

Analisi matematica

LIMITI

FORME INDETERMINATE



Prof. Domenico Lo Iacono

Nel calcolo di limiti talvolta sostituendo si ottiene

$$+\infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Si chiamano: **FORME INDETERMINATE** o **FORME di INDECISIONE**

Per trovare la soluzione del limite devo
“TOGLIERE L’INDETERMINAZIONE”
con procedimenti che dipendono dai vari casi



Forma indeterminata

$$+\infty - \infty$$

Limiti funzioni polinomiali

NELLA SOMMA DI TERMINI CON INFINITO : SOMMO QUELLI + E QUELLI

$$+\infty - \infty - \mathbf{13} + \mathbf{70} = +\infty + \mathbf{70} - \infty - \mathbf{13} = +\infty - \infty$$

Esempio 1

$+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 + x - 4$$

Forma
indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 + x - 4 = (+\infty)^3 - 2(+\infty)^2 + \infty - 4 = +\infty - \infty - 4 = +\infty - \infty$$

RISOLUZIONE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) = \textit{passo al limite} +\infty^3 \left(1 - \frac{2}{+\infty} - \frac{1}{+\infty^2} + \frac{4}{+\infty^3} \right) =$$

$$+\infty \cdot (1 - 0 - 0 + 4) = +\infty \cdot 5 = +\infty$$

Esempio 2

$+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + 4x^2 + 3$$

Forma
indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + 4x^2 + 3 = 2(-\infty)^3 + 2(-\infty)^2 + 3 = -\infty + \infty + 3 = -\infty + \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 + \frac{4}{x} + \frac{0}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) = \textit{passo al limite} +\infty^3 \left(2 + \frac{4}{-\infty} + \frac{0}{-\infty^2} + \frac{3}{-\infty^3} \right) =$$

$$-\infty \cdot (2 - 0 - 0) = +\infty \cdot 2 = +\infty$$

Esempio 3

$+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 - 5x^2 - 3x + 10$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 - 5x^2 - 3x + 10 = -(-\infty)^4 - 5(-\infty)^2 - 3(-\infty) + 10 =$$

$$= -\infty - \infty + \infty + 10 = -\infty + \infty$$

Forma
indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 \left(1 + \frac{0}{x^3} + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{10}{x^4} \right) = \textit{passo al limite} =$$

$$= -(-\infty)^4 \left(1 + \frac{0}{x^3} + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{10}{x^4} \right) = -\infty \cdot (1 + 0 + 0 + 0 - 0) = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

Esempio 3

$+\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 4x^3 + 2$$

Forma
indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 4x^3 + 2 = (+\infty) - 4(+\infty)^3 + 2 = +\infty - \infty + 2 = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 4 + \frac{2}{x^3} \right) = \textit{passo al limite} = +\infty(0 - 4 + 0) = +\infty(-4) = -\infty$$

A

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -8x^5 - 2x^2 + 7$$

Sol A: $+\infty$

B

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} +2x^4 + 5x^2 + x + 3$$

Sol B: $+\infty$

$+\infty - \infty$

Calcola i limiti delle seguenti funzioni polinomiali.

209 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 48x - 100)$ $[+\infty]$

210 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x - 1)$ $[-\infty]$

211 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 5x^2 - 1)$ $[+\infty]$

212 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x^3 - 1)$ $[-\infty]$

213 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - 1 \right)$ $[+\infty]$

214 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(1 - \sqrt{2})x^3 - 5x^2 - 1]$ $[+\infty]$

215 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1)^2$ $[+\infty]$

216 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)^2$ $[+\infty]$

217 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x^2)^2$ $[+\infty]$

218 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)^3$ $[+\infty]$

219 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)^3$ $[-\infty]$

220 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)^3$ $[-\infty]$







2) Caso

Forma indeterminata

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Limiti funzioni polinomiali

Regola Pratica

Se grad Num. > grad Den. Risultato ∞

Se grad Num. = grad Den. Risultato l

Se grad Num. < grad Den. Risultato 0

Prima di procedere ricorda che...

SE DEVO SEMPLIFICARE FRAZIONI CON X AL Numeratore E Denominatore

$$\frac{2x^7}{3x^5}$$

$$\frac{4x^2}{x^5}$$

$$\frac{2x^7}{3x^5} = \frac{2x^2}{3}$$

$$\frac{4x^2}{x^5} = \frac{4}{x^3}$$

PREMESSA IMPORTANTE....

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 7}{x^2 - 2x} = \textit{scrivo subito} = \frac{\infty}{\infty}$$

Forma
 indeterminata

NON FARE CALCOLI (SONO INUTILI) SCRIVI SUBITO $\frac{\infty}{\infty}$

Esempio 1

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 7x - 4} = \frac{\infty}{\infty}$$

Forma
indeterminata

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{x^3 (5 + 0 - 0)}{x^2 (1 - 0 - 0)} = \frac{5x^3}{1x^2} = 5x = 5(+\infty) = +\infty$$

Esempio 2



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 3x^2 + 7}{5x^2 - 6x - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Forma
indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(9 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}{x^2 \left(5 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{x^2 (9 + 0 - 0)}{x^2 (5 - 0 - 0)} = \frac{9}{5}$$

Esempio 3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 4x^2 + 7}{-7x + 4 + 3x^5} = \frac{\infty}{\infty}$$

Forma
indeterminata

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{4}{x} + \frac{0}{x^2} - \frac{7}{x^3} \right)}{x^5 \left(\frac{-7}{x^4} + \frac{4}{x^5} + 3 \right)} = \frac{x^3 (2 + 0 + 0 - 0)}{x^5 (-0 - 0 + 3)} = \frac{2x^3}{3x^5} = \frac{2}{3x^2} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

A

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + x^2 + 5}{3x^5 - 2x + 1}$$

Sol A: $-\infty$

B

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 5x + 1}{-2 + 8x}$$

Sol B: $-\infty$

C

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^5 + 4x^2 - 5}{-5x^5 + 1}$$

$$\text{Sol C: } \frac{6}{-5}$$

D

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4 - 7x^3)}{x^3 + 2x}$$

$$\text{Sol D: } -7$$

E

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+4x^3 + x^2 - 1}{-9x^4 + 7}$$

Sol E: 0⁻

F

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(6x^3 + x + 1)}{-3x^5 + x - 2}$$

Sol F: 0⁻

Calcola i seguenti limiti, che si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\mathbf{221} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad [+\infty]$$

$$\mathbf{222} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x} \quad [2]$$

$$\mathbf{223} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^2}{2x + 1} \quad [+\infty]$$

$$\mathbf{224} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^3}{2x^4 + 1} \quad [0]$$

$$\mathbf{225} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{x} \quad [-\infty]$$

$$\mathbf{226} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} \quad [1]$$

$$\mathbf{227} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 6x + 5}{x + 4} \quad [-\infty]$$

$$\mathbf{228} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^4 - x^3 + 1}{5x^4 - x - 1} \quad [2]$$

$$\mathbf{229} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 6x + 5}{x^2 + 4} \quad [+\infty]$$

$$\mathbf{230} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - x + 1}{4x^2 - x - 1} \quad \left[\frac{3}{2}\right]$$

$$\mathbf{231} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 16}{5x^3 + 1} \quad [0]$$

$$\mathbf{232} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 6x + 5}{x + 4} \quad [+\infty]$$

$$\mathbf{233} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^5 + 4} \quad [0]$$

$$\mathbf{234} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 10x^2}{4x^2 - 1} \quad \left[-\frac{5}{2}\right]$$

$$\mathbf{235} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 1}{x + 3} - \frac{x}{x + 1} \right) \quad [2]$$

$$\mathbf{236} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{8x - 1}{2x + 3} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) \quad [4]$$

$$\mathbf{237} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 3} - \frac{x}{x + 1} \right) \quad [+\infty]$$

$$\mathbf{238} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 1}{x + 4} - \frac{x^2}{x + 1} \right) \quad [-\infty]$$

$$\mathbf{239} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 4} - \frac{x^2}{x + 1} \right) \quad [-3]$$

$$\mathbf{240} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{4x^2}{2x + 1} \right) \quad [-\infty]$$

$$\mathbf{241} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 3} - \frac{x^2}{x - 2} \right) \quad [-5]$$

$$\mathbf{242} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1)^2}{x + 4} \quad [+\infty]$$

$$\mathbf{243} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1)^2}{(4x - 1)^2} \quad \left[\frac{1}{4} \right]$$

$$\mathbf{244} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - x^3)^2}{(x^2 + 1)^3} \quad [1]$$

$$\mathbf{245} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - 4x^3)^2}{(2x^2 + 1)^3} \quad [2]$$



3) Caso

Forma indeterminata

$$\frac{0}{0}$$

**Per togliere la forma indeterminata
Devo scomporre Numeratore e Denominatore**

Forma indeterminata

$\frac{0}{0}$

RACCOGLIMENTO TOTALE di un fattore comune a tutti i termini

$$ax + bx + cx = x \cdot (a + b + c)$$

RACCOGLIMENTO PARZIALE (raccolgo a coppie il fattor comune)

$$ax + bx + ay + by = x \cdot (a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

DIFFERENZA DI DUE QUADRATI (prodotto notevole)

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

TRINOMIO SVILUPPO DEL QUADRATO DI BINOMIO (prod. notevole)

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

TRINOMIO DI SECONDO GRADO con Delta maggiore o uguale a zero

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Esempio 1

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16} = \frac{0}{0}$$

Forma
indeterminata

0
0

Scomponiamo
numeratore e
denominatore

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)(x - 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 4)}{(x - 4)} = \frac{8}{0} = \infty$$

Esempio 2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Forma
indeterminata

0
0

Scomponiamo
numeratore e
denominatore

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 4)}{(x + 1)} = \frac{5}{2}$$

Esempio 3

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Forma
indeterminata

0
0

Scomponiamo
numeratore e
denominatore

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 2)}{(x - 1)} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Esempio 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{0}{0}$$

Forma
indeterminata

0
—
0

Scomponiamo
numeratore e
denominatore

$$\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (2+x)}{(2+x)2} = \frac{2 - 2 - x}{(2+x)2} = \frac{-x}{(2+x)2}$$

x

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{(2+x)2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(2+x)2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(2+x)2} = \frac{-1}{4}$$



Calcola i seguenti limiti, che si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

$$\mathbf{248} \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x - 12}{36 - x^2} \quad \left[-\frac{1}{6} \right]$$

$$\mathbf{249} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16} \quad \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\mathbf{250} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x + 6}{3x^2 - 18} \quad [0]$$

$$\mathbf{251} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{50 - 2x^2}{x^2 - 5x} \quad [-4]$$

$$\mathbf{252} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 2x + 1} \quad [-\infty]$$

$$\mathbf{253} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{2x + 4} \quad \left[-\frac{3}{2} \right]$$

$$\mathbf{254} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} \quad [2]$$

$$\mathbf{255} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - x^3}{x - 2} \quad [-8]$$

$$\mathbf{256} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4} \quad [\infty]$$

$$\mathbf{257} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{9 - x^2}{x^2 + 3x} \quad [-2]$$

$$\mathbf{258} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 8x + 16} \quad [\infty]$$

$$\mathbf{259} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{x - 9} \quad [18]$$

$$\mathbf{260} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \quad [4]$$

$$\mathbf{261} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} \quad \left[\frac{3}{2} \right]$$

Esercizi

$$\mathbf{262} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} \quad \left[-\frac{1}{4} \right]$$

$$\mathbf{263} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+1)^2} - 1}{x} \quad [-2]$$

$$\mathbf{264} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3} \quad \left[\frac{5}{4} \right]$$

$$\mathbf{265} \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 25x}{x - 5} \quad [50]$$

$$\mathbf{266} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x^2 + 2x} \quad [2]$$

$$\mathbf{267} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4x - 12} \quad [0]$$

$$\mathbf{268} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x^6}{x^5 - x^4} \quad [1]$$

$$\mathbf{269} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 2x} \quad [16]$$

$$\mathbf{270} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x^3 + x^4}{4x^2 - x^4 - x^6} \quad \left[\frac{3}{4} \right]$$

$$\mathbf{271} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 10x^5}{4x + x^2 + 5x^3} \quad [0]$$

$$\mathbf{272} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3x + 1} \quad [2]$$

$$\mathbf{273} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \quad \left[\frac{2}{3} \right]$$

$$\mathbf{274} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 1} \quad \left[\frac{5}{3} \right]$$

