Mathematiké tèkne

Analisi matematica

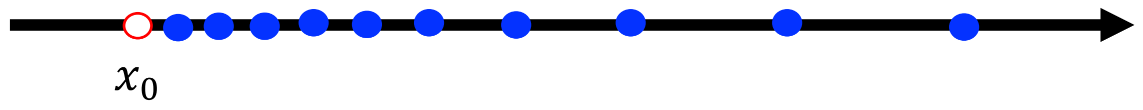
Introduzione ai limiti

Prof. Domenico Lo Iacono

Definizione Punto di accumulazione

CONSIDERIAMO L'INSIEME A sottoinsieme di R

A



CONSIDERIAMO UN INSIEME DI PUNTI CHE SI VANNO A COLLASSARE IN UN PUNTO x_0

OPPURE L'INSIEME A DEI PUNTI, AD ESEMPIO FRA 3 e 5

A

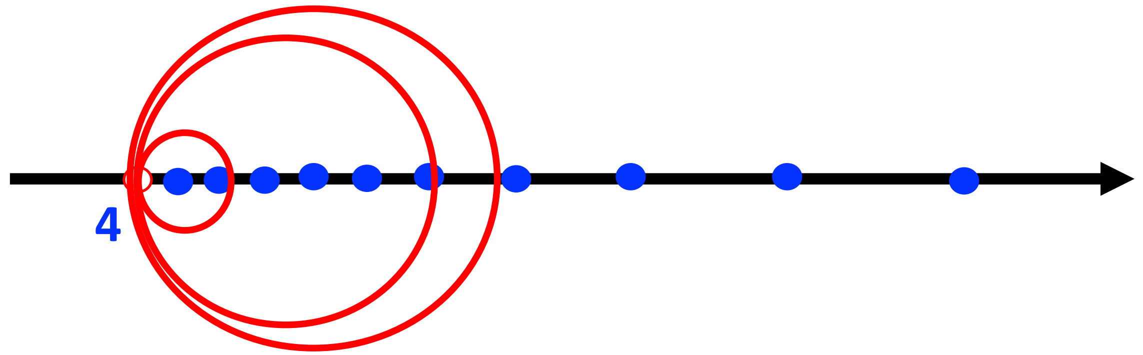
Un PUNTO x_0 è di accumulazione per A se per ogni **intorno** di x_0, esistono all'interno dell'intorno infiniti punti $\in A$

Definizione Punto di accumulazione

E’ un sottoinsieme di R

GRAFICAMENTE

A



SE PRENDO UN INTORNO DESTRO DEL PUNTO 4

IN OGNI INTORNO CHE PRENDO, ALL’INTERNO **ESISTONO INFINITI PUNTI DI A**

VISTO CHE I PUNTI SI STANNO ACCUMULANDO VERSO IL 4,

4 è **PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A**

A PRESCINDERE CHE 4 APPARTIENE O MENO AD A

A

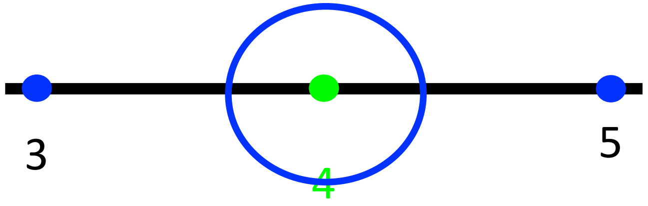
Definizione Punto di accumulazione

GRAFICAMENTE

E' un sottoinsieme di R

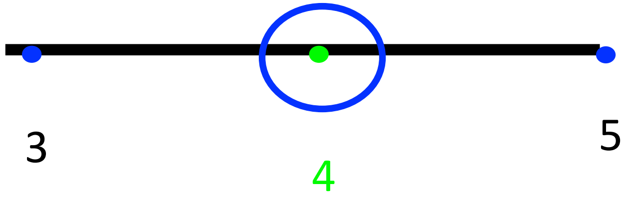
CONSIDERIAMO L'INSIEME

A



SE PRENDO UN INTORNO DEL PUNTO 4, DENTRO QUESTO INTORNO **ESISTONO INFINITI PUNTI DI A**

VISTO CHE I PUNTI SI STANNO ACCUMULANDO VERSO IL 4, 4 è **PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A**



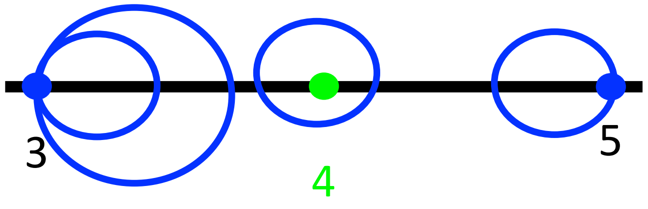
SE RESTRINGO IL RAGGIO DI QUEST'INTORNO 4 è ANCORA **PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A**

Definizione Punto di accumulazione

GRAFICAMENTE

SE PRENDO UN INTORNO SINISTRO DI A

A



SE PRENDO UN INTORNO SINISTRO DEL PUNTO 3,

SE DENTRO QUESTO INTORNO **ESISTONO INFINITI PUNTI DI A**

3 è **PUNTO DI ACCUMULAZIONE A SINISTRA PER A**

NEL 1^ CASO DI PUNTI DI ACCUMULAZIONE C'è NE SOLO UNO, IL 4.

NE SECONDO INSIEME CI POSSONO ESSERE INFINITI P. ACCUMULAZIONE

SE RESTRINGO IL RAGGIO DI QUEST'INTORNO

4 è ANCORA **PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A**

Definizione Punto di accumulazione

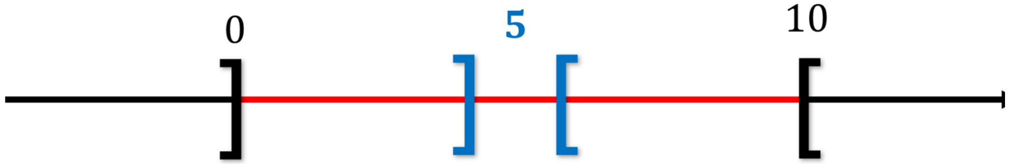
CONSIDERIAMO L'INSIEME A INTERVALLO APERTO DI ESTREMI (0, 10)

$A =]0,10[$

E' un sottoinsieme di R → SI

SIAMO SICURI → SI. PERCHE' CONTIENE AL SUO INTERNO INFINITI PUNTI

PRENDIAMO IL PUNTO 5



$I(5) = (5-\delta; 5+\delta)$

A QUALSIASI DISTANZA DAL PUNTO 5 C'è UN NUMERO DELL'INSIEME ? → SI

A QUALSIASI DISTANZA CI METTIAMO TROVIAMO INFINITI PUNTI DI A

Definizione Punto di accumulazione

COSA CAMBIA SE SCELGO IL PUNTO 1,2

$I(1{,}2) = (1{,}2 - \delta; 1{,}2 + \delta)$

A QUALSIASI DISTANZA DAL PUNTO 1,2 C'è UN NUMERO DI A ANCORA → SI

QUINDI **1,2** E **5** SONO PUNTI DI ACCUMULAZIONE PER L'INTERVALLO APERTO **(0, 10)**

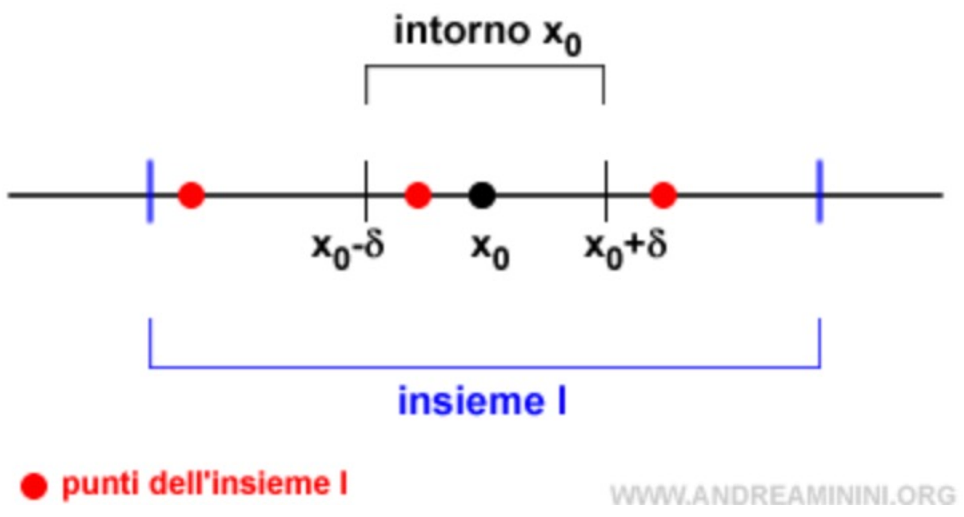
Definizione

Un punto è detto **punto di accumulazione** di un insieme se un qualunque suo intorno contiene sempre almeno un punto dello stesso insieme che sia diverso da esso.

Definizione Punto di accumulazione

Dato un insieme I di numeri reali, $x_o \in R$
un punto x_0 è un punto di accumulazione per l'insieme I
se preso un qualunque $\delta>0$ esiste almeno un punto reale x di I tale che

$$0 \neq |x - x_0| < \delta$$



Con:

$$x_o - \delta < x_o < x_o + \delta$$

x_o scelto apiacere

$\delta>0$

Se nell'intorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ c'è almeno un punto x dell'insieme I, distinto da x_0,

→ allora **x_0 è un punto di accumulazione** per l'insieme I.

→ x_0 si dice punto di accumulazione per l'insieme I se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di I

Mathematiké

tèkne

$$\lim_{x \to c} f(x) = \underset{Finito}{l}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Mathematiké ML tèkne

- **A cosa serve il calcolo dei limiti?**

Serve perché permette di studiare il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto o all'infinito.

- **Perché l’importanza de concetto di limite?**

L’importanza del concetto di limite risiede sul fatto che esso è alla base del calcolo differenziale e integrale * .

*** E' fondamentale per misurare aree in situazioni particolari**

Definizione di limite

Siano $x_0 \in R$ ed $l \in R$

f una funzione definita in in intorno di x_0,

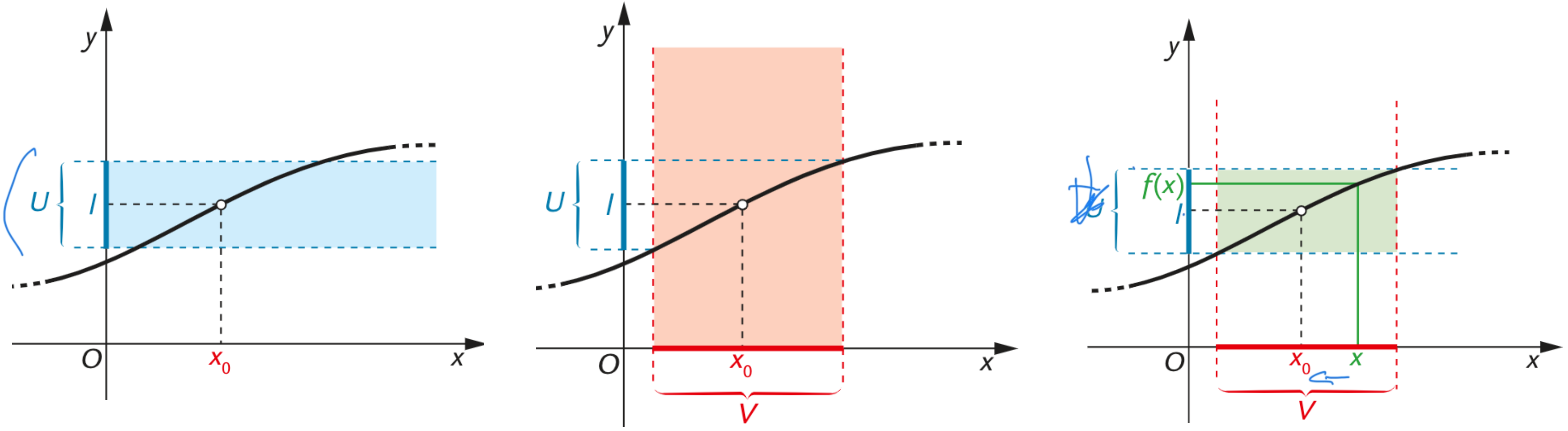
Diremo che il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0, e scriveremo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Se:

a. Per ogni intorno U di l

b. Esiste un intorno V di x_0

c. Tale che per ogni $x \in V$, con $x \neq x_0$, risulta $f(x) \in U$



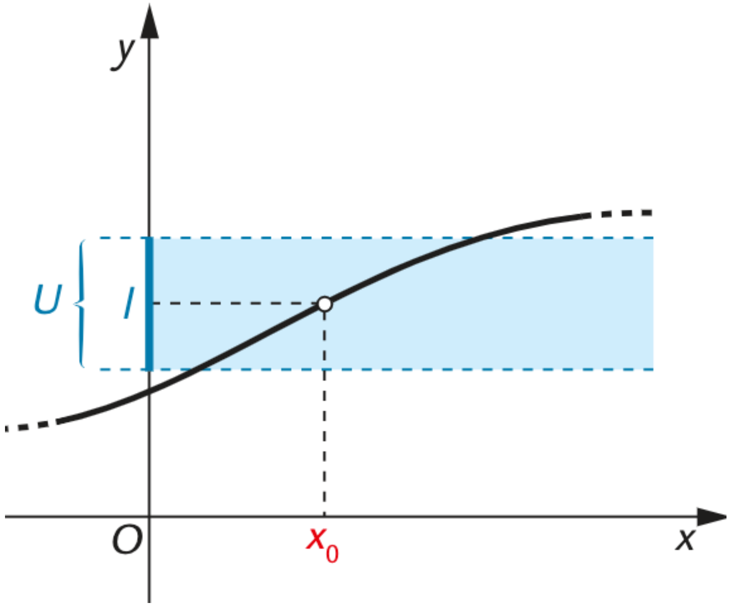
Definizione di limite

In simboli $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

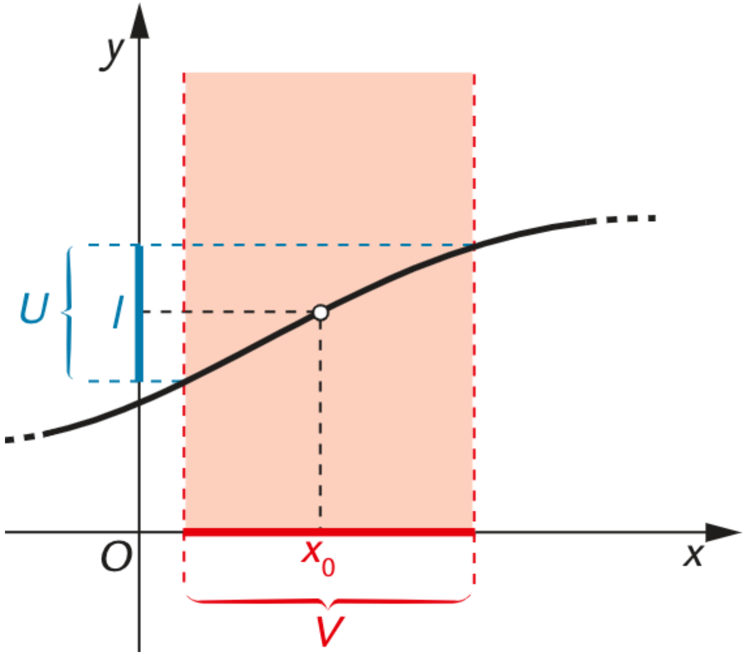
Se e solo se. $\forall U \; di \; L. \quad \exists V \; di \; x_0 : \; \forall x \in V - \{x_0\} \; risulta. \; f(x) \in U$

Se:

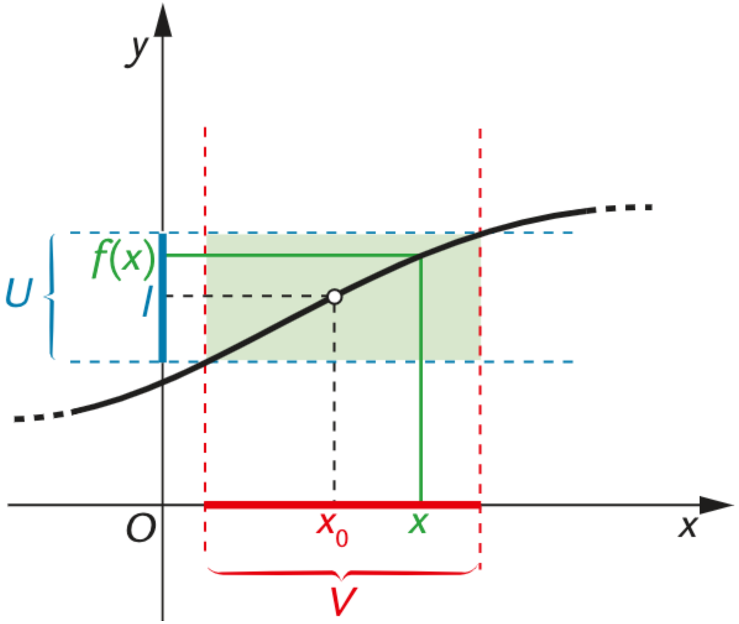
a. Per ogni intorno U di l



b. Esiste un intorno V di x_0



c. Tale che per ogni $x \in V$, con $x \neq x_0$, risulta $f(x) \in U$



Limite finito per x che tende a un valore finito

$$\lim_{x \to \boldsymbol{x_0}} f(x) = l$$

Quando la $\boldsymbol{x}$ si “avvicina indefinitamente” a un certo valore $\boldsymbol{x_0}$,
il corrispondente valore di $f(x)$ si “avvicina indefinitamente” ad
un valore costante $\boldsymbol{l}$.

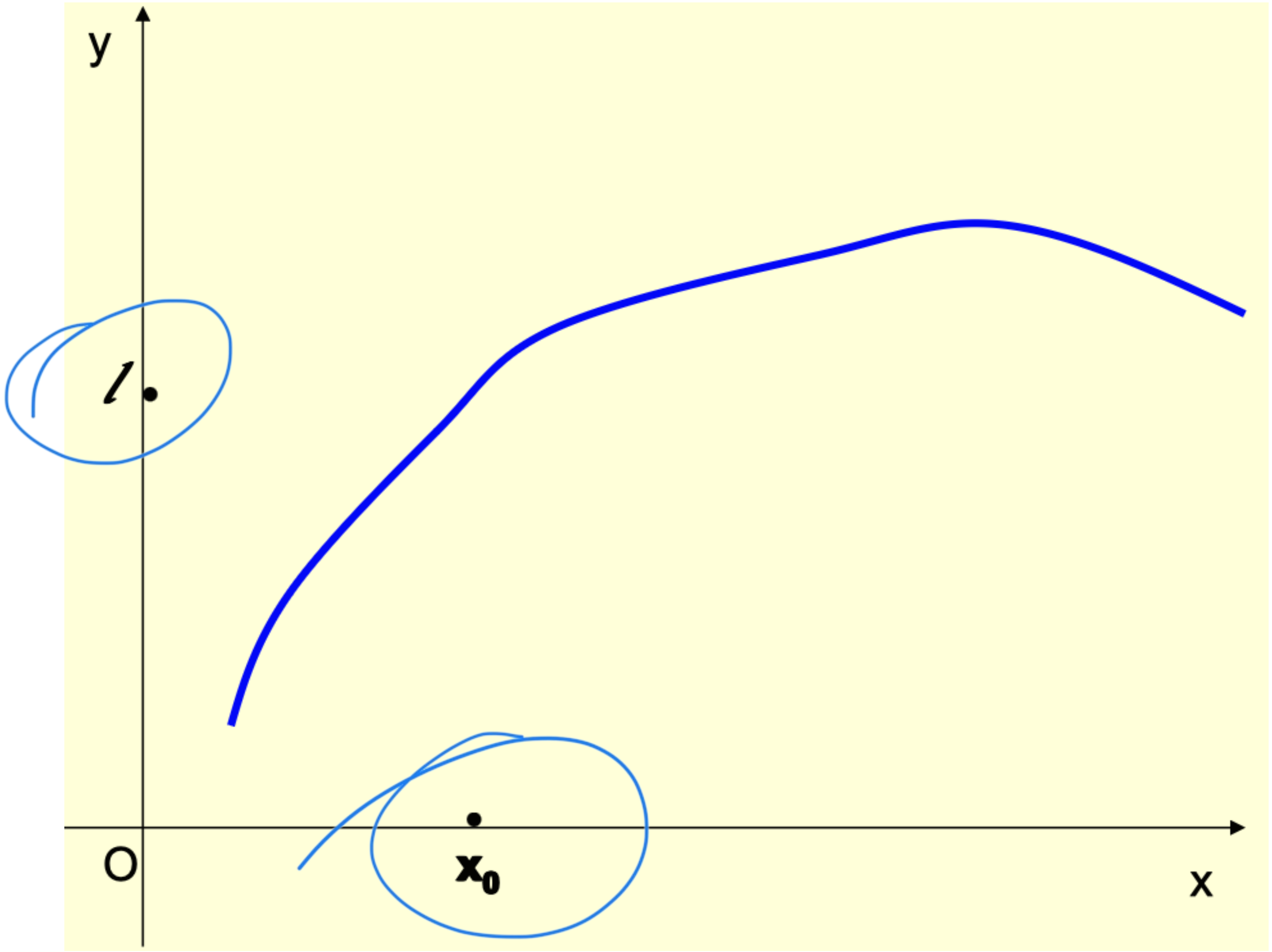
In tal caso si dice che “$\boldsymbol{l}$ è il limite della funzione per $\boldsymbol{x}$ che tende a $\boldsymbol{x_0}$”.

Mathematiké tèkne

Limite finito per x che tende a un valore finito

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Scelto un ε
piccolo a piacere



I

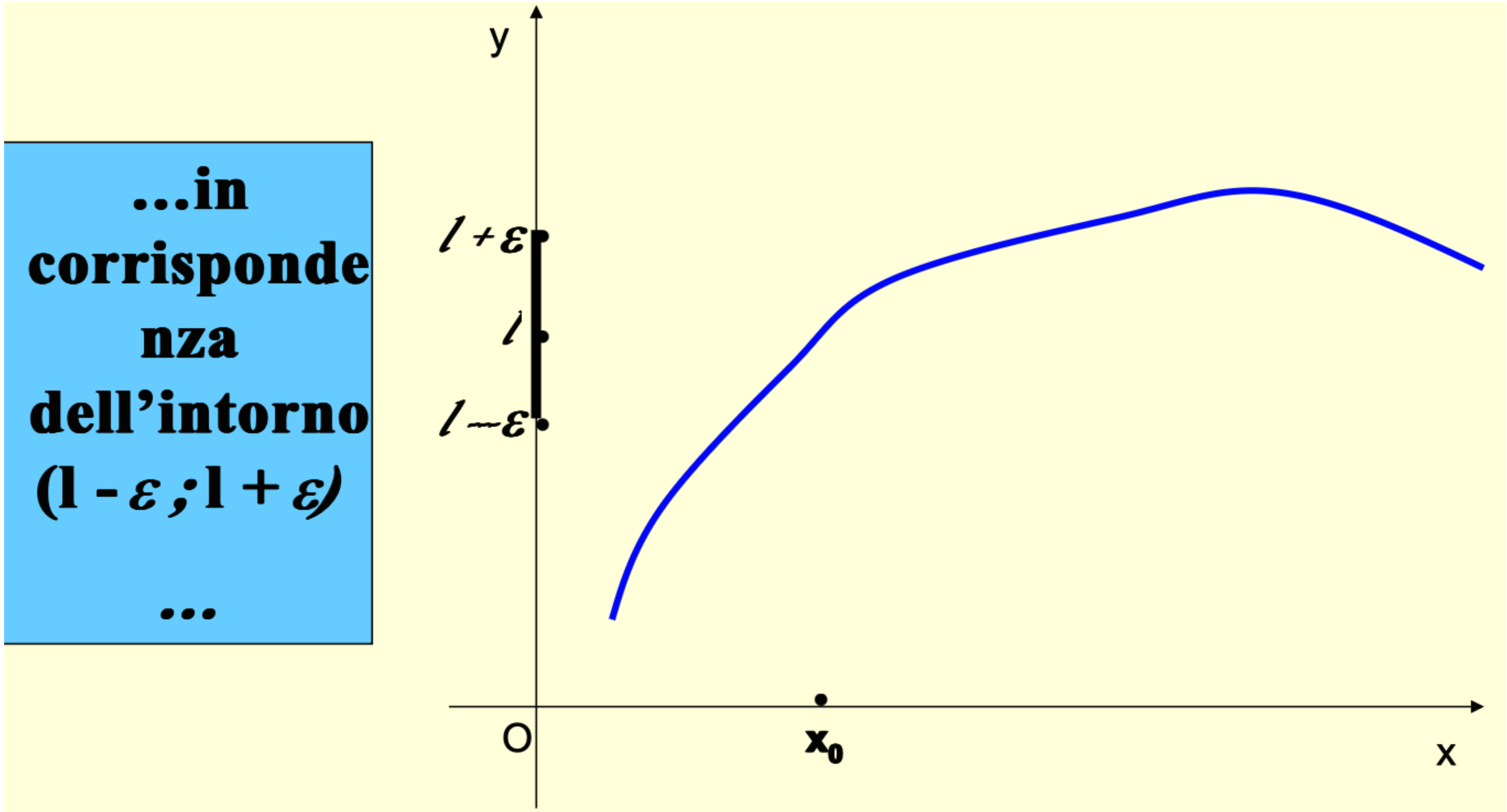
Mathematiké

tèkne

Limite finito per x che tende a un valore finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Scelto un ε piccolo a piacere

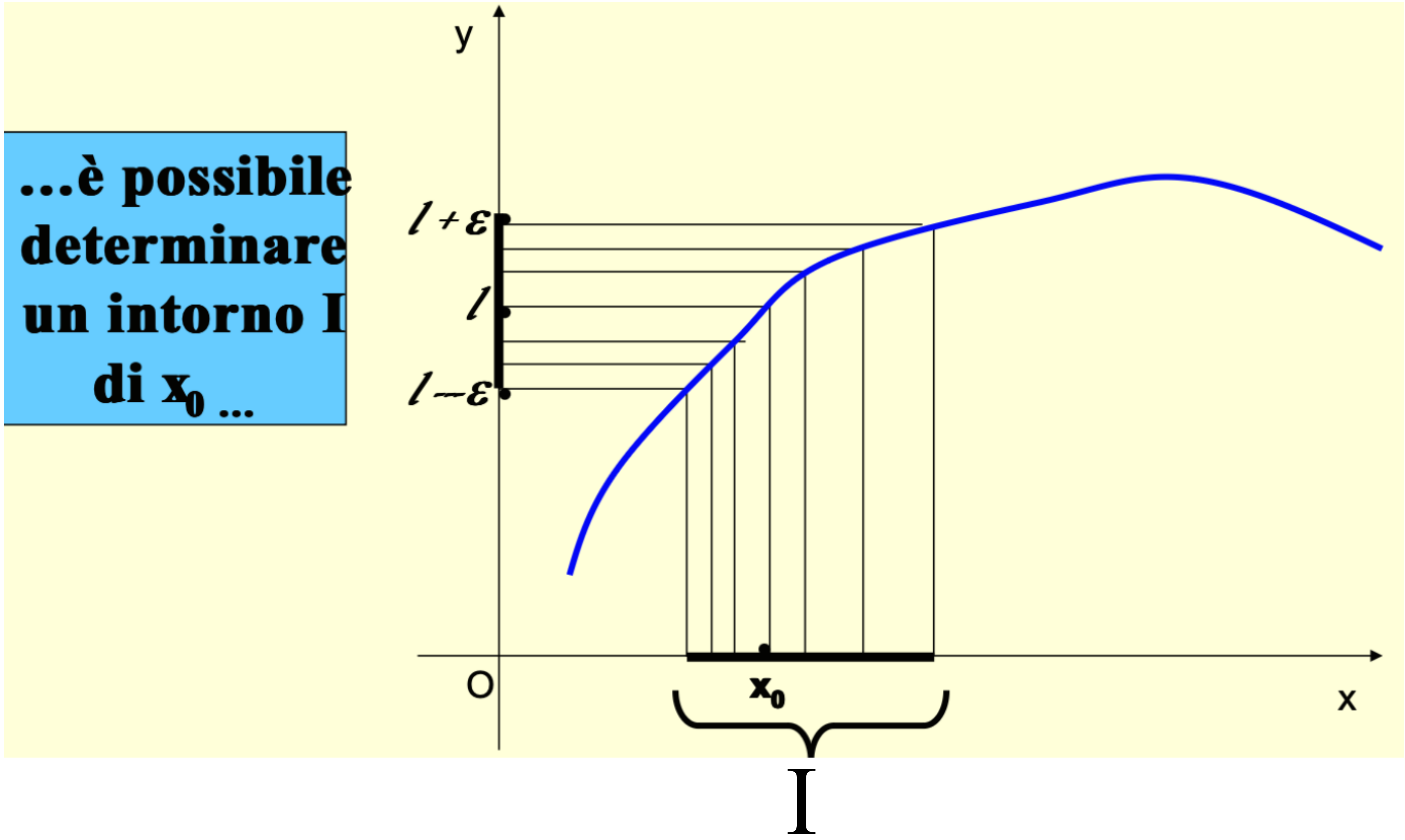


I

Limite finito per x che tende a un valore finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Scelto un ε piccolo a piacere



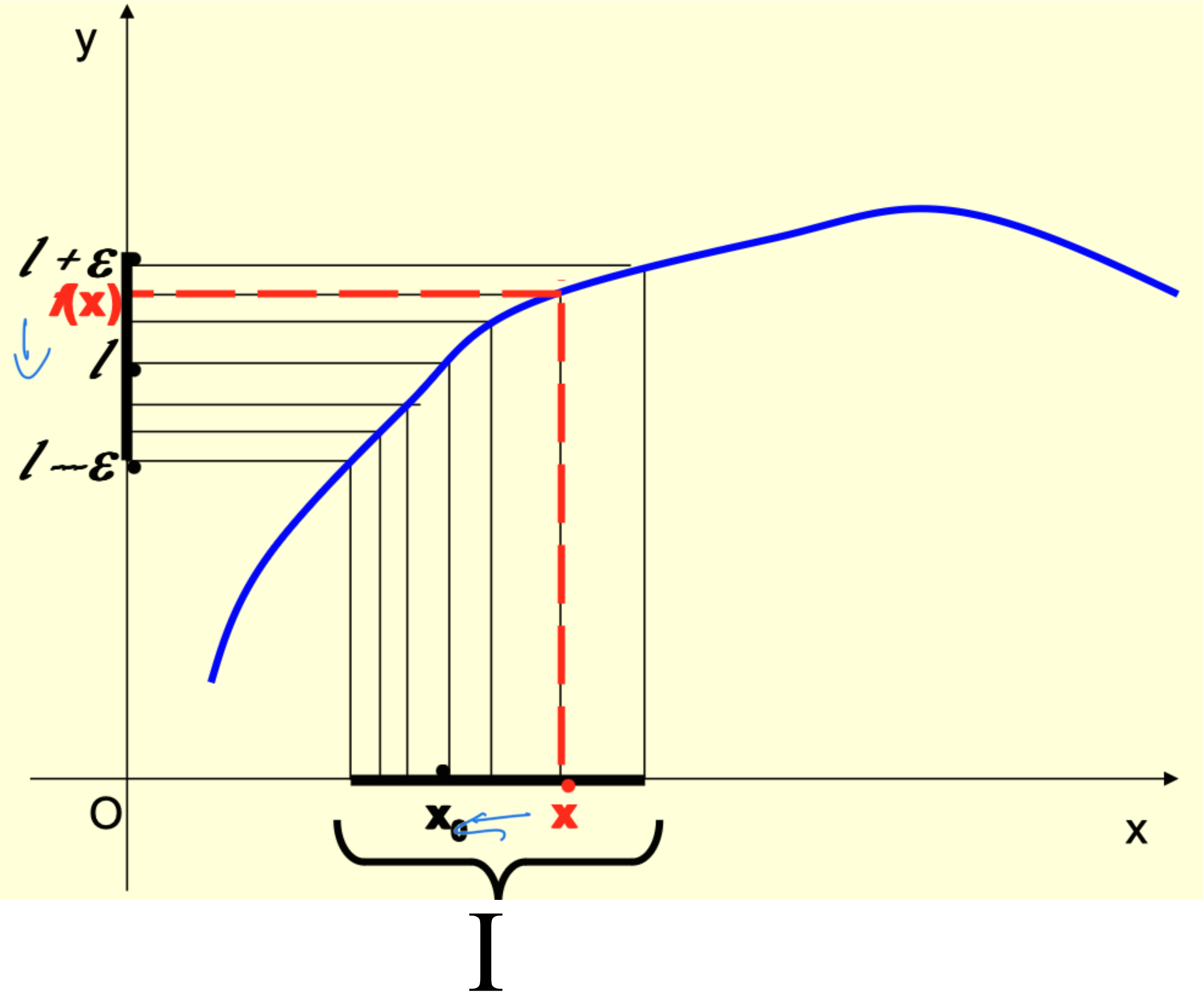
Limite finito per x che tende a un valore finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Scelto un ε piccolo a piacere

...tale che, per ogni x dell'intorno I, si ha che f(x) è compreso fra

$l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$.



Limite infinito per x che tende a un valore finito

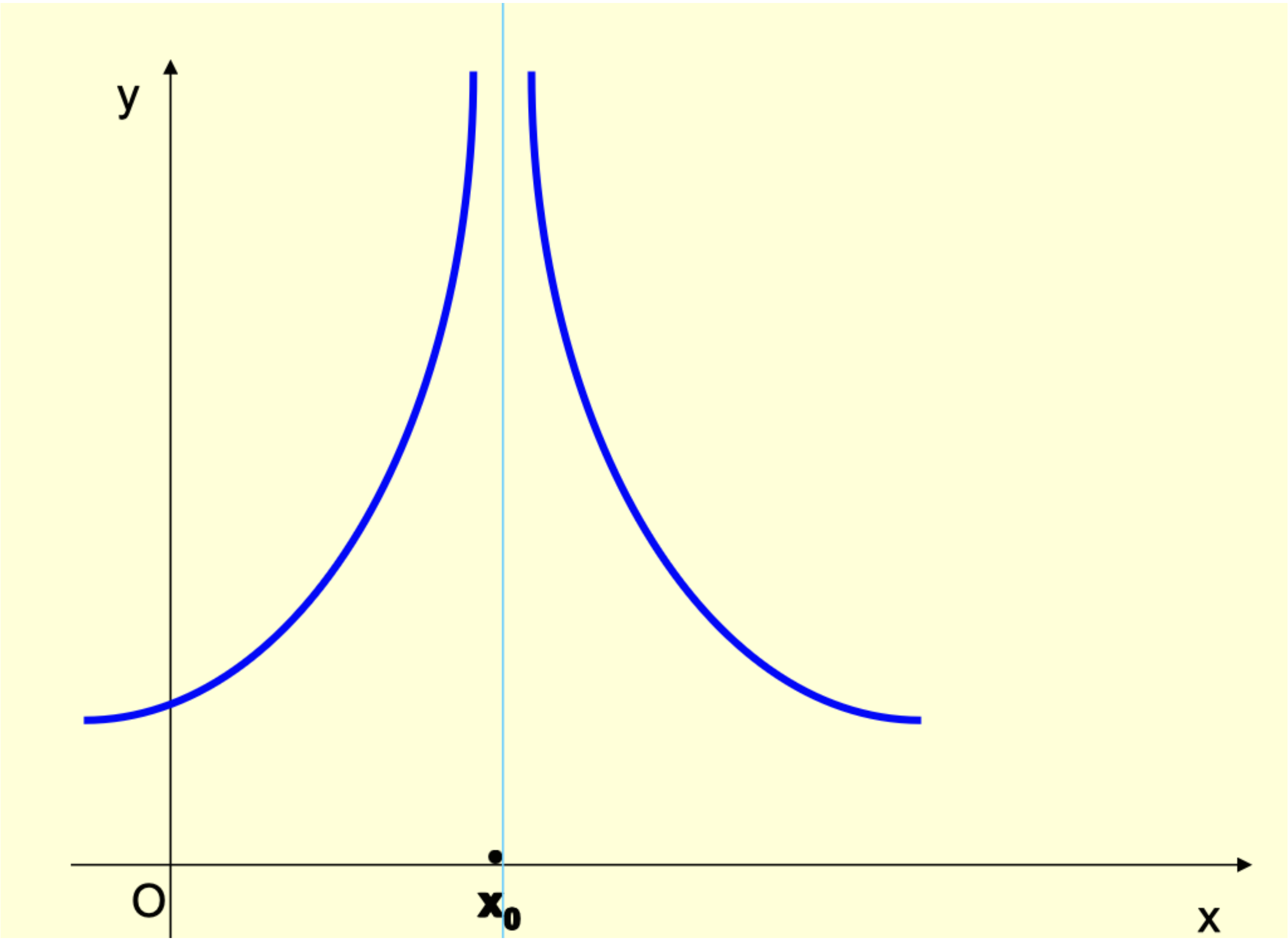
$$\lim_{x \to \boldsymbol{x_0}} f(x) = +\infty$$

Quando la $\boldsymbol{x}$ si “avvicina indefinitamente” a un certo valore $\boldsymbol{x_0}$,
la funzione $f(x)$ assume valori molto grandi

In tal caso si dice che “il limite della funzione per $\boldsymbol{x}$ che tende a $\boldsymbol{x_0}$ è $+\infty$”

Mathematiké tèkne

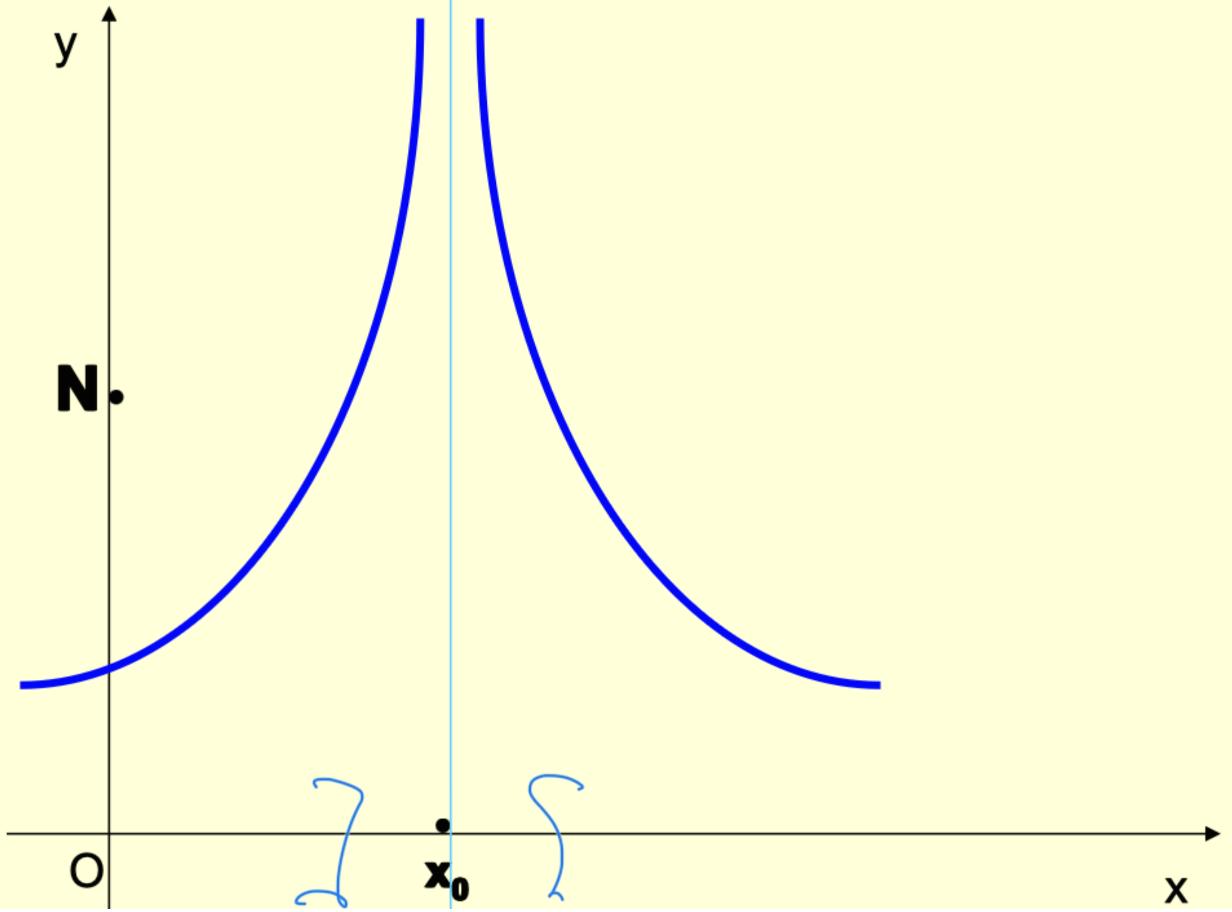
Limite infinito per x che tende a un valore finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



I

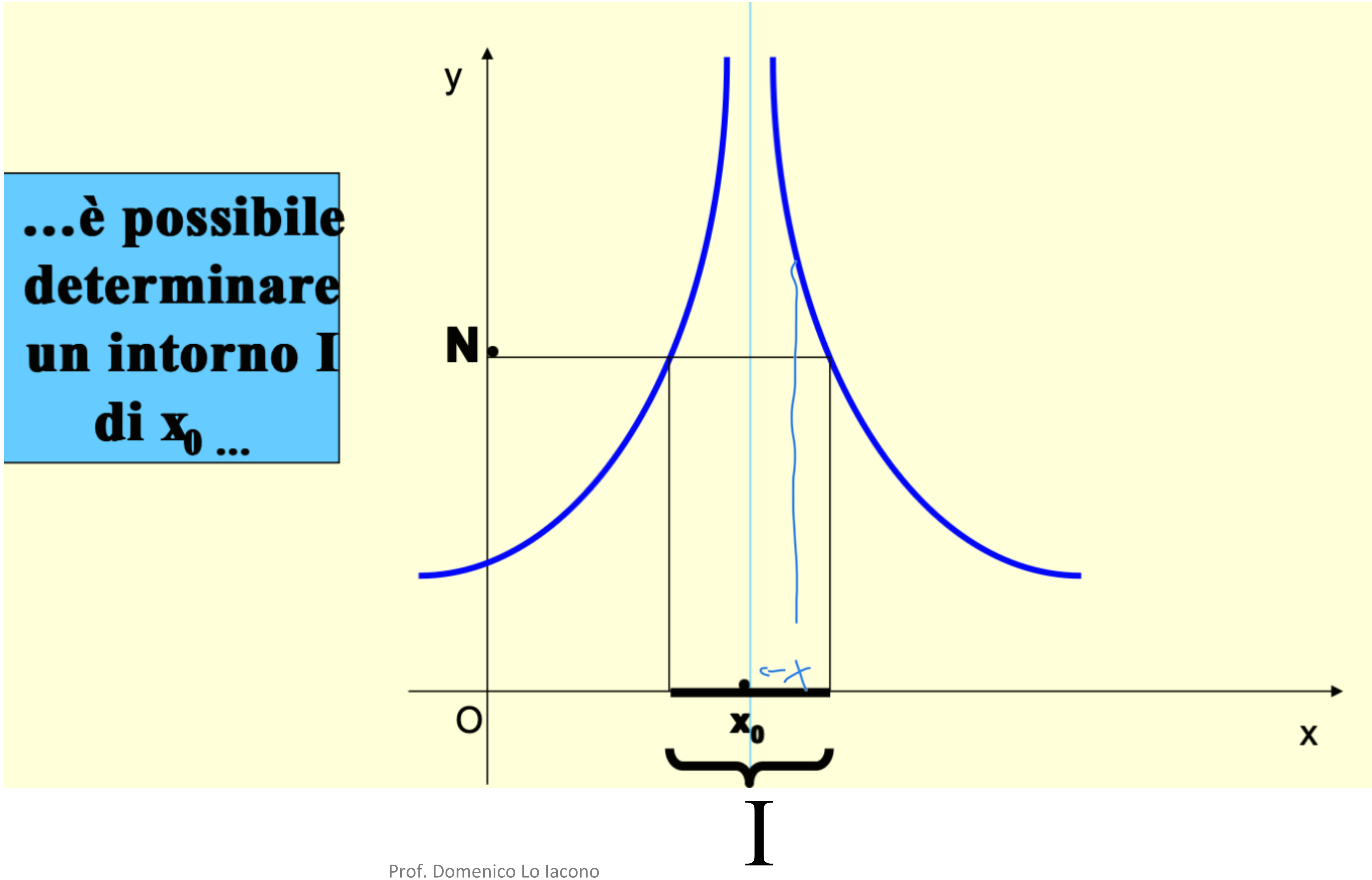
Limite infinito per x che tende a un valore finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Scelto un numero positivo N grande quanto si vuole...



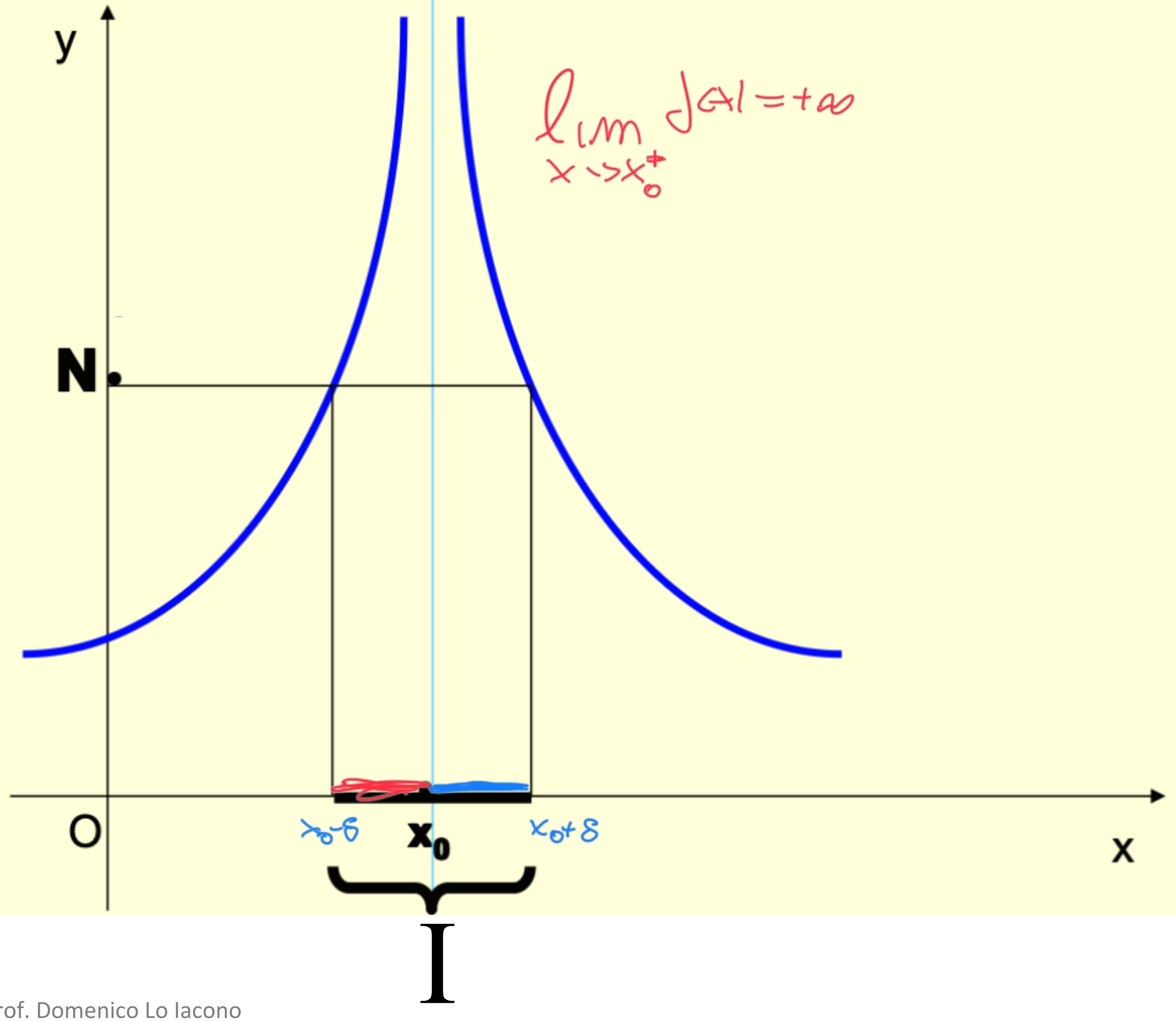
I

Limite infinito per x che tende a un valore finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



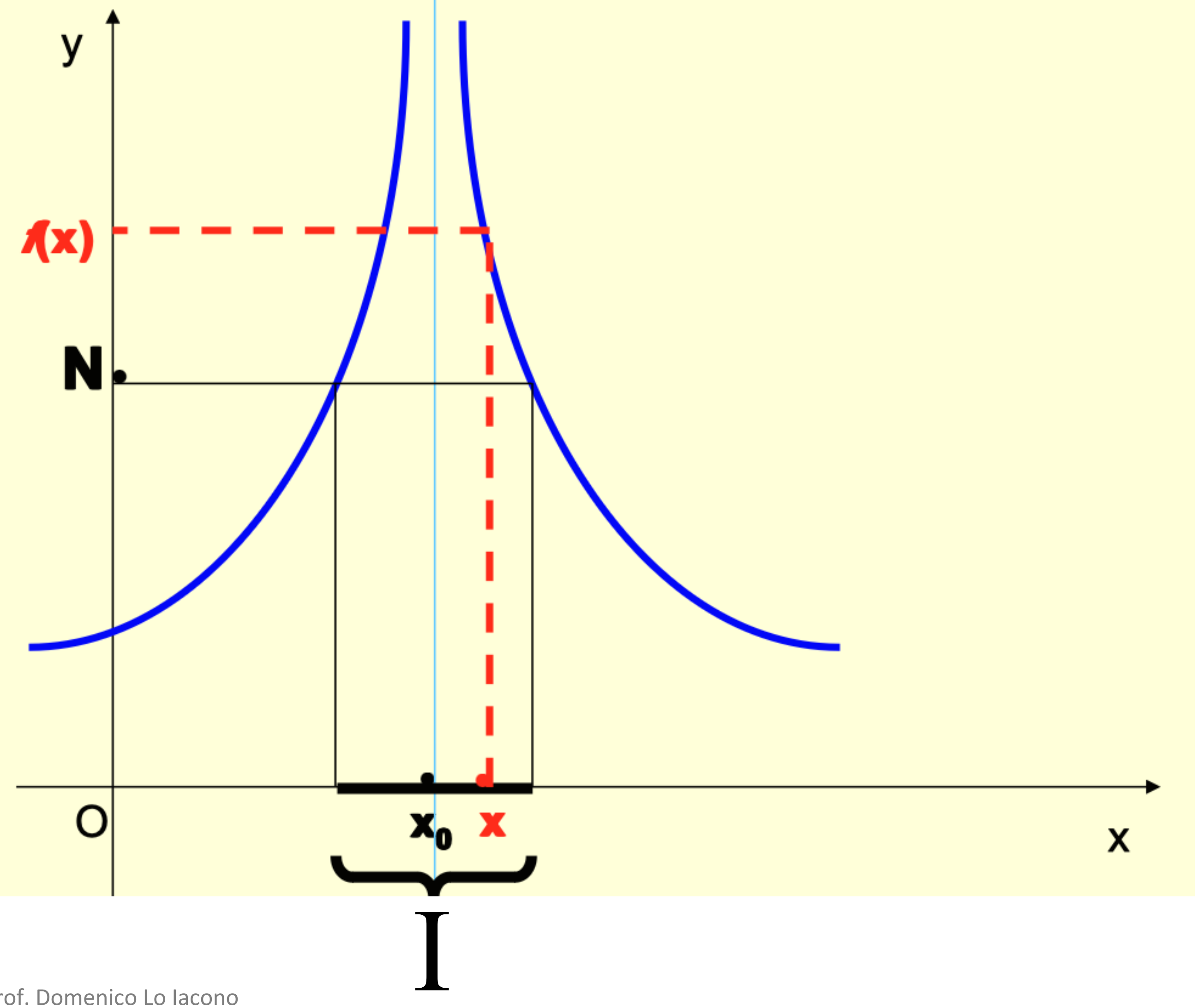
Limite infinito per x che tende a un valore finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

...tale che, per ogni x preso nell’intorno I, si ha che f(x) è maggiore di N



Limite infinito per x che tende a un valore finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

...tale che, per ogni x preso nell'intorno I, si ha che f(x) è maggiore di N



Mathematiké
tèkne

Limite finito per x che tende a un valore infinito

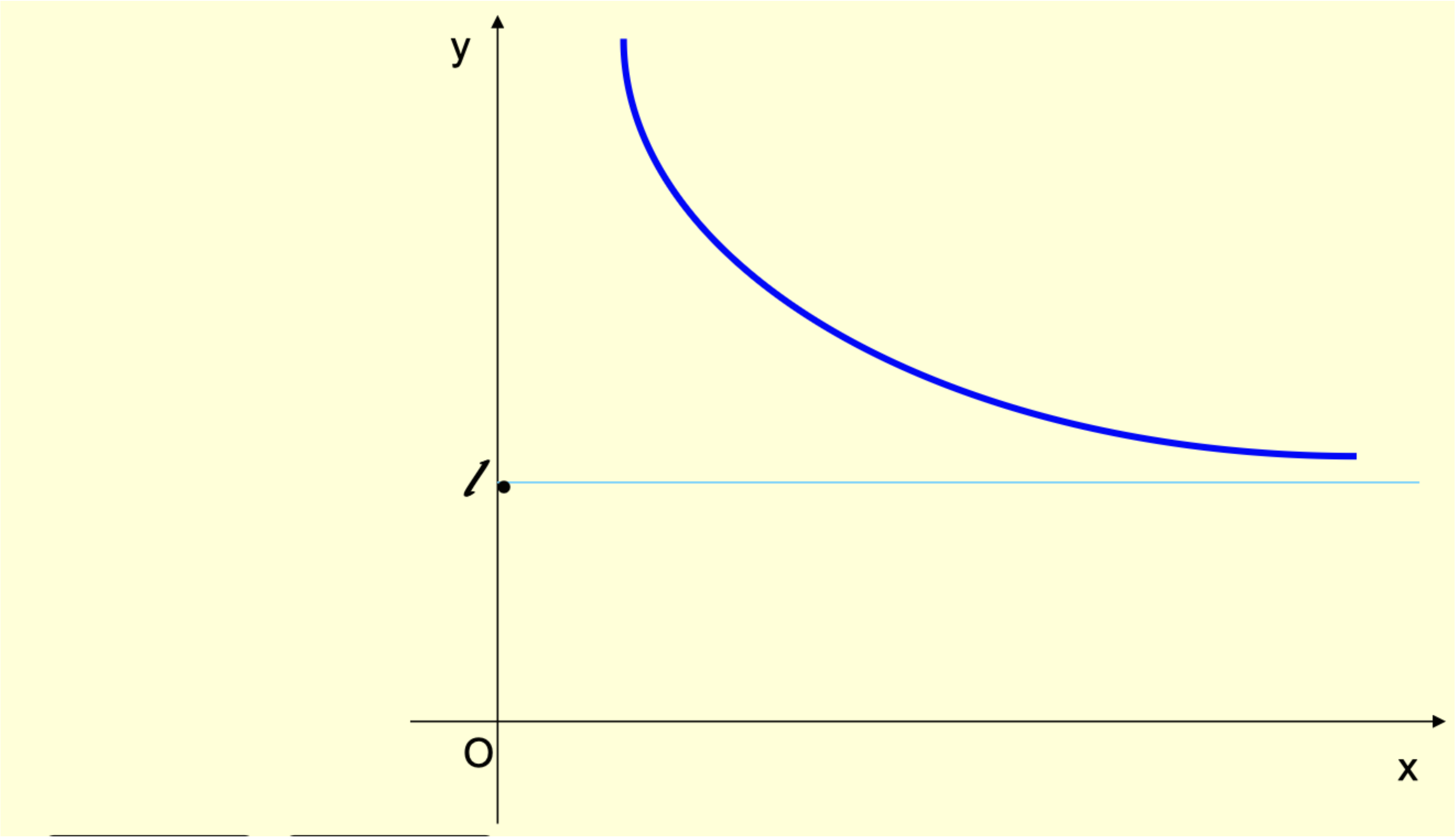
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Assegnando alla $\boldsymbol{x}$ valori sempre più grandi il corrispondente valore di $f(x)$ si avvicina ad un valore $\boldsymbol{l}$

In tal caso si dice che "$\boldsymbol{l}$ è il limite della funzione, per $\boldsymbol{x}$ che tende a $+\infty$"

Limite finito per x che tende a un valore infinito

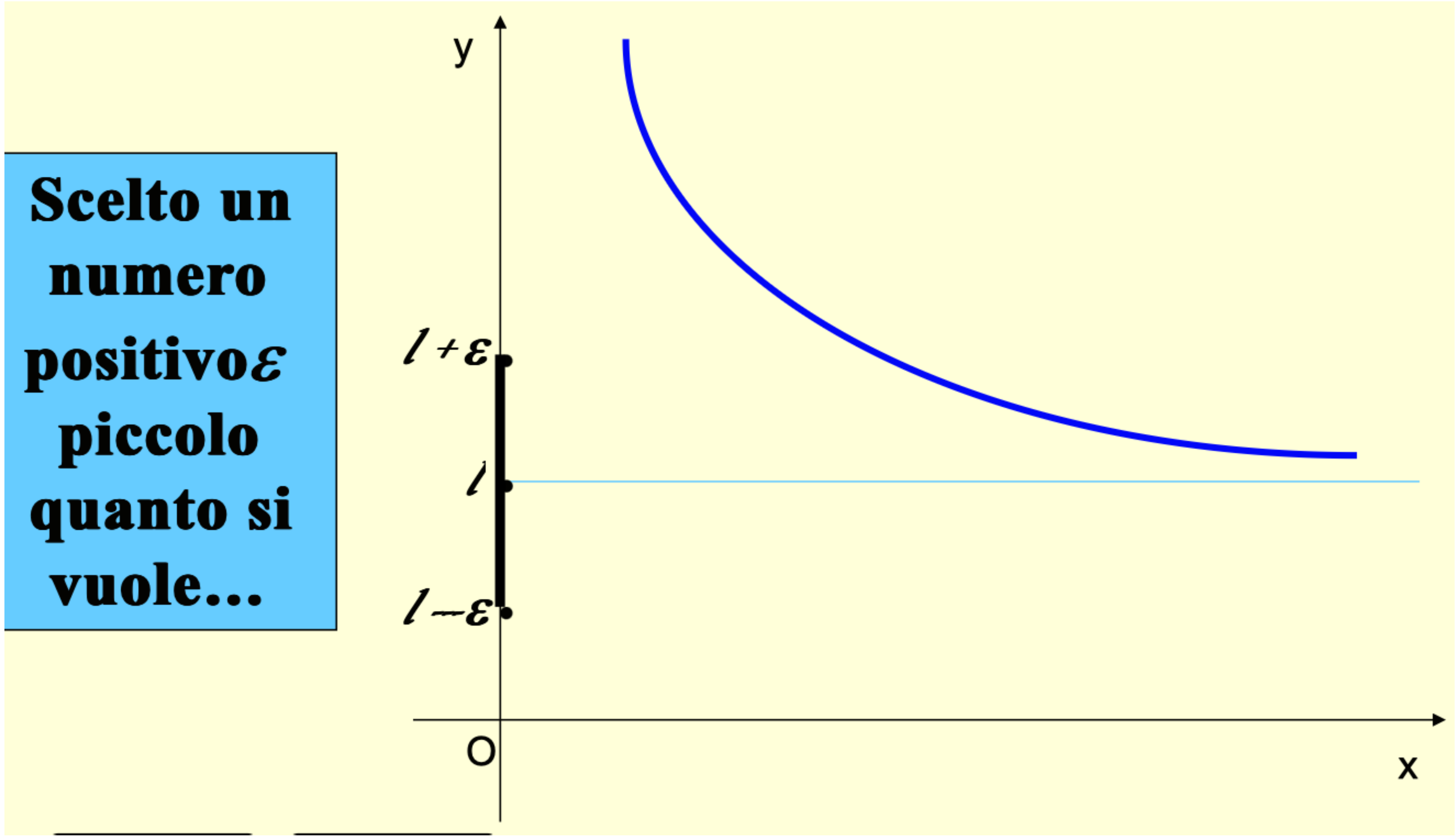
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$



I

Limite finito per x che tende a un valore infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

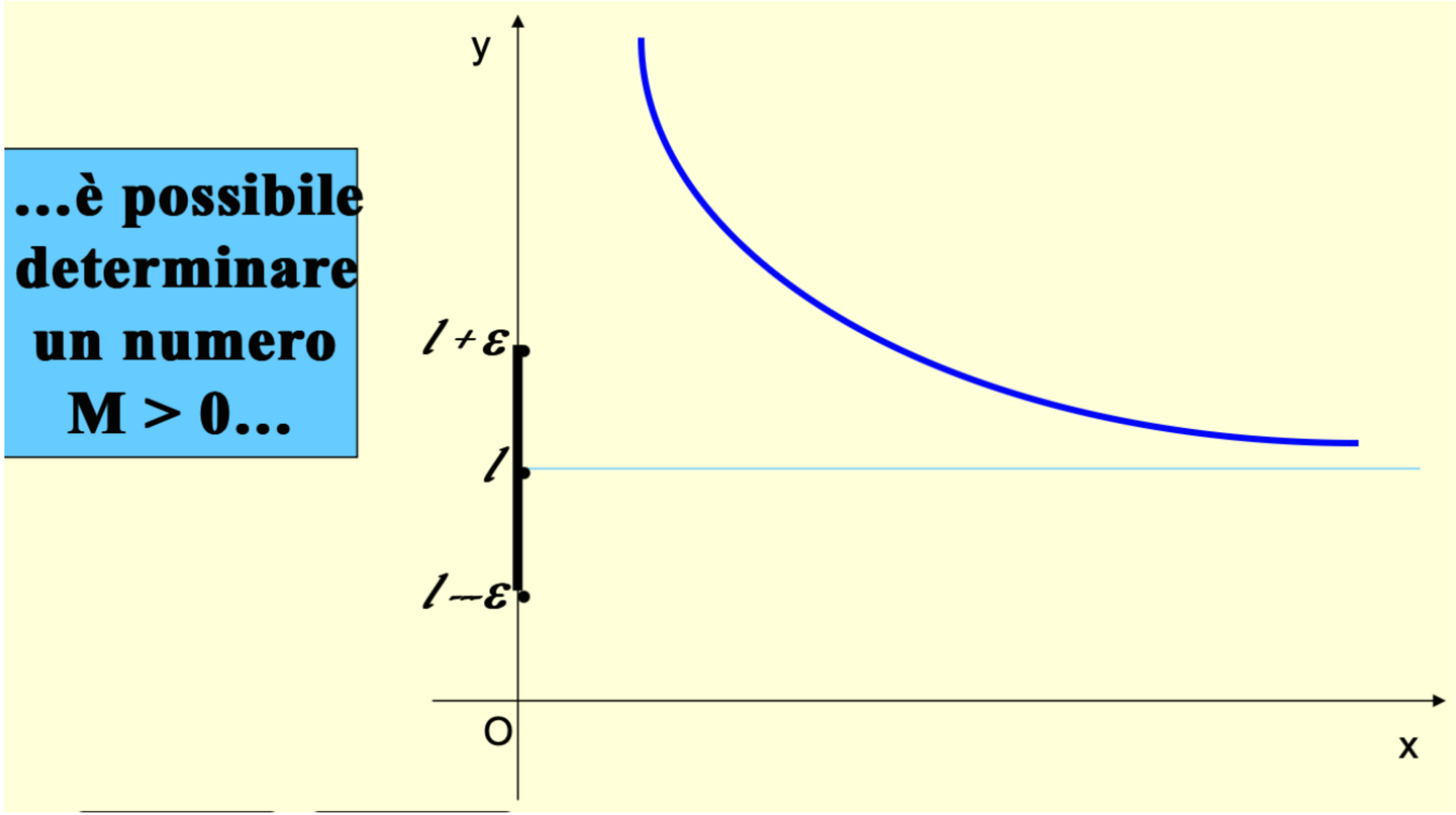


I

Mathematiké tèkne

Limite finito per x che tende a un valore infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$



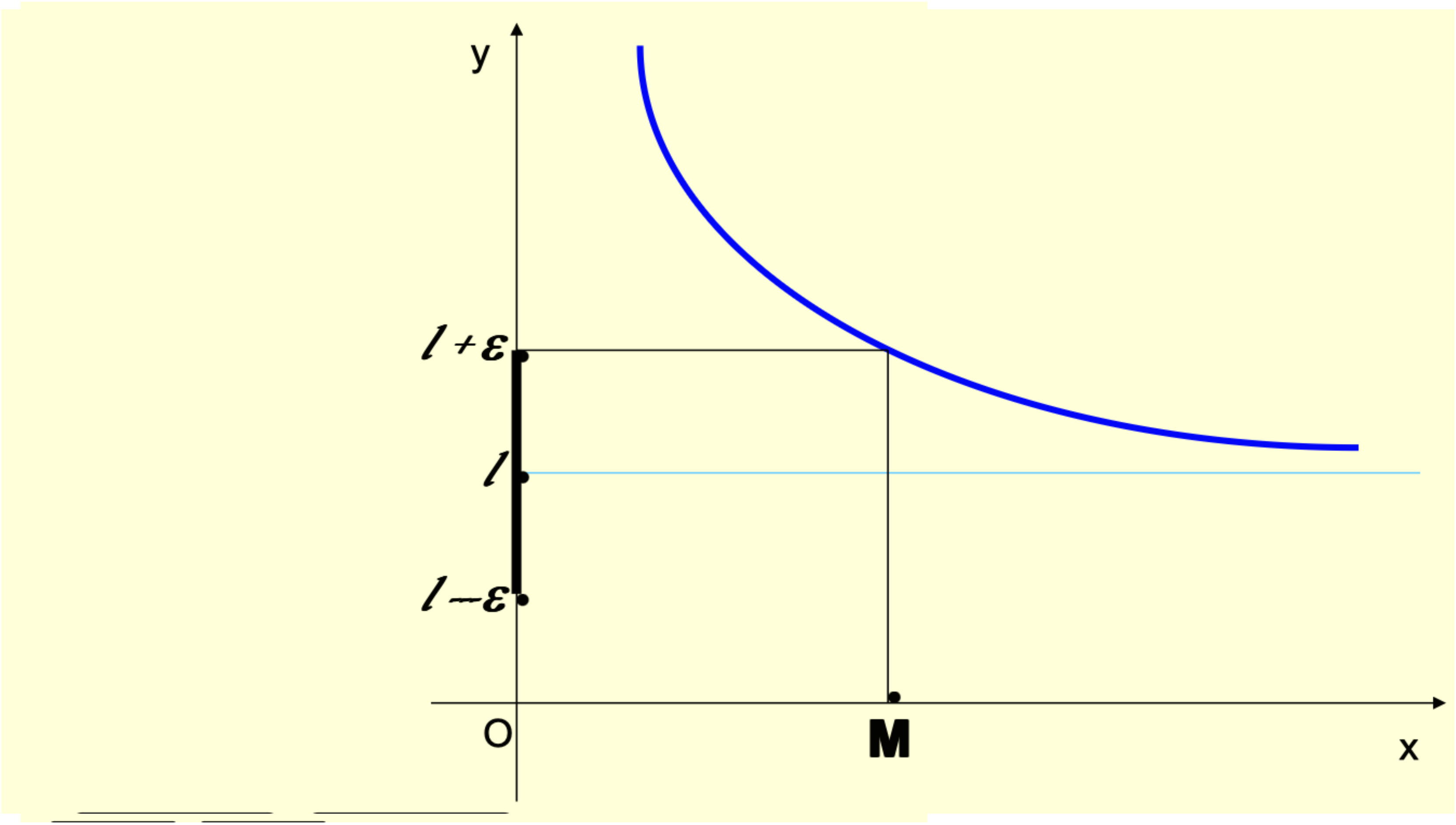
I

Mathematiké

tèkne

Limite finito per x che tende a un valore infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$



I

Mathematiké
tèkne

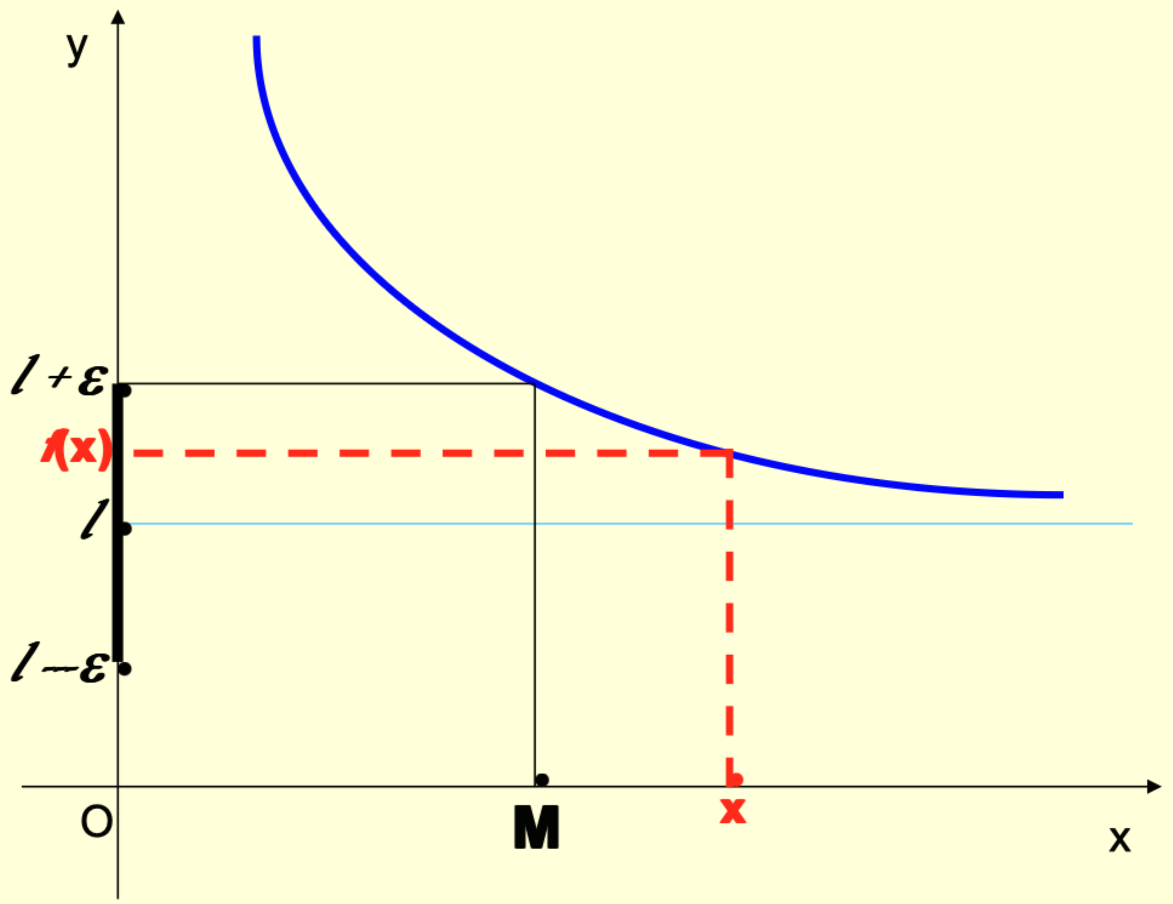
Limite finito per x che tende a un valore infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

...tale che,
per ogni

x > M

si ha che f(x)
è compreso
fra
$l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$.



I

Mathematiké
tèkne

Limite infinito per x che tende a un valore infinito

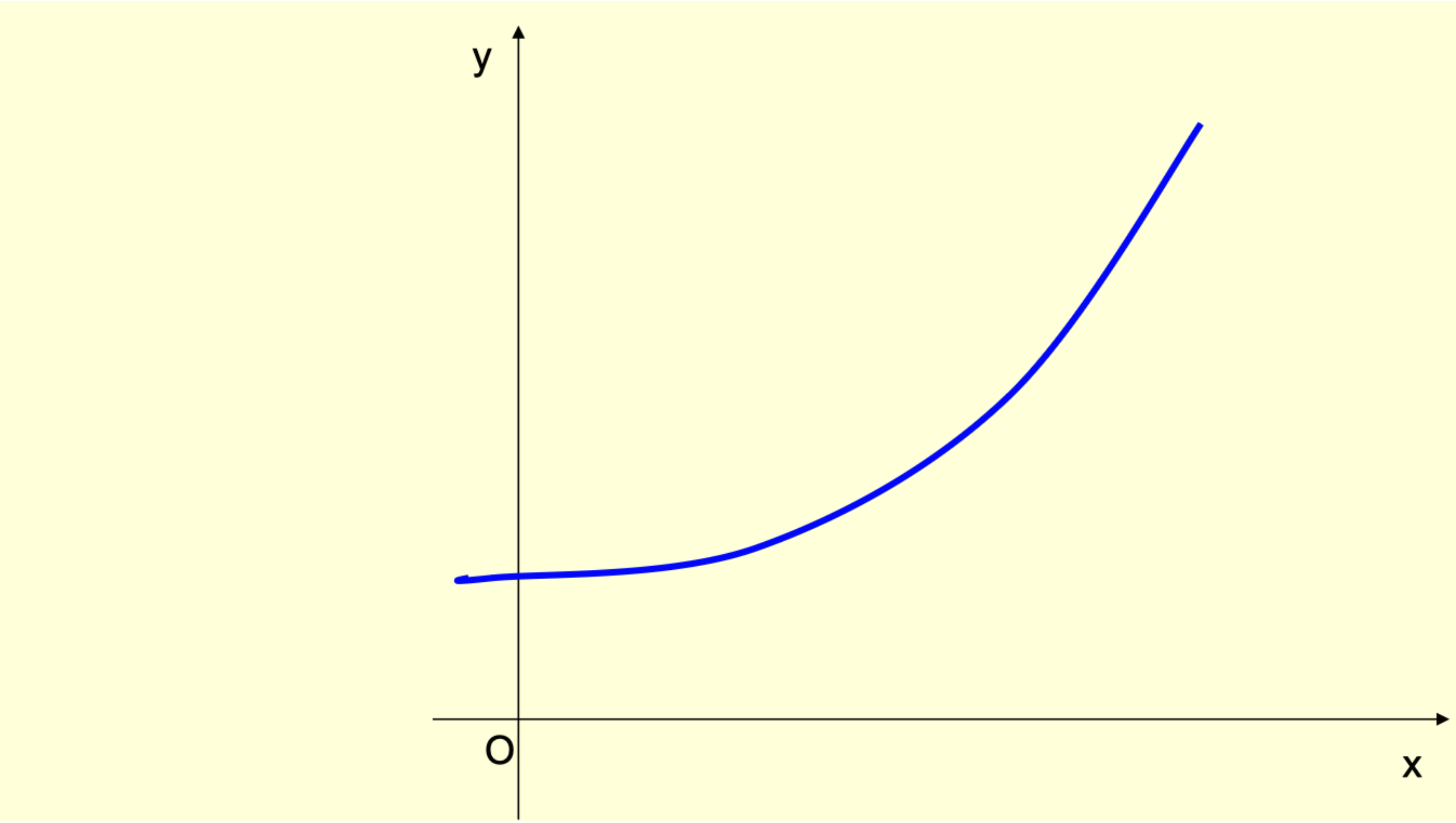
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Assegnando alla x valori sempre più grandi il corrispondente valore di $f(x)$ assume valori grandi

In tal caso si dice che " il limite della funzione, per x che tende a $+\infty$ e uguale a $+\infty$ "

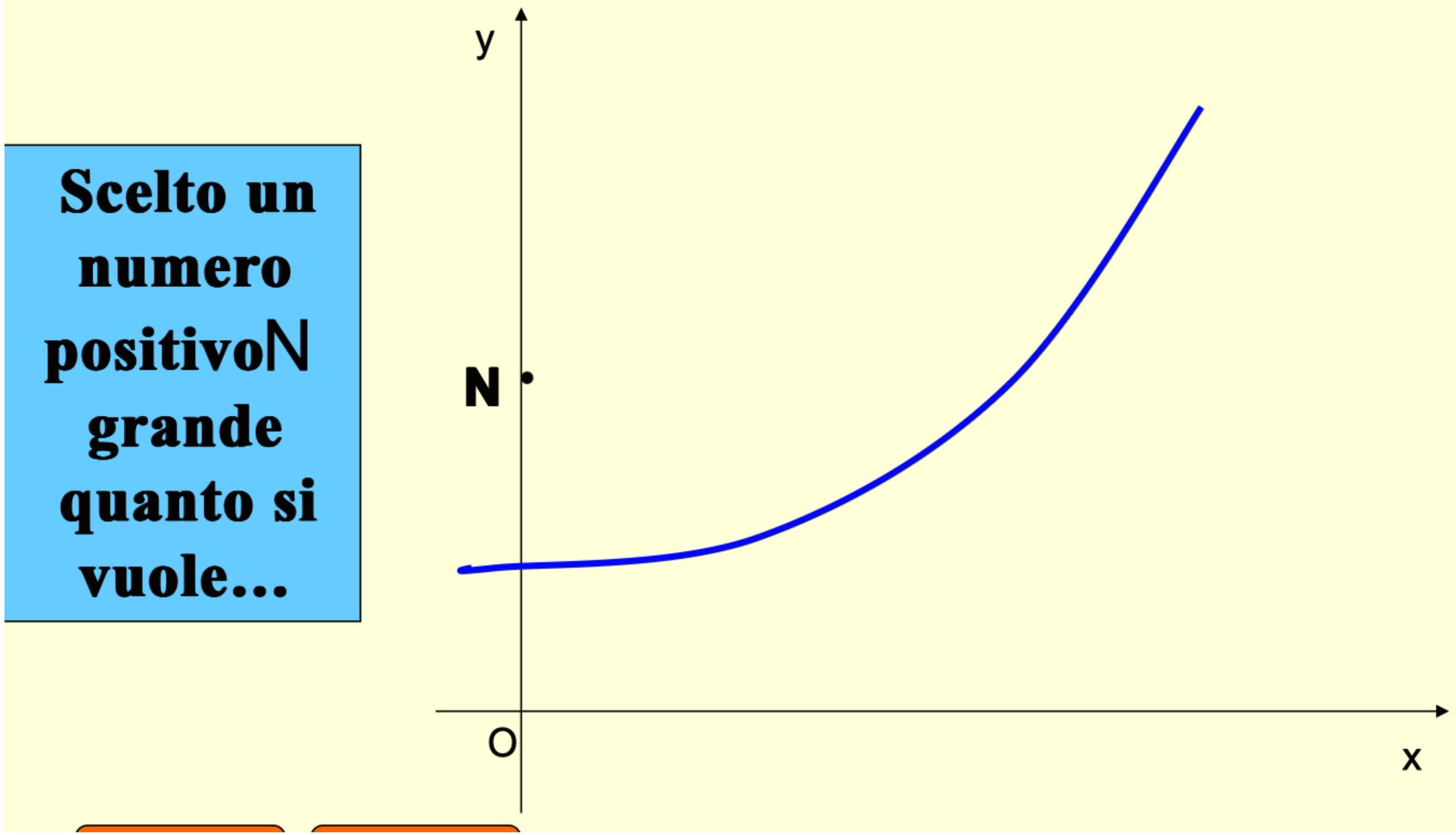
Limite finito per x che tende a un valore infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Limite finito per x che tende a un valore infinito

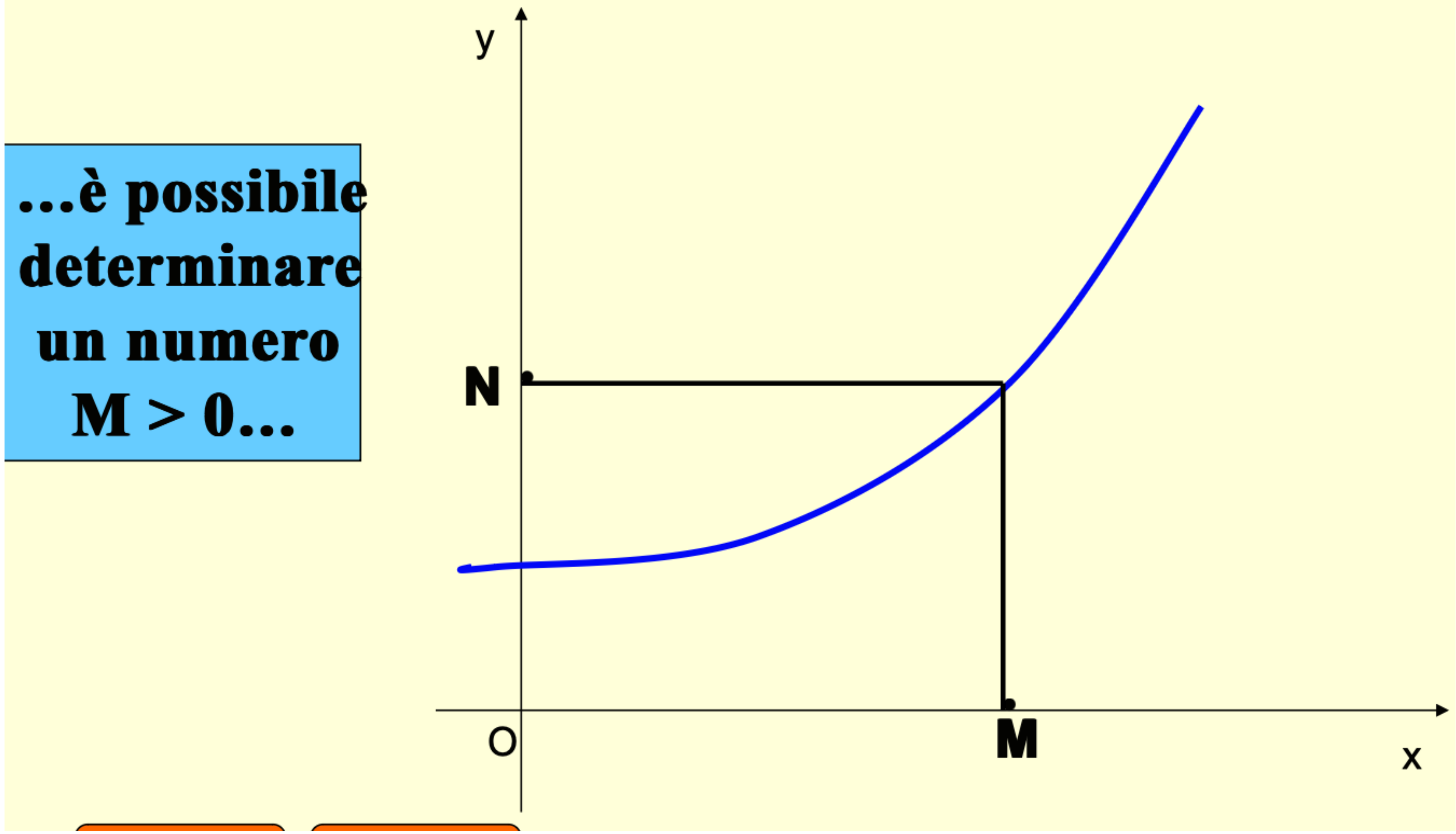
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Mathematiké tèkne

Limite finito per x che tende a un valore infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

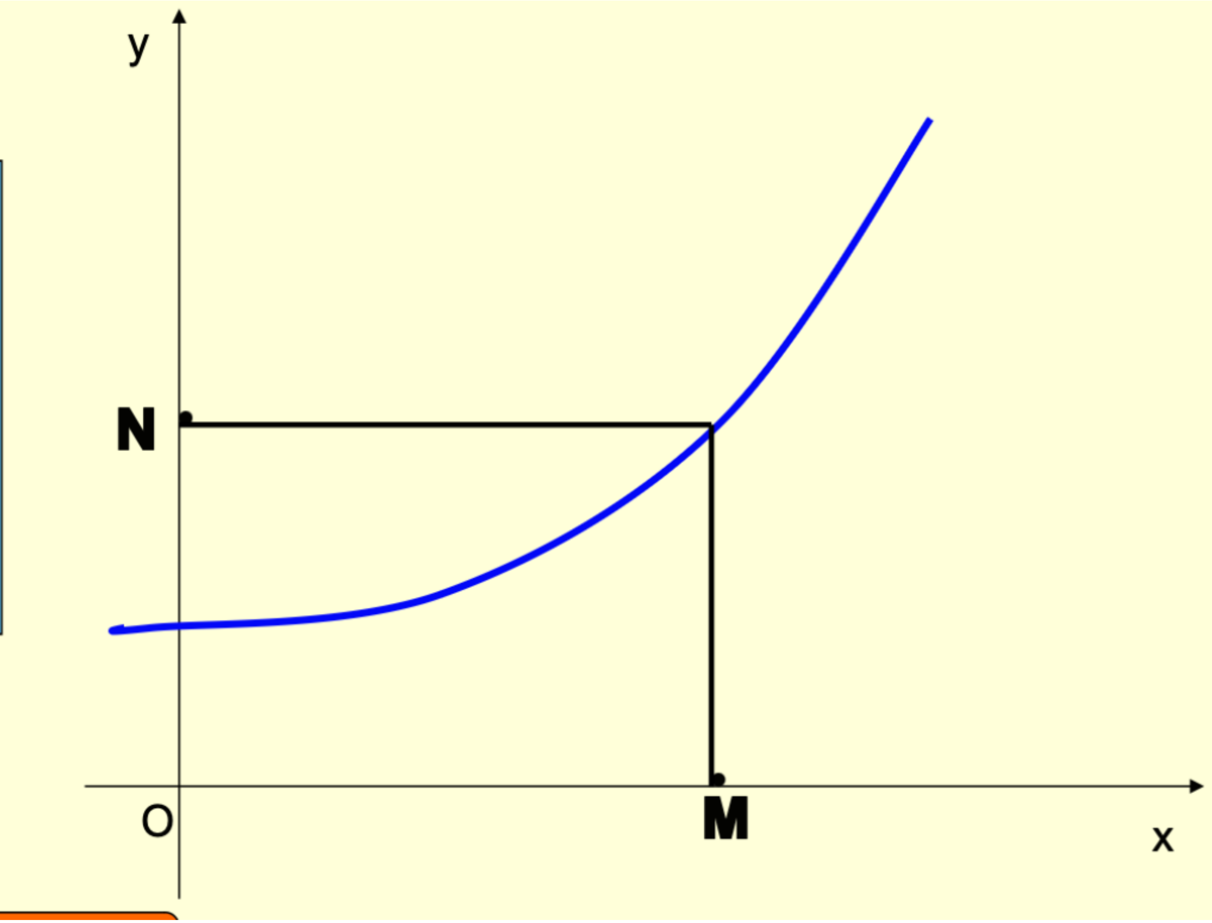


Limite finito per x che tende a un valore infinito

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

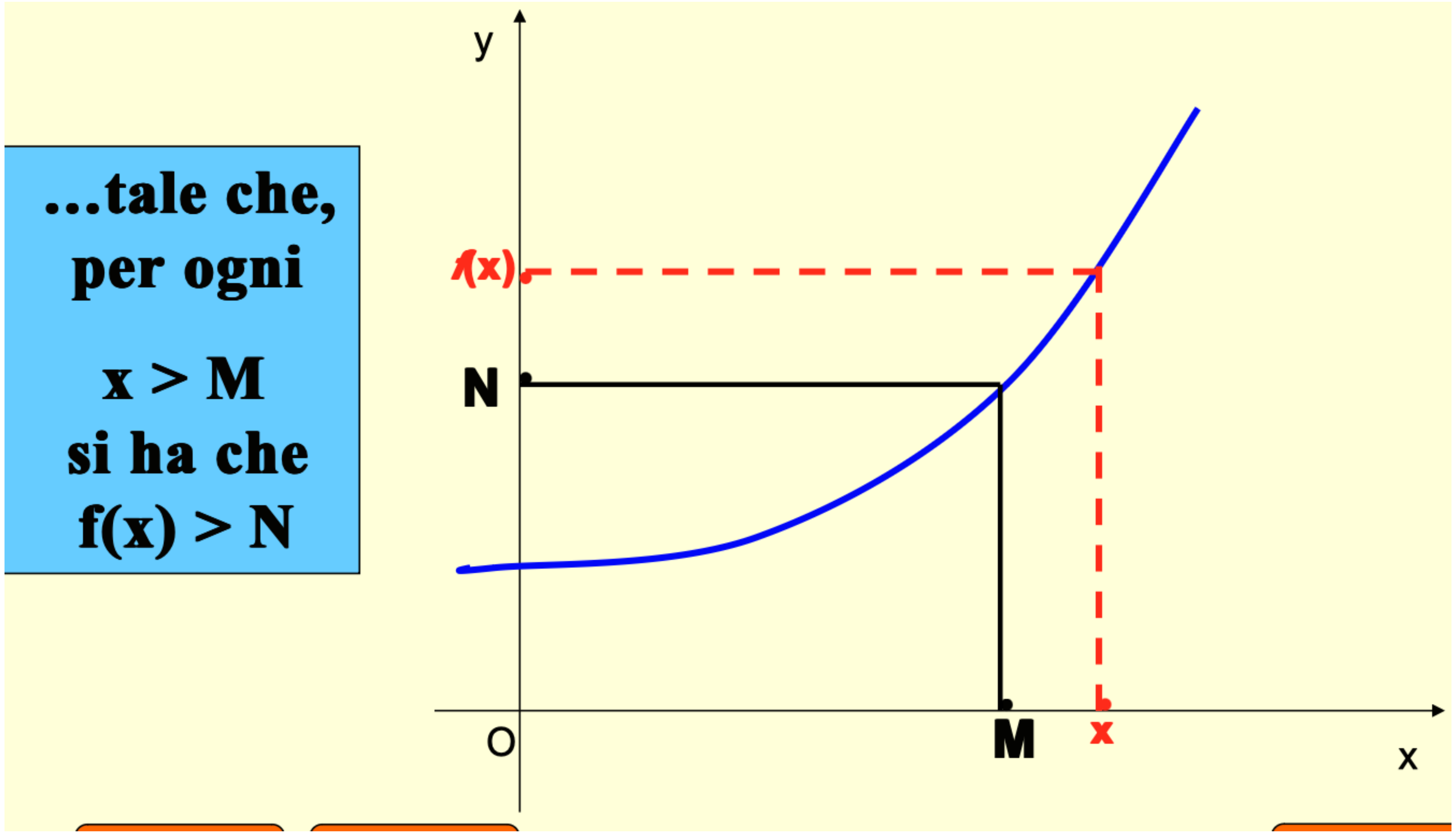
...tale che,
per ogni

x > M
si ha che
f(x) > N



Limite finito per x che tende a un valore infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Come indichiamo il Limite ?

$y = f(x)$ **Funzione**

x **Variabile indipendente**

$\lim$ **= Limite**

Funzione a cui applichiamo il limite
$\boldsymbol{y = f(x)}$

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

$\boldsymbol{l}$

finito o infinito

$\boldsymbol{x}$ **tendente a** $\boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{c}$

finito o infinito

Si legge: Limite per *x* tendente a *c* di *f(x)* uguale ad *l*