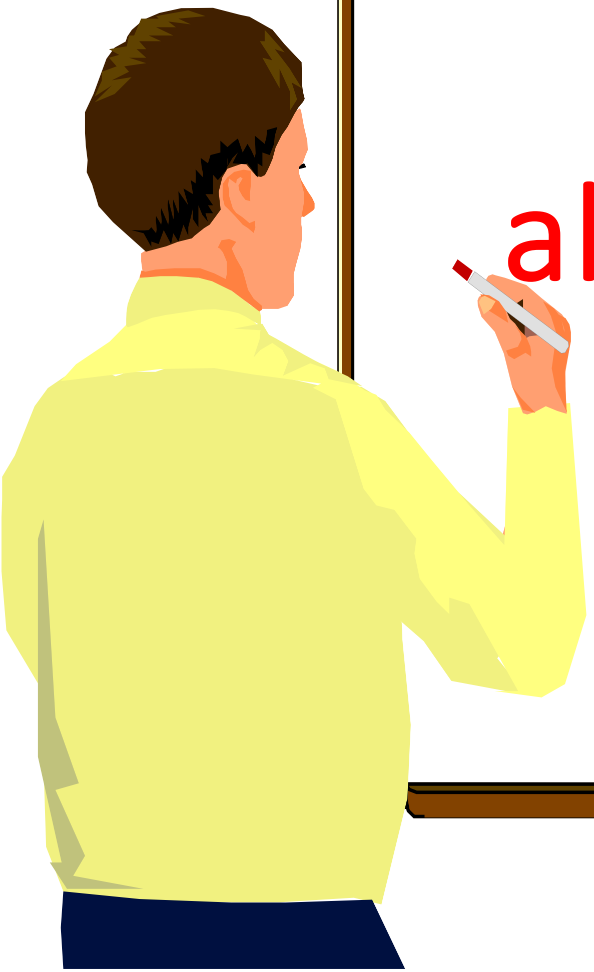
Mathematiké tèkne



Analisi matematica

Continuità e algebra dei limiti

Prof. Domenico Lo Iacono

Mathematiké

tèkne

Funzioni continue

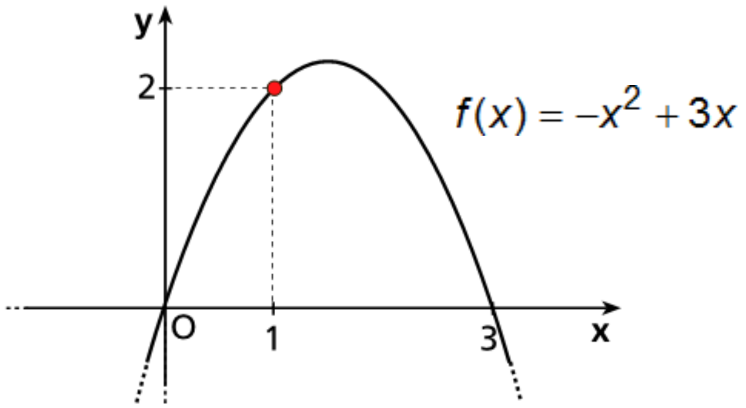
Algebra dei limiti

Esercizi

Funzioni continue

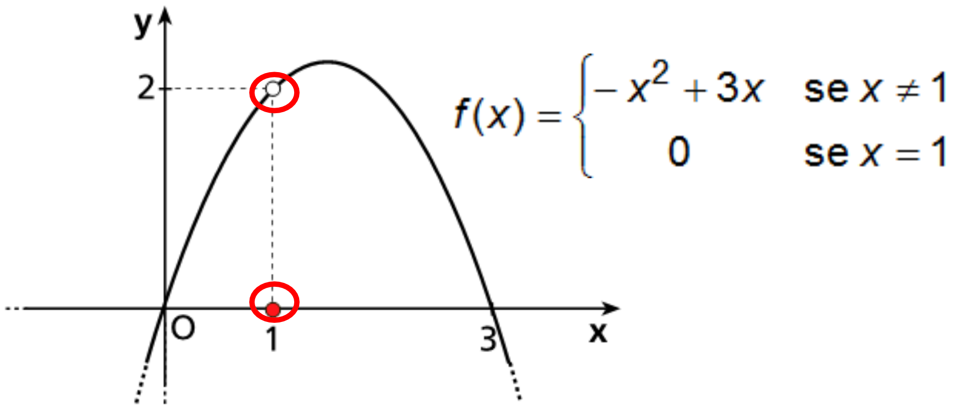
Funzioni continue

Osserviamo le seguenti figure



Le due funzioni hanno lo stesso limite per x che tende a $x_0 = 1$.

Il valore del limite è $l = 2$.



Nel primo caso il valore del limite coincide con quello della funzione in x_0: $f(x_0) = l$.

Nel secondo caso il valore di f non coincide con quello del limite.

La prima funzione è **continua** in $x = 1$, la seconda è **discontinua**.

Sia $\boldsymbol{f}$ una funzione definita in un intorno (completo) di $\boldsymbol{x_0}$;

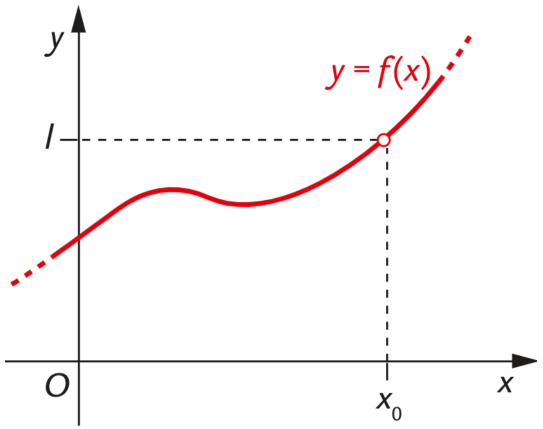
se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, la $\boldsymbol{f}$ si dice continua in $\boldsymbol{x_0}$

la $\boldsymbol{f}$ si dice continua in $\boldsymbol{x_0}$

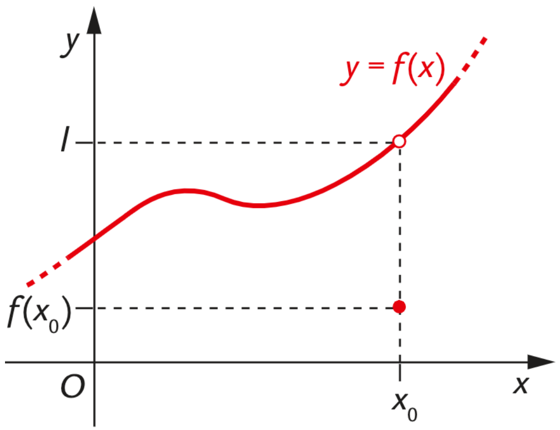
Mathematiké tèkne

Funzioni continue

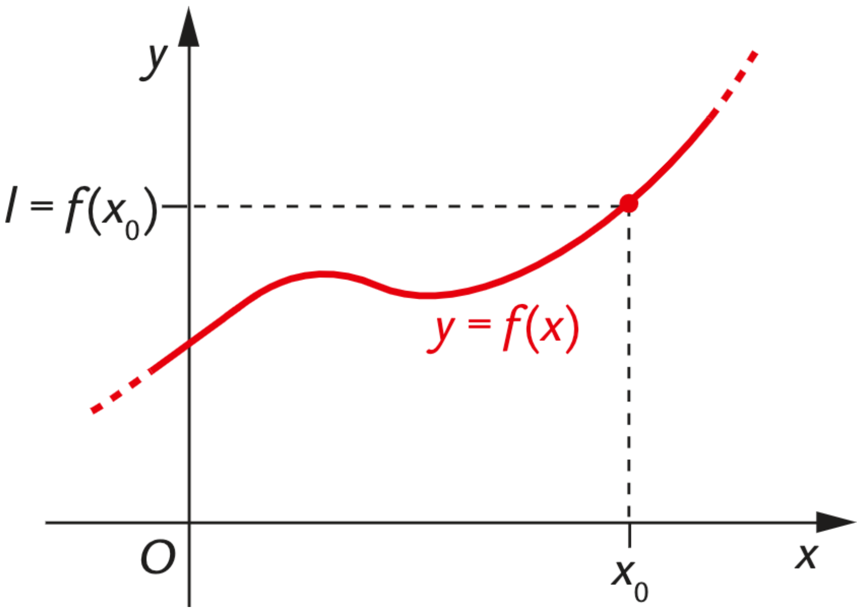
Osserviamo le seguenti figure



- La funzione non è definita in x_0
- Esiste a dx e a sx il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$
- $f(x_0) \neq l$



- La funzione è definita in x_0
- Il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$



- La funzione è definita in x_0
- Esiste il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l = f(x_0)$
- $f(x_0) = l$

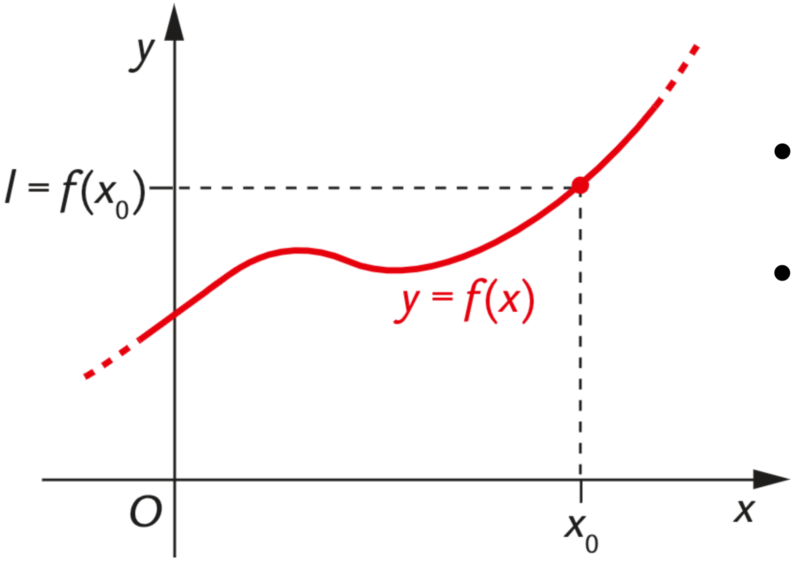
il caso in cui $f(x_0) = l$ è particolarmente importante.

Sia $\boldsymbol{f}$ una funzione definita in un intorno (completo) di $\boldsymbol{x_0}$;

se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, la $\boldsymbol{f}$ si dice continua in $\boldsymbol{x_0}$

la $\boldsymbol{f}$ si dice continua in $\boldsymbol{x_0}$

Funzioni continue



- La funzione è definita in x_0
- Esiste il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definizione di Funzioni continue

Sia $\boldsymbol{f}$ una funzione definita in un intorno (completo) di $\boldsymbol{x_0}$;

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, la $\boldsymbol{f}$ si dice continua in $\boldsymbol{x_0}$

la $\boldsymbol{f}$ si dice continua in $\boldsymbol{x_0}$

Funzioni continue

ESEMPI

1. $y = 5x^2 - 3x + 2$, che ha come dominio R, è continua in ogni punto di R in quanto somma di funzioni continue.

2. $y = 3x\cos x$, che ha come dominio R , è continua in ogni punto di R in quanto prodotto di funzioni continue.

3. $y = \dfrac{3x^2 + 4}{x - 1}$, è continua nel dominio $R - \{1\}$ in quanto quoziente di funzioni continue.

4. $y = e^{x^2 - 3x}$, è continua nel dominio R in quanto funzione composta dalle due funzioni continue $x^2 - 3x$ ed e^x .

Funzioni continue

Funzioni continue

Verifichiamo che la funzione $f(x) = 2x^4 - 3$ è continua in $x_0 = 2$.

La funzione ha come dominio R ed è quindi definita in un intorno del punto 2.

Calcoliamo $f(x_0)$: $f(2) = 29$

Calcoliamo $\lim_{x \to x_0} f(x)$: $\lim_{x \to 2} (2x^4 - 3) = 29$

Avendo trovato due valori uguali, la funzione è continua.

Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (cioè le funzioni potenza, la funzione valore assoluto, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni goniometriche) sono continue nei punti dove sono definite.

Continuità delle funzioni elementari			
$\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$	→	Potenza
$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$	→	Radicale
$\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$	→	Esponenziale
$\lim\limits_{x \to x_0} \lvert x \rvert = \lvert x_0 \rvert$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$	→	Valore assoluto
$\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$	$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$	→	Logaritmo
$\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$	→	Sinusoide
$\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$	→	Cosinusoide
$\lim\limits_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$	$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	→	Tangente

Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (cioè le funzioni potenza, la funzione valore assoluto, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni goniometriche) sono continue nei punti dove sono definite.

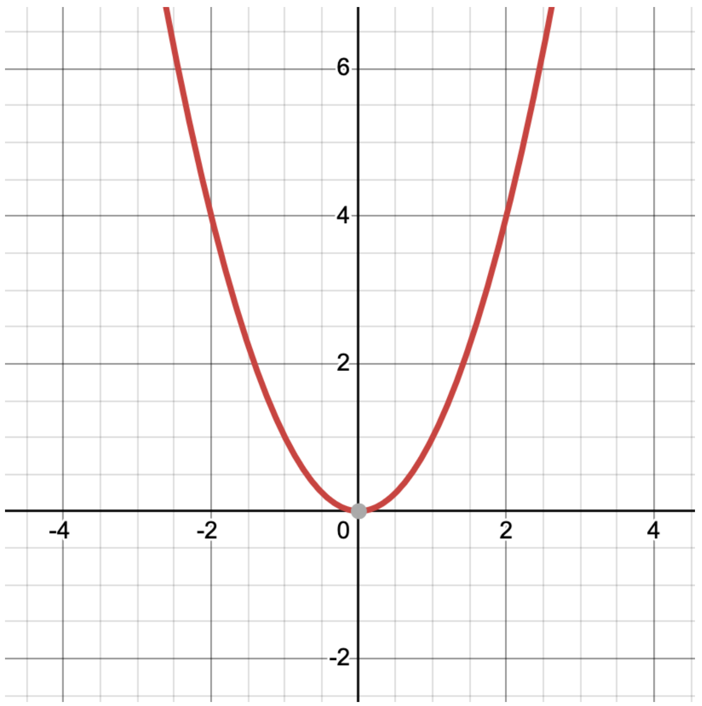
Continuità delle funzioni elementari			
$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$	$\lim_{x\to 2} x^4 = 2^4 = 16$
$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$	$\rightarrow$	$\lim_{x\to 5} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{5}$; $\lim_{x\to 9} \sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{9} = 3$
$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$	$\lim_{x\to 2} 12^x = 12^2 = 144$
$\lim_{x\to x_0} \lvert x\rvert = \lvert x_0\rvert$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$	$\lim_{x\to -2} \lvert x\rvert = \lvert -2\rvert = 2$
$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$	$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$	$\rightarrow$	$\lim_{x\to 2} log_{10}x = log_{10}2 = 0{,}301$; $\lim_{x\to 2} \ln x = \ln 2 = 0{,}69$
$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$	
$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$	
$\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$	$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\rightarrow$	

Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (cioè le funzioni potenza, la funzione valore assoluto, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni goniometriche) sono continue nei punti dove sono definite.

	Continuità delle funzioni elementari
$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$
$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \lvert x\rvert = \lvert x_0\rvert$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$	$\forall x_0 > 0, \forall a > 0$, con $a \neq 1$
$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$	$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\lim_{x\to 2} x^4 = 2^4 = 16$$

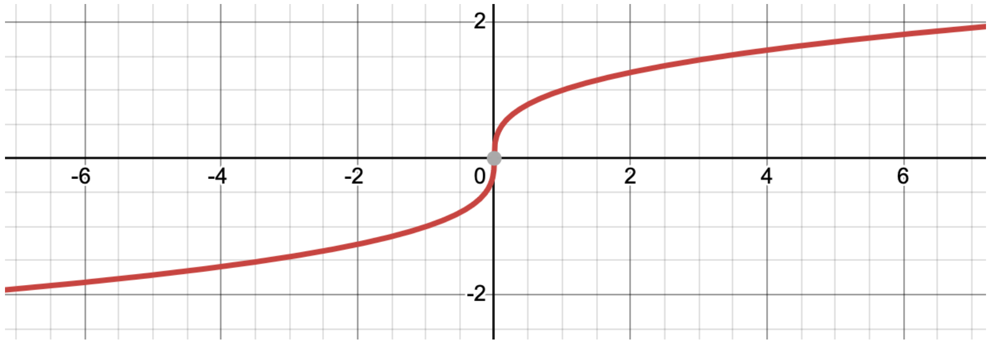


Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (cioè le funzioni potenza, la funzione valore assoluto, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni goniometriche) sono continue nei punti dove sono definite.

	Continuità delle funzioni elementari	
$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$
$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$	$\rightarrow$
$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$
$\lim_{x \to x_0} \lvert x \rvert = \lvert x_0 \rvert$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$
$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$	$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$	$\rightarrow$
$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$
$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$	$\rightarrow$
$\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$	$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\rightarrow$

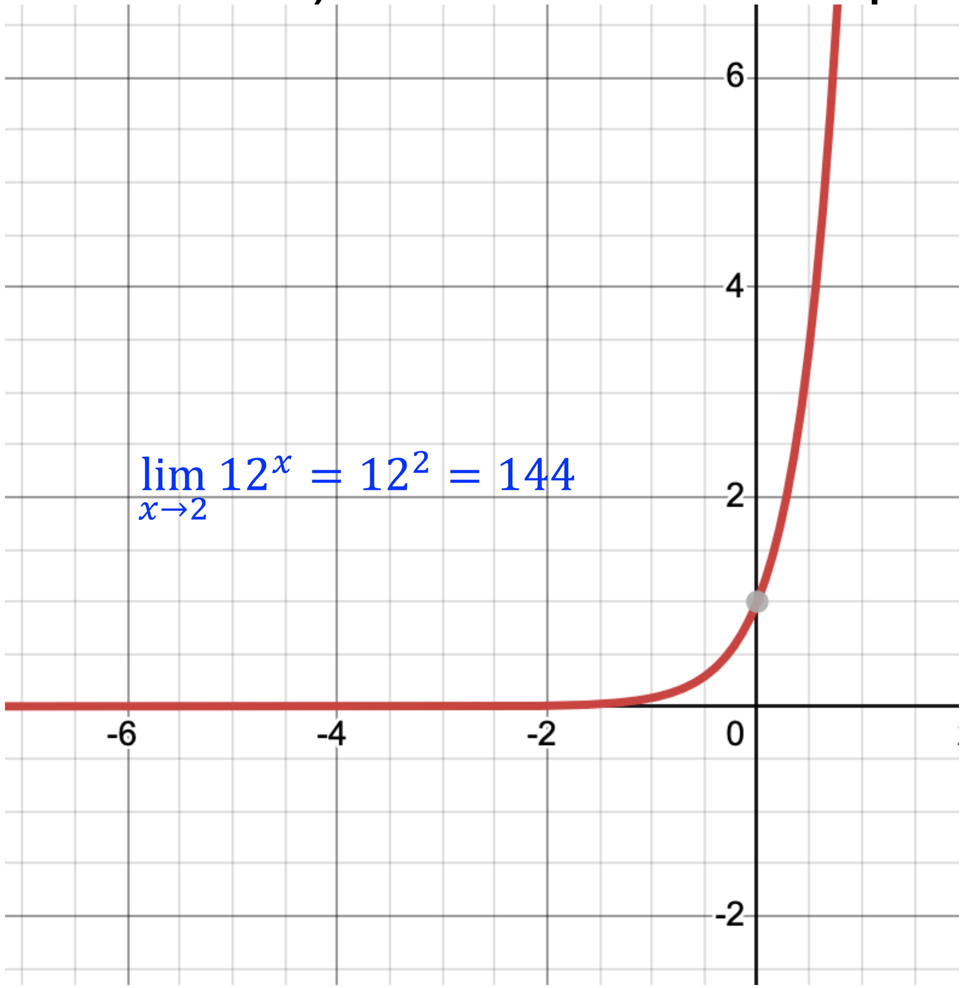
$$\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{5} \quad ;$$



Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (cioè le funzioni potenza, la funzione valore assoluto, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni goniometriche) sono continue nei punti dove sono definite.

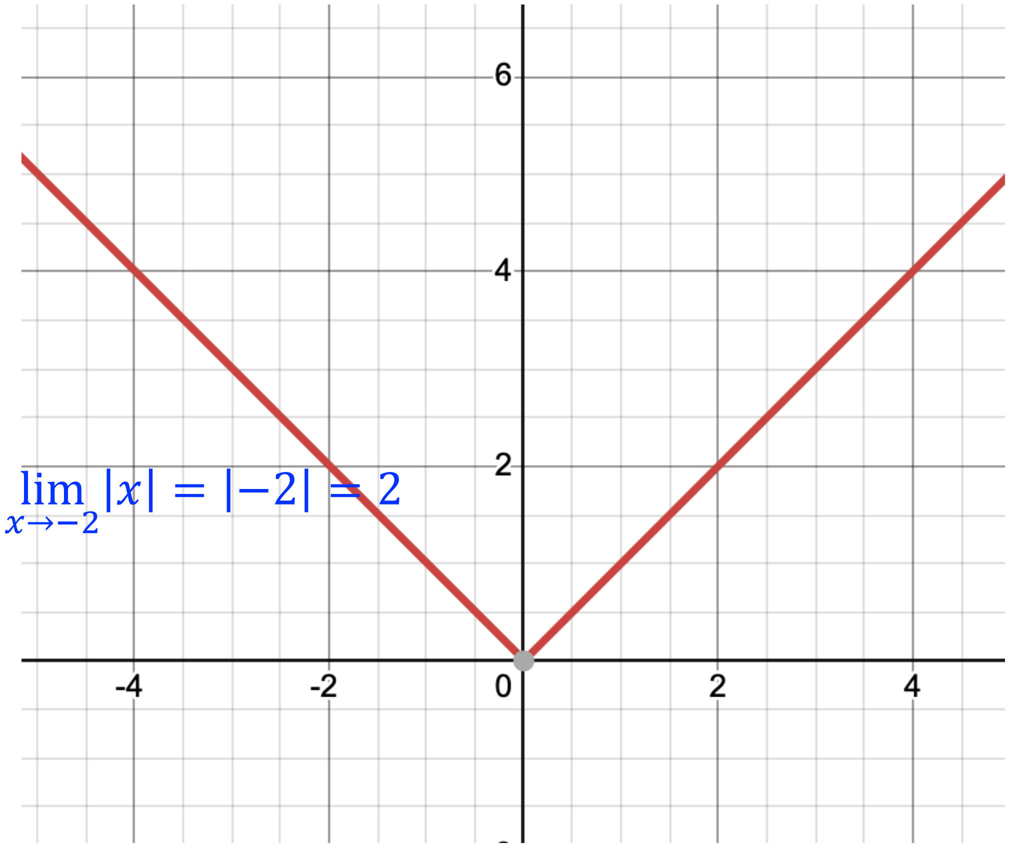
Continuità delle funzioni elementari	
$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$
$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x \to x_0} \lvert x \rvert = \lvert x_0 \rvert$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$	$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$
$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$	$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$



Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (cioè le funzioni potenza, la funzione valore assoluto, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni goniometriche) sono continue nei punti dove sono definite.

	Continuità delle funzioni elementari
$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$
$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \lvert x\rvert = \lvert x_0\rvert$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$	$\forall x_0 > 0, \forall a > 0, \text{ con } a \neq 1$
$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$
$\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$	$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

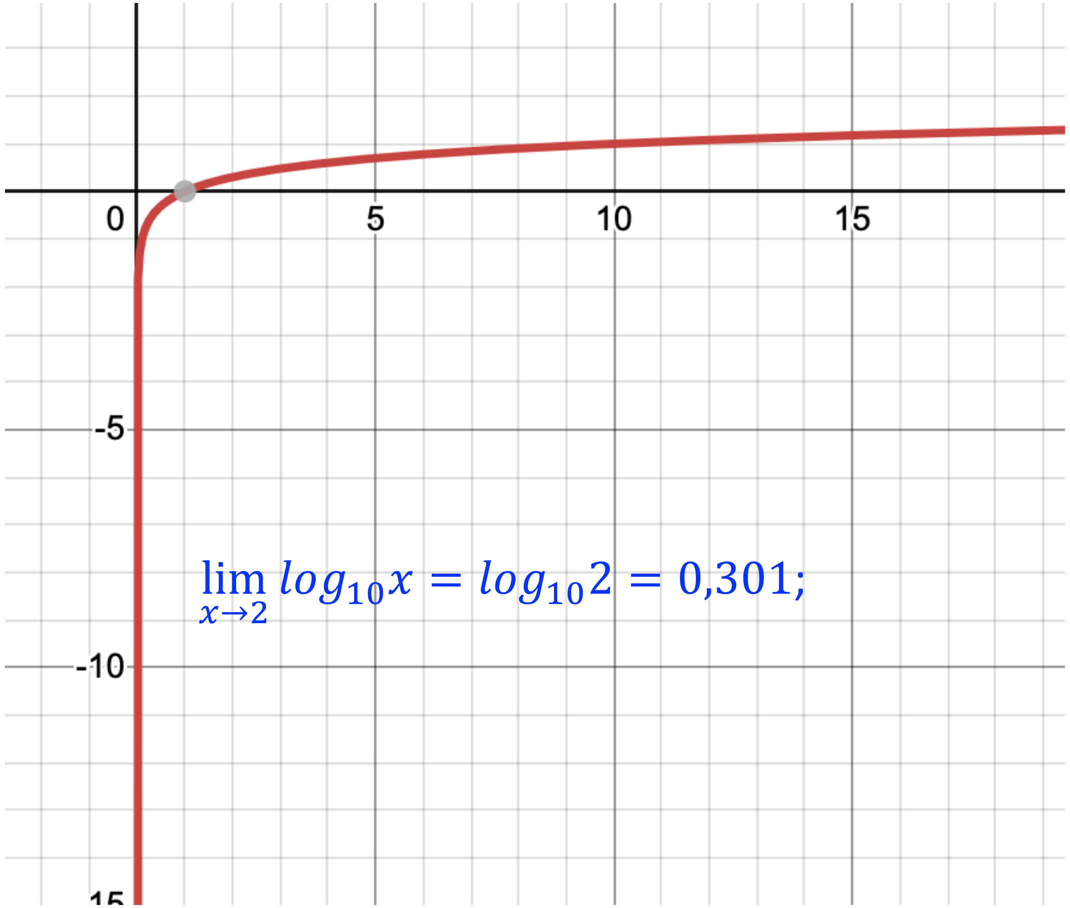


Mathematiké tèkne

Funzioni continue

Tutte le funzioni elementari (cioè le funzioni potenza, la funzione valore assoluto, le funzioni esponenziali e logaritmiche, le funzioni goniometriche) sono continue nei punti dove sono definite.

Continuità delle funzioni elementari	
$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$ →
$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$	$\forall n \in \mathbf{N} - \{0\}, \begin{cases} \forall x_0 \in \mathbf{R} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \forall x_0 \geq 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ →
$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\forall a > 0, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}$ →
$\lim_{x \to x_0} \lvert x \rvert = \lvert x_0 \rvert$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$ →
$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$	$\forall x_0 > 0, \forall a > 0$, con $a \neq 1$ →
$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$ →
$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$	$\forall x_0 \in \mathbf{R}$ →
$\lim_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$	$\forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ →

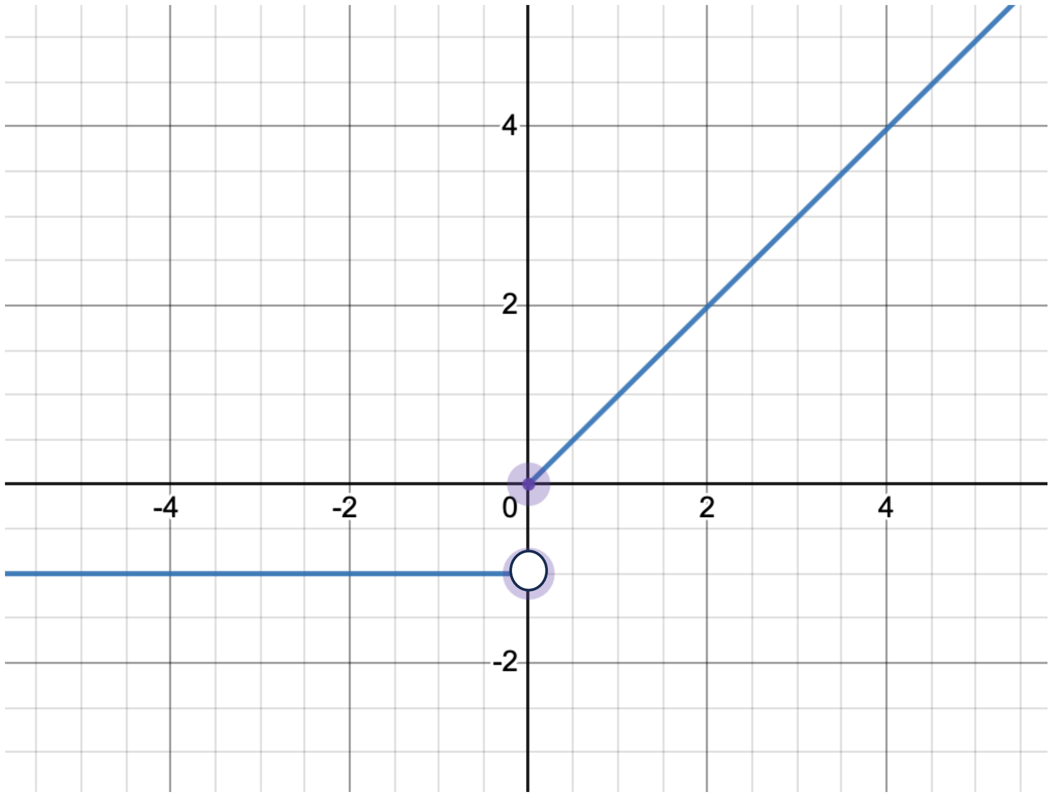


$$\lim_{x \to 2} log_{10} x = log_{10} 2 = 0{,}301;$$

La continuità dalla destra e dalla sinistra

Una funzione $f(x)$ è:

- **continua dalla sinistra in $x = x_0^-$** se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- **continua dalla destra in $x = x_0^+$** se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$



ESEMPIO

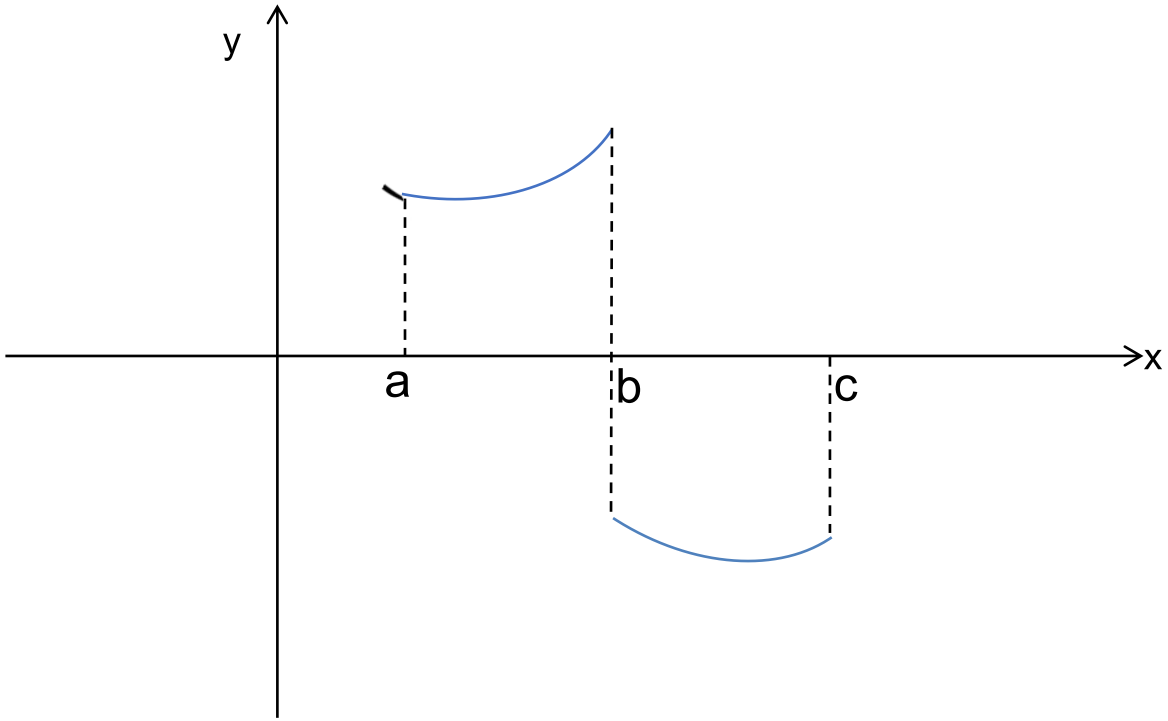
La funzione $f(x)$ è: $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

è continua dalla destra in $x_0 = 0$ perché $\lim_{x \to 0^+} x = 0 = f(0)$

Poiché $\lim_{x \to 0^-} -1 = -1 \neq 0$ la funzione non è continua dalla sinistra e quindi non è continua in $x_0 = 0$.

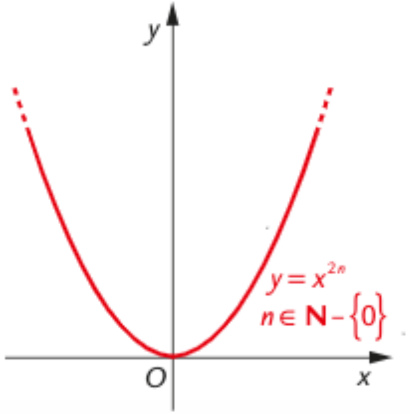
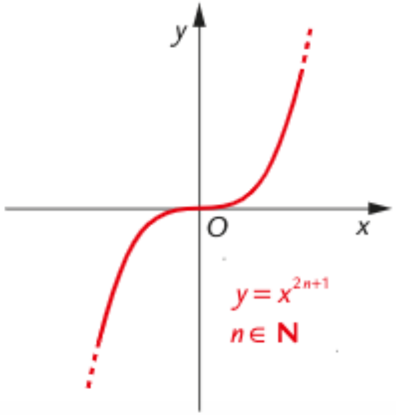
La continuità di un intervallo

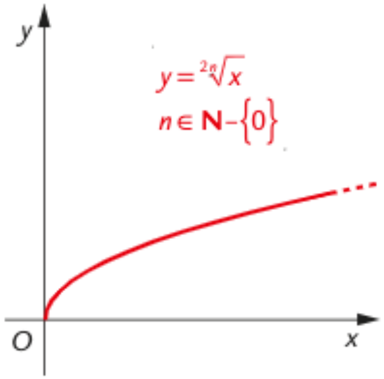
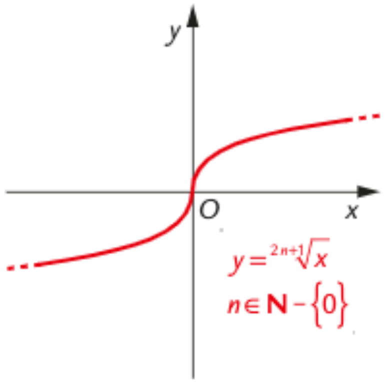
Diciamo che una funzione $f(x)$, definita in un intervallo $[a,b]$, è continua in $[a,b]$ se è continua in tutti i punti dell'intervallo e se è continua dalla destra in a e dalla sinistra in b.



La funzione è continua in $[a,b]$, è continua in $[b,c]$ ma non è continua in $[a,c]$ perché non lo è in b.

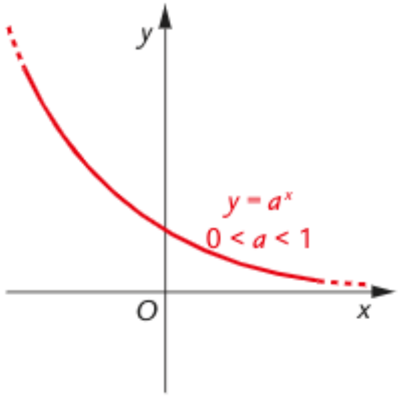
Continuità - Limiti delle funzioni elementari

Categoria	Grafici e limiti	
Funzioni potenza	 $\lim_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^{2n} = +\infty$	 $\lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^{2n+1} = +\infty$

Categoria	Grafici e limiti	
Funzioni radice	 $\lim_{x\to0^+} \sqrt[2n]{x} = 0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[2n]{x} = +\infty$	 $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[2n+1]{x} = -\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[2n+1]{x} = +\infty$

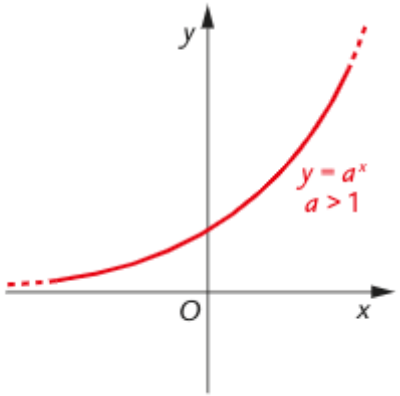
Limiti della funzioni elementari

Funzioni esponenziali



$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$

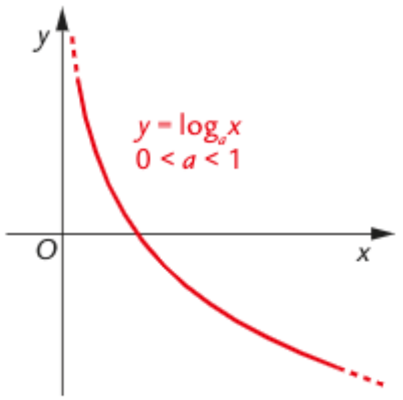
$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ se $0 < a < 1$



$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ se $a > 1$

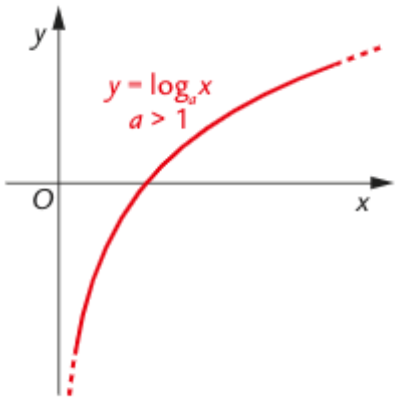
$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$

Funzioni logaritmiche



$\lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$ se $0 < a < 1$

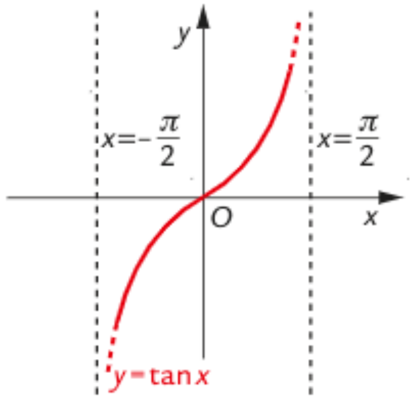
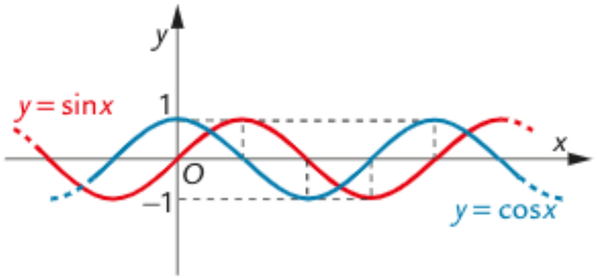
$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ se $0 < a < 1$



$\lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$ se $a > 1$

$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ se $a > 1$

Limiti della funzioni elementari

Funzioni goniometriche	 $\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$ (Ci siamo limitati a considerare la funzione tangente in un intervallo di ampiezza uguale al suo periodo.)	 Non esistono i limiti delle funzioni seno e coseno per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$

Algebra dei limiti

Algebra dei limiti

Limiti di funzioni più complicate → Risoluzione $\begin{cases} \text{limiti delle funzioni elementari} \\ \\ \text{operazioni elementari} \end{cases}$

↓

addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione
potenze.

Se due funzioni $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ hanno limiti finiti per $\boldsymbol{x \to x_0}$, l'operazione di limite si comporta «bene» rispetto alle ordinarie operazioni.

Mathematiké tèkne

Limite della somma

Teorema

Siano: $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ due funzioni definite in un intorno di x_0

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = l_2$$

Con l_1 ed $l_2 \in R$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$$

Mathematiké
tèkne

Limite prodotto per un numero

Teorema

Siano: $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ due funzioni definite in un intorno di x_0

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = l$$

Con $l \in R$;

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = k \cdot l \qquad k \in R$$

Mathematikè
tèkne

Mathematiké

tèkne

Limite prodotto = prodotto dei limiti

Teorema

Siano: $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ due funzioni definite in un intorno di x_0

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = l_1 \qquad \lim_{x\to x_0} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = l_2$$

Con l_1 ed $l_2 \in R$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$$

Mathematiké

tèkne

Limite della potenza

Teorema

Siano: $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ due funzioni definite in un intorno di x_0

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = l_2$$

Con l_1 ed $l_2 \in R$; $x_0 \in R$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^n = l^n$$

Mathematiké

tèkne

Limite divisione = divisione dei limiti

Teorema

Siano: $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ due funzioni definite in un intorno di x_0

$$\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = l_2$$

Con l_1 ed $l_2 \in R$; $x_0 \in R$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})} = \frac{\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\lim_{x \to x_0} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})} = \frac{l_1}{l_2}$$

Mathematiké
tèkne

Algebra dei limiti

Limite funzione reciproca

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f(x)} = l. \qquad l \neq 0, \qquad \longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \frac{1}{l}$$

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f(x)} = +\infty \;\; o \lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f(x)} = -\infty \qquad \longrightarrow . \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \;\; 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \boldsymbol{f(x)} = 0. \qquad \longrightarrow . \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$$

- $\lim_{x\to x_0} (f(x))^n = l_1^n \qquad \forall n \in N - \{0\}$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_1.} \qquad l_1 \neq 0$

Algebra dei limiti. - ESEMPI

- $\lim\limits_{x\to 2} x^3 + x^2 = \lim\limits_{x\to 2} x^3 + \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 8 + 4 = 12$

- $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x \cdot \cos x) = \lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 0 \cdot 1 = 0$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} \ln x}{\lim\limits_{x\to 1} x^2} = \frac{\ln 1}{1^2} = \frac{0}{1} = 0$

Conseguenze del teorema

Se f e g sono due funzioni continue in x_0,

Allora:

$$\begin{cases} f+g \\ f\cdot g \\ \dfrac{f}{g} \qquad g(x_0)\neq 0 \end{cases}$$

sono continue in x_0

Mathematiké ML tèkne

Algebra dei limiti

Regole di calcolo nel caso in cui uno dei due limiti sia infinito

Tabella 6.3 Regole per la somma.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ **è:**	**e** $\lim_{x\to x_0} g(x)$ **è:**	**allora** $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ **è:**
$l \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$l \in \mathbf{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Algebra dei limiti

Regole di calcolo nel caso in cui uno dei due limiti sia infinito

Tabella 6.4 Regole per il prodotto.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ **è:**	**e** $\lim_{x\to x_0} g(x)$ **è:**	**allora** $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x))$ **è:**
$l \in \mathbb{R}$, con $l \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ secondo la regola dei segni
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ secondo la regola dei segni

Mathematiké tèkne

Algebra dei limiti

Regole di calcolo nel caso in cui uno dei due limiti sia infinito

Tabella 6.5 Regole per il quoziente.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ è:	e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ è:	allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ è:
$l \in \mathbf{R}$	$\pm\infty$	0
$l \in \mathbf{R}$, con $l \neq 0$	0	$\pm\infty$ secondo la regola dei segni
$\pm\infty$	$l \in \mathbf{R}$	$\pm\infty$ secondo la regola dei segni

Algebra dei limiti

Esempi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\underbrace{\boxed{x^5}}_{\to+\infty}}=0^+$$

Ricorda che $\dfrac{l}{\pm\infty}\to 0^{\pm}$ secondo la regola dei segni, quindi $\dfrac{1}{+\infty}\to 0^+$

$$\lim_{x\to1^+}\left(\underbrace{x}_{\to 1 \text{ per continuità}}+\frac{1}{\underbrace{\boxed{x-1}}_{\to 0^+}}\right)=+\infty$$

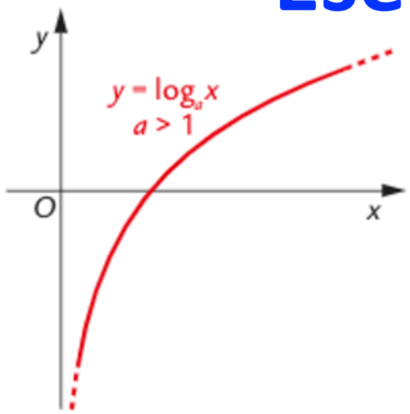
Ricorda che $\dfrac{1}{0^+}\to+\infty$ e $l+\infty\to+\infty$

Algebra dei limiti

Esempi

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{\ln x}_{\substack{\to -\infty \\ \text{tab. 6.2}}} - \frac{1}{\underbrace{\boxed{x}}_{\to 0^+}}\right) = -\infty$$

Ricorda che $\frac{1}{0^+} \to +\infty$ e $-\infty - \infty \to -\infty$



$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ se $a > 1$

$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$ se $a > 1$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\underbrace{(x^2-1)}_{\substack{\to -1 \text{ per} \\ \text{continuità}}} \cdot \underbrace{\ln x}_{\substack{\to -\infty \\ \text{tab. 6.2}}}\right] = +\infty$$

Ricorda che $l \cdot (\pm\infty) \to \pm\infty$ secondo la regola dei segni, quindi $(-1)(-\infty) \to +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{\to +\infty} = +\infty$$

Ricorda che $(+\infty) \cdot (+\infty) \to +\infty$

Algebra dei limiti

Esempi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{\cos x}^{\to 1 \text{ per continuità}}}{\underbrace{x}_{\to 0^- \text{ per continuità}}} = -\infty$$

Ricorda che $\frac{l}{0^\pm} \to \pm\infty$, con $l \neq 0$, secondo la regola dei segni, quindi $\frac{1}{0^-} \to -\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x}^{\to 0^+ \text{ per continuità}}}{\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}} = 0^-$$

Ricorda che $\frac{l}{\pm\infty} \to 0^\pm$ secondo la regola dei segni, quindi $\frac{0^+}{-\infty} \to 0^-$

Esercizi

Algebra dei limiti

52 Quanto vale $\lim_{x \to 2} x^3$?

A 2 B 4 C 6 D 8

53 Quanto vale $\lim_{x \to +\infty} x^3$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

Algebra dei limiti

54 Quanto vale $\lim_{x \to -\infty} x^3$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

55 Quanto vale $\lim_{x \to +\infty} x^4$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

Algebra dei limiti

56 Quanto vale $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

57 Quanto vale $\lim\limits_{x \to -3} x^4$?

A 27 B -27 C 81 D -81

58 Quanto vale $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$?

A $-\infty$ B 0 C 1 D $+\infty$

59 Quanto vale $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$?

A $-\infty$ B 0 C 1 D $+\infty$

Algebra dei limiti

60 Quanto vale $\lim_{x \to -\infty} (1 + x)$?

A $-\infty$ B 0 C 1 D $+\infty$

61 Quanto vale $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin 3x$?

A 1 B 0 C -1 D $+\infty$

62 Quanto vale $\lim_{x \to +\infty} 10^x$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

63 Quanto vale $\lim_{x \to +\infty} 10^{-x}$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

Mathematiké tèkne

Algebra dei limiti

Esercizi

64 Quanto vale $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

65 Quanto vale $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x$?

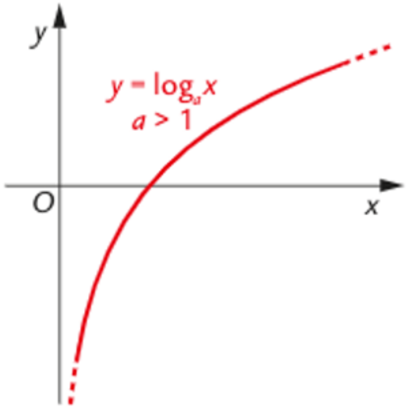
A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

66 Quanto vale $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_5 x$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$

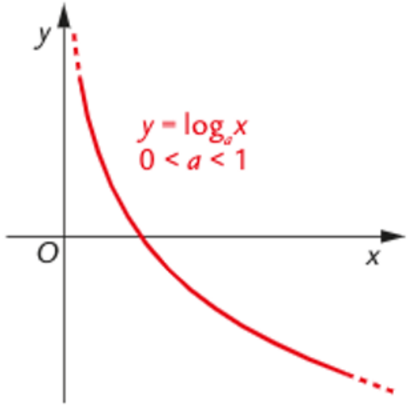
67 Quanto vale $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_{\frac{1}{5}} x$?

A 0 B 1 C $-\infty$ D $+\infty$



$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x = -\infty$ se $a > 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x = +\infty$ se $a > 1$



$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x = +\infty$ se $0 < a < 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x = -\infty$ se $0 < a < 1$

Completa il calcolo dei seguenti limiti.

74 $\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 4}}{\underbrace{(x-3)^2}_{\to 0^+}} = \dots\dots\dots\dots$

$\lim_{x\to 0^+} (\underbrace{x}_{\to 0^+} + \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}) = \dots\dots\dots\dots$

75 $\lim_{x\to 5^-} \frac{1}{\underbrace{x-5}_{\to 0^-}} = \dots\dots\dots\dots$

(l'avvicinamento è da sinistra e per $x < 5$ è $x - 5 < 0$)

$\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{\underbrace{x-5}_{\to 0^+}} = \dots\dots\dots\dots$

(l'avvicinamento è da destra e per $x > 5$ è $x - 5 > 0$)

Algebra dei limiti

76 $$\lim_{x\to 3^-} \frac{\overbrace{x-1}^{\to 2}}{\underbrace{3-x}_{\to 0^+}} = \dots\dots\dots$$

(l'avvicinamento è da sinistra e per $x < 3$ è $3 - x > 0$)

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\overbrace{x-1}^{\to 2}}{\underbrace{3-x}_{\to 0^-}} = \dots\dots\dots$$

(l'avvicinamento è da destra e per $x > 3$ è $3 - x < 0$)

77 $$\lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{1-x}^{\to -1}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^-}} = \dots\dots\dots$$

(l'avvicinamento è da sinistra e per $x < 2$ è $x - 2 < 0$)

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{1-x}^{\to -1}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^+}} = \dots\dots\dots$$

(l'avvicinamento è da destra e per $x > 2$ è $x - 2 > 0$)

Algebra dei limiti

78 $\lim_{x \to -1^-} \underbrace{\frac{\overbrace{x}^{\to -1}}{x+1}}_{\to 0^-} = \dots\dots\dots$

(l'avvicinamento è da sinistra e per $x < -1$ è $x + 1 < 0$)

$\lim_{x \to -1^+} \underbrace{\frac{\overbrace{x}^{\to -1}}{x+1}}_{\to 0^+} = \dots\dots\dots$

(l'avvicinamento è da destra e per $x > -1$ è $x + 1 > 0$)

79 $\lim_{x \to -3^-} \underbrace{\frac{\overbrace{x+5}^{\to 2}}{x+3}}_{\to 0^-} = \dots\dots\dots$

(l'avvicinamento è da sinistra e per $x < -3$ è $x + 3 < 0$)

$\lim_{x \to -3^+} \underbrace{\frac{\overbrace{x+5}^{\to 2}}{x+3}}_{\to 0^+} = \dots\dots\dots$

(l'avvicinamento è da destra e per $x > -3$ è $x + 3 > 0$)

Algebra dei limiti

Esercizi

80 $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\overbrace{x-2}^{\to -1}}{\underbrace{1-x^2}_{\to 0^+}} = \dots\dots\dots\dots$ (l'avvicinamento è da sinistra e $1-x^2>0$ per $-1<x<1$)

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\overbrace{x-2}^{\to -1}}{\underbrace{1-x^2}_{\to 0^-}} = \dots\dots\dots\dots$ (l'avvicinamento è da destra e $1-x^2<0$ se $x>1$)

81 $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(1-x)}_{\to -\infty}\,\overbrace{e^x}^{\to +\infty} = \dots\dots\dots\dots$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(1-x)}_{\to +\infty}\,\overbrace{e^{-x}}^{\to +\infty} = \dots\dots\dots\dots$

82 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\overbrace{e^{-x^2}}^{\to 0^+}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}} = \dots\dots\dots\dots$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\overbrace{x^2-1}^{\to +\infty}}{\underbrace{e^{1+x}}_{\to 0^+}} = \dots\dots\dots\dots$

Algebra dei limiti

85 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+3}$

86 $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2-1}$

87 $\lim_{x\to1^+} \frac{2}{x-1}$

88 $\lim_{x\to2^-} \frac{2}{x-2}$

89 $\lim_{x\to3^+} \frac{x}{x-3}$

90 $\lim_{x\to3^-} \frac{x}{x-3}$

91 $\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{x+1}$

92 $\lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x+1}$

93 $\lim_{x\to-5^+} \frac{x}{x+5}$

94 $\lim_{x\to-5^-} \frac{x}{x+5}$

95 $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

96 $\lim_{x\to2} \frac{x+2}{(x-2)^2}$

97 $\lim_{x\to2} \frac{x}{x+2}$

98 $\lim_{x\to3} \frac{1-4x}{(x-3)^2}$

99 $\lim_{x\to4^+} \frac{2+x}{4-x}$

100 $\lim_{x\to5^-} \frac{x}{5-x}$

101 $\lim_{x\to3^+} \frac{1}{9-x^2}$

102 $\lim_{x\to3^-} \frac{1}{9-x^2}$

103 $\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{x^2-1}$

104 $\lim_{x\to-1^-} \frac{1}{x^2-1}$

105 $\lim_{x\to-2^+} \frac{x}{x^2-4}$

Algebra dei limiti

Esercizi

108 $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{1-x}{x^2-9}$

109 $\lim_{x\to 0} \dfrac{3+x}{1-x^2}$

110 $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{3}{1+x} - \dfrac{1}{x}\right)$

111 $\lim_{x\to -\infty} \left(4 + \dfrac{1}{x-2}\right)$

112 $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}\right)$

113 $\lim_{x\to 5^+} \left(\dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x}\right)$

114 $\lim_{x\to -\infty} \left(x - \dfrac{3}{x}\right)$

115 $\lim_{x\to -\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right)\left(3 - \dfrac{1}{x}\right)$

116 $\lim_{x\to -\infty} (1-x)\left(3 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

117 $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x+1} - 4\right)\left(\dfrac{1}{x} + 2\right)$

118 $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

119 $\lim_{x\to +\infty} (3+x)\left(4 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

120 $\lim_{x\to +\infty} x^2(1-x^2)$

121 $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{5-x}{x^2-3x-4}$

122 $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5}{x\,e^x}$

123 $\lim_{x\to 0} \dfrac{2+\cos^2 x}{\log_3(x+27)}$

124 $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{x^2}{\tan x - 1}$

125 $\lim_{x\to +\infty} (x^2 + x^3)$

Algebra dei limiti

Esercizi
Pag. 250

126 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}}{x^2+1}$

127 $\lim_{x\to +\infty} x^3\left(1-2^x\right)$

128 $\lim_{x\to 2} \frac{e^{x^3-8}}{e^{x^4-16}}$

129 $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{(x-2)^3}$

130 $\lim_{x\to -\infty} \left(e^x+2x\right)$

131 $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x-\cos x}{\tan x+\cos 2x}$

132 $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\ln x^2$

133 $\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4x+4}$

134 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}$

135 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\ln x}$

136 $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x-2|}{x^2-2x}$

138 $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+e^{-x}}{x^2+1}$

139 $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1}$

140 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+2x}{x+\cos x}$

Mathematiké
tèkne

Algebra dei limiti

Esercizi
Pag. 250

Mathematiké
tèkne

Algebra dei limiti

Esercizi

Pag. 250