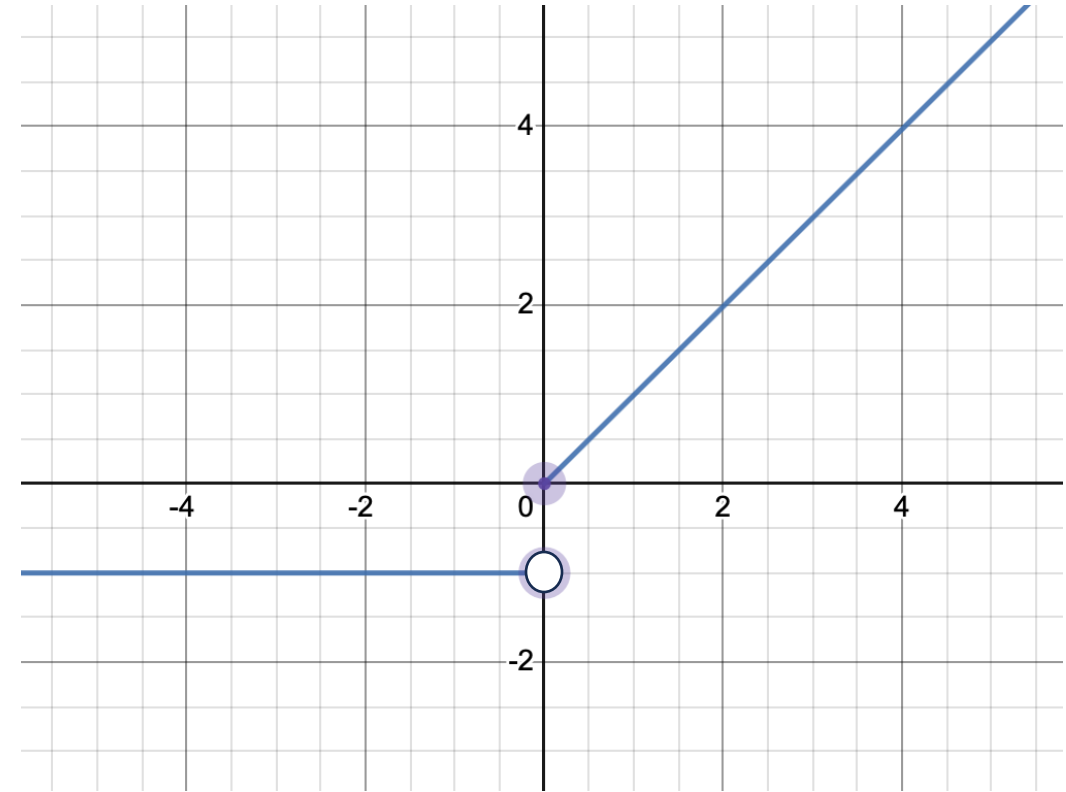
- continua dalla sinistra in $x = x_0^-$ se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- continua dalla destra in $x = x_0^+$ se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

ESEMPIO

La funzione $f(x)$ è:
$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

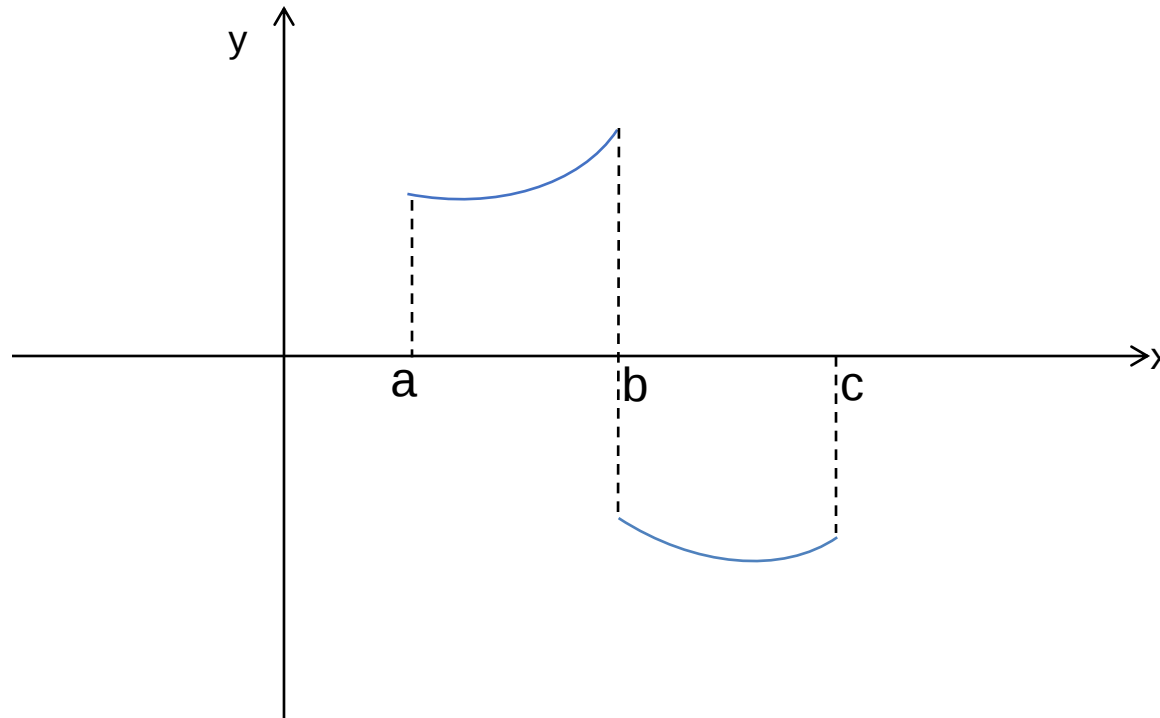
è continua dalla destra in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0)$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 \neq 0$ la funzione non è continua dalla sinistra e quindi non è continua in $x_0 = 0$.



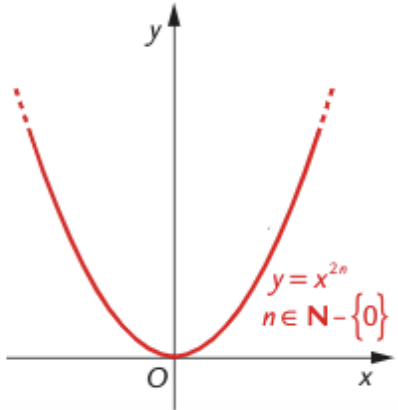
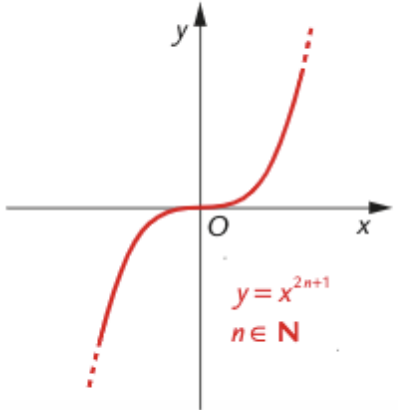
La continuità di un intervallo

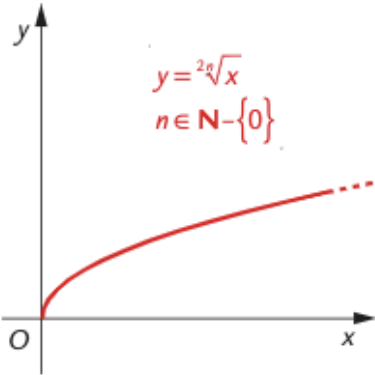
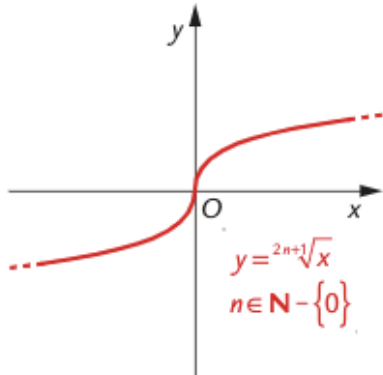
Diciamo che una funzione $f(x)$, definita in un intervallo $[a, b]$, è continua in $[a, b]$ se è continua in tutti i punti dell'intervallo e se è continua dalla destra in a e dalla sinistra in b .



La funzione è continua in $[a, b]$, è continua in $[b, c]$ ma non è continua in $[a, c]$ perché non lo è in b .

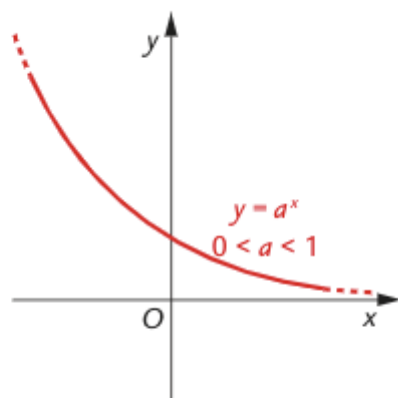
Continuità - Limiti delle funzioni elementari

Categoria	Grafici e limiti	
Funzioni potenza	 $y = x^{2n}$ $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty$	 $y = x^{2n+1}$ $n \in \mathbf{N}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty$

Categoria	Grafici e limiti	
Funzioni radice	 $y = \sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$	 $y = \sqrt[n]{x}$ $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

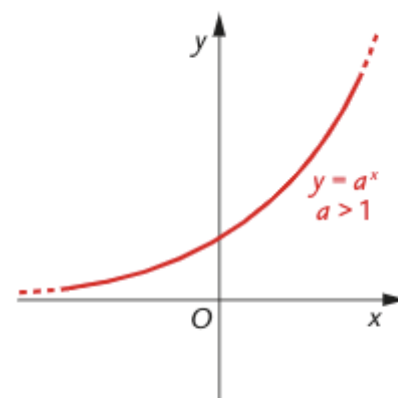
Limiti della funzioni elementari

Funzioni
esponenziali



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad \text{se } 0 < a < 1$$

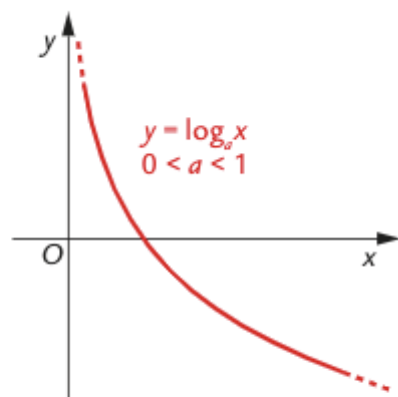
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad \text{se } 0 < a < 1$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{se } a > 1$$

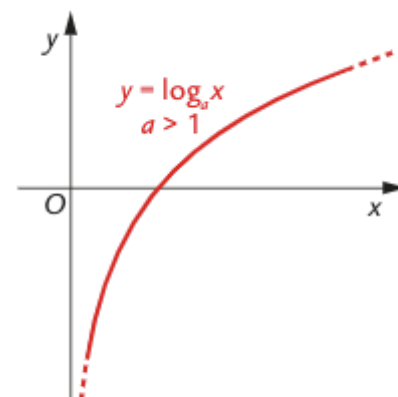
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad \text{se } a > 1$$

Funzioni
logaritmiche



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty \quad \text{se } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad \text{se } 0 < a < 1$$

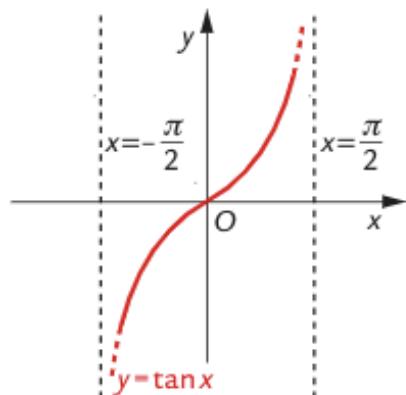


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty \quad \text{se } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{se } a > 1$$

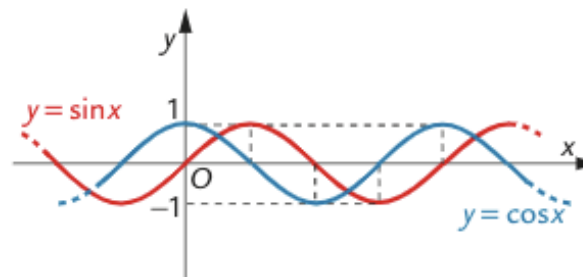
Limiti della funzioni elementari

Funzioni
goniometriche



$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$$

(Ci siamo limitati a considerare la funzione tangente in un intervallo di ampiezza uguale al suo periodo.)



Non esistono i limiti delle funzioni seno e coseno per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$

Algebra dei limiti

Algebra dei limiti