Mathematica

Funzione logaritmica

Classe Quarta

Prof. Domenico Lo Iacono

Mathematica ML

Ripasso: le potenze

Proprietà delle potenze

Si può dimostrare che dato un numero reale $a \geq 0$ ed un numero $\boldsymbol{m}$ reale qualsiasi, la potenza $\boldsymbol{a^m}$ è ancora un numero reale

Le potenze ad esponente intero, razionale o reale, che indichiamo generalmente con $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, godono delle seguenti proprietà:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^m = a^{m \cdot} b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^{m \cdot}}{b^m}$$

Ripasso: le potenze

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{(-1)^2}{(2)^2} = \frac{(1)^2}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$(2)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

Cosa succede quando l’esponente è 0?

Esercizi

Semplifica, applicando le proprietà delle potenze.

25 $2^{10} : 2^7$ [8]

26 $(10^{11} : 10^9)^2$ [10 000]

27 $(2^3)^2 : 2^2$ [16]

28 $(3^6)^2 : (3^4)^2$ [81]

29 $(8^7)^2 : (8^2)^6$ [64]

30 $(10^2 \cdot 10^5) : 10^7$ [1]

31 $(80^6 : 20^6) : 4^4$ [16]

32 $2^2 \cdot (2^{2\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ [64]

33 $[(3^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}]^{\sqrt{3}}$ [27]

34 $(5^{2-\sqrt{5}})^{2+\sqrt{5}} \cdot 5^3$ [25]

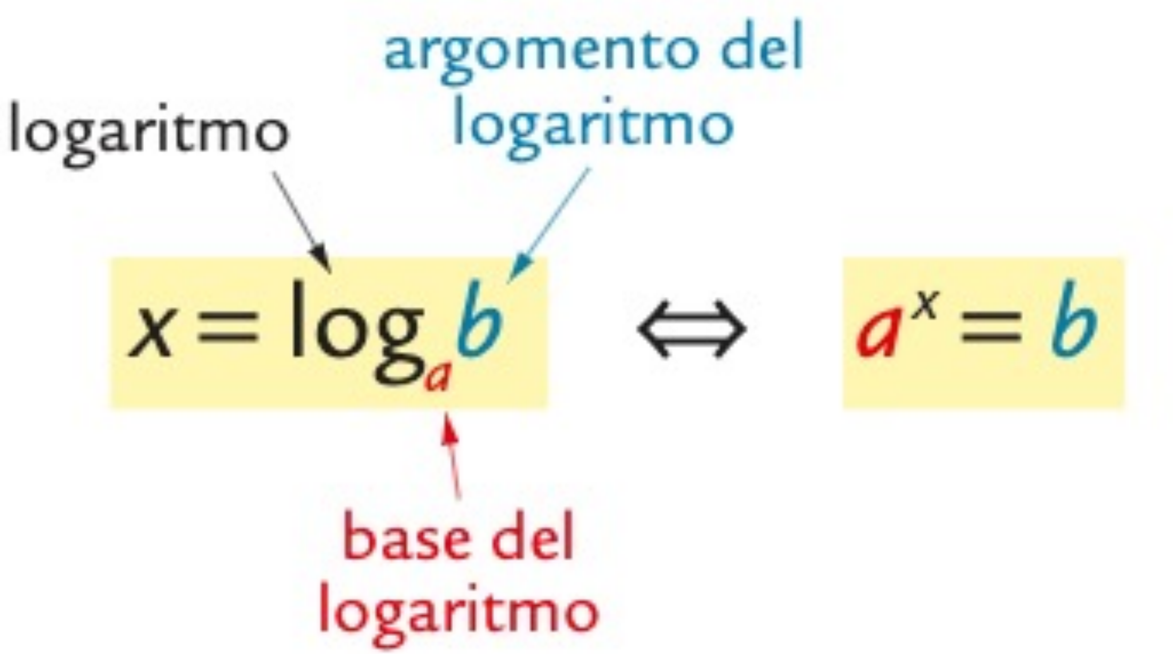
Funzione logaritmica

Funzione logaritmica

LOGARITMO IN BASE $\boldsymbol{a}$ *Di* $\boldsymbol{b}$

Dati due numeri reali positivi $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{a \neq 1}$, si chiama logaritmo in base $\boldsymbol{a}$ del numero $\boldsymbol{b}$, e si indica con $\boldsymbol{log_a b}$, l'esponente al quale si deve elevare la base $\boldsymbol{a}$ per ottenere $\boldsymbol{b}$.

Il numero $\boldsymbol{b}$ si dice argomento del logaritmo

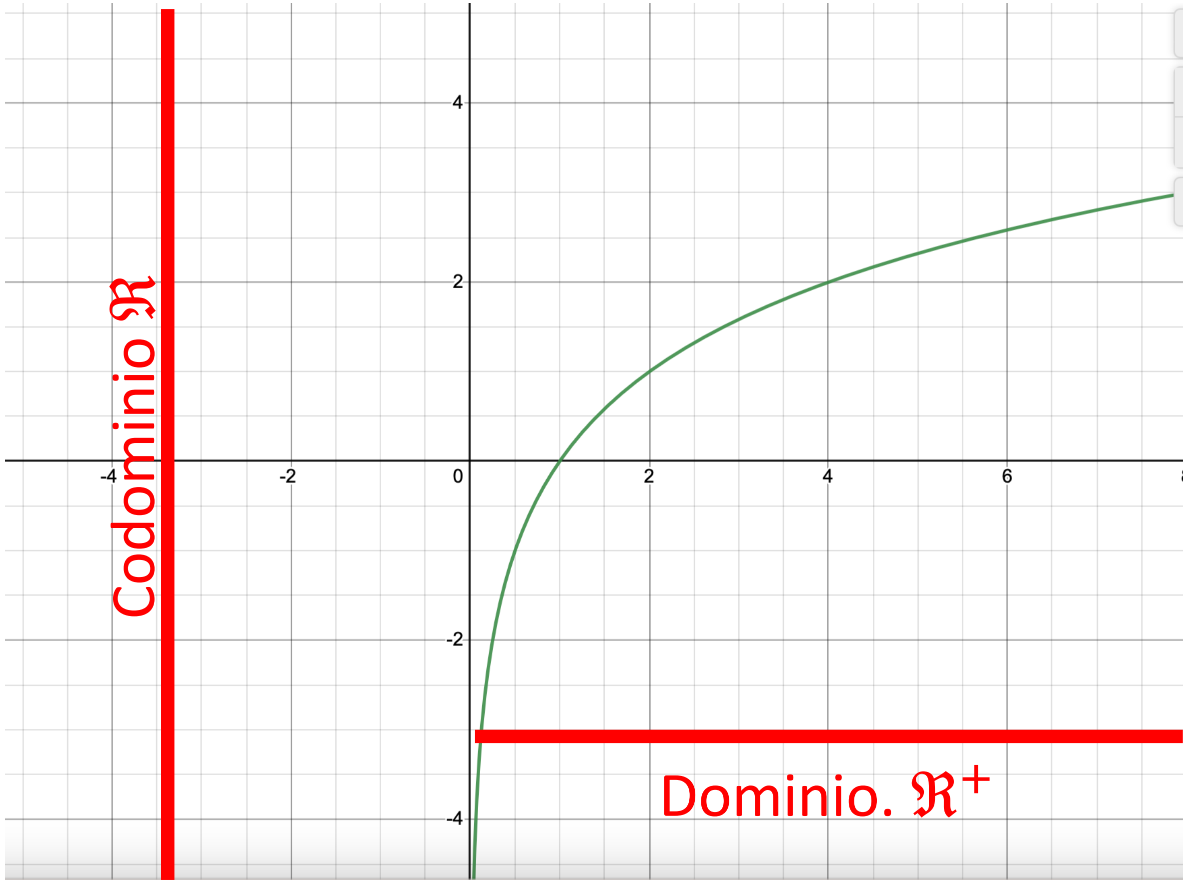


Funzione logaritmica

- La funzione logaritmica è un'equazione del tipo

$$y = log_a x \qquad a > 0 \qquad a \neq 1$$

Dominio. $\Re^+$



Codominio $\Re$

Funzione logaritmica

$$a = 1 \qquad y = log_a 1 = 0$$

Prime proprietà dei logaritmi

$$\boldsymbol{k = log_a a^k} \qquad \forall k \in R, \qquad \forall a \in R^+ - \{1\}$$

$$\boldsymbol{k = a^{log_a k}} \qquad \forall k \in R^+, \qquad \forall a \in R^+ - \{1\}$$

Esempio:

$$\boldsymbol{3 = log_2 2^3 = log_2 8}$$

$$\boldsymbol{3 = log\ 10^3 = log\ 1000}$$

$$\boldsymbol{3 = ln\ e^3}$$

Esempio:

$$\boldsymbol{3 = 2^{log_2 3}}$$

$$\boldsymbol{3 = 10^{log\ 3}}$$

$$\boldsymbol{3 = e^{log\ 3}}$$

Mathematica

Funzione logaritmica

Logaritmo da calcolare	$log_2 8$	$log_3 1$	$log_5 \frac{1}{5}$	$log_5 5$	$log_5 25$
Domanda da porsi per calcolarlo	A quale esponente devo elevare **2** per ottenere **8**	A quale esponente devo elevare **3** per ottenere **1**	A quale esponente devo **elevare** 5 per ottenere $\frac{1}{5}$	A quale esponente devo elevare **5** per ottenere **5**	A quale esponente devo elevare **5** per ottenere 2**5**
Risposta	**3**	**0**	**-1**	**1**	$\frac{1}{2}$
Valore del logaritmo	$log_2 8 = 3$	$log_3 1 = 0$	$log_5 \frac{1}{5} = -1$	$log_5 5 = 1$	$log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

Grafico di una funzione logaritmica. $a > 1$

Una funzione associa ad ogni valore di x un solo valore di

ESEMPIO $y = log_2 x$

$x = \frac{1}{8} \quad \longrightarrow \quad y = log_2 \frac{1}{8} = -3$

$x = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad y = log_2 \frac{1}{4} = -2$

$x = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad y = log_2 \frac{1}{2} = -1$

$x = 1 \quad \longrightarrow \quad y = log_2 1 = 0$

$x = 2 \quad \longrightarrow \quad y = log_2 2 = 1$

$x = 4 \quad \longrightarrow \quad y = log_2 4 = 2$

$x = 8 \quad \longrightarrow \quad y = log_2 8 = 3$

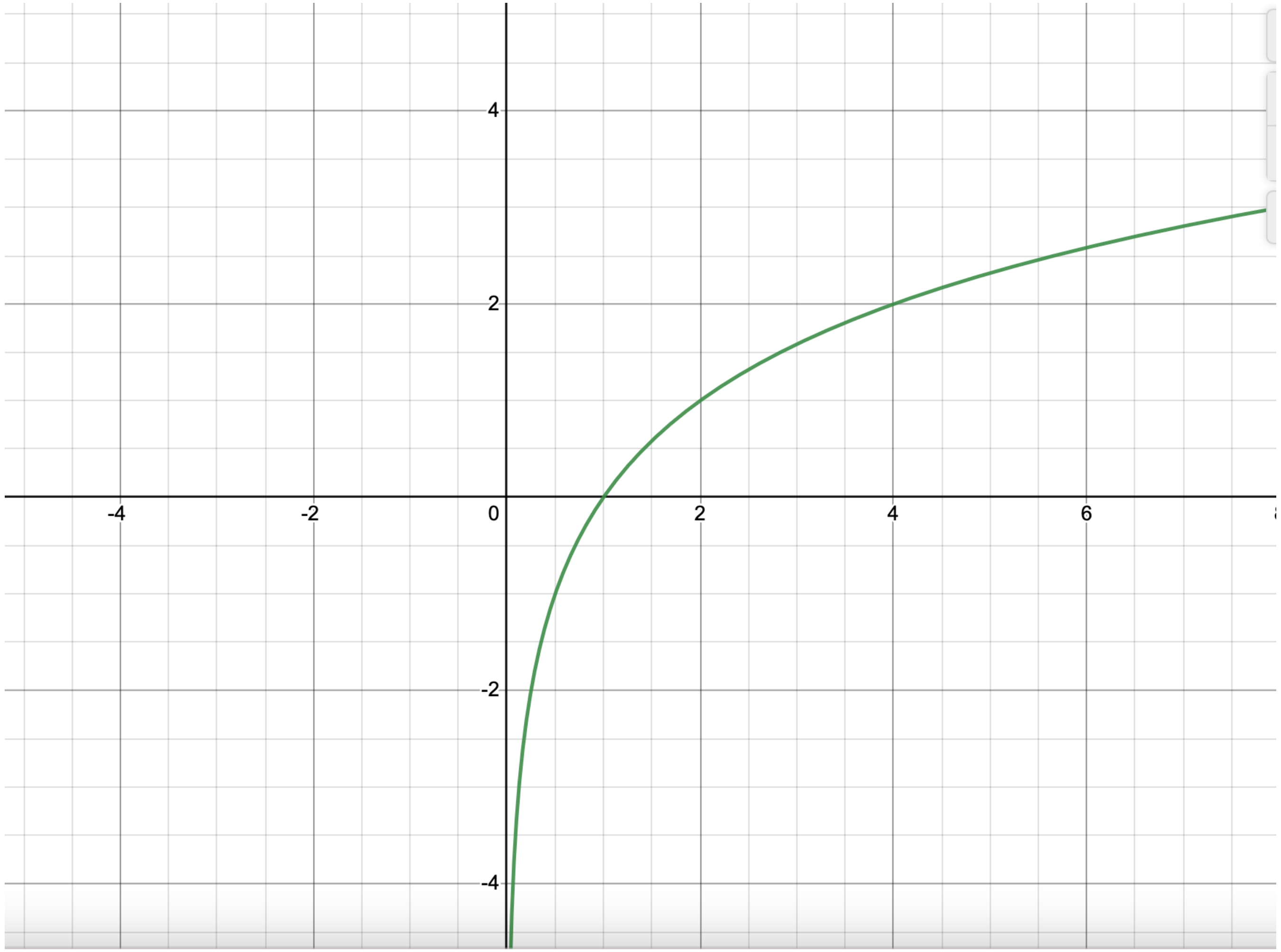
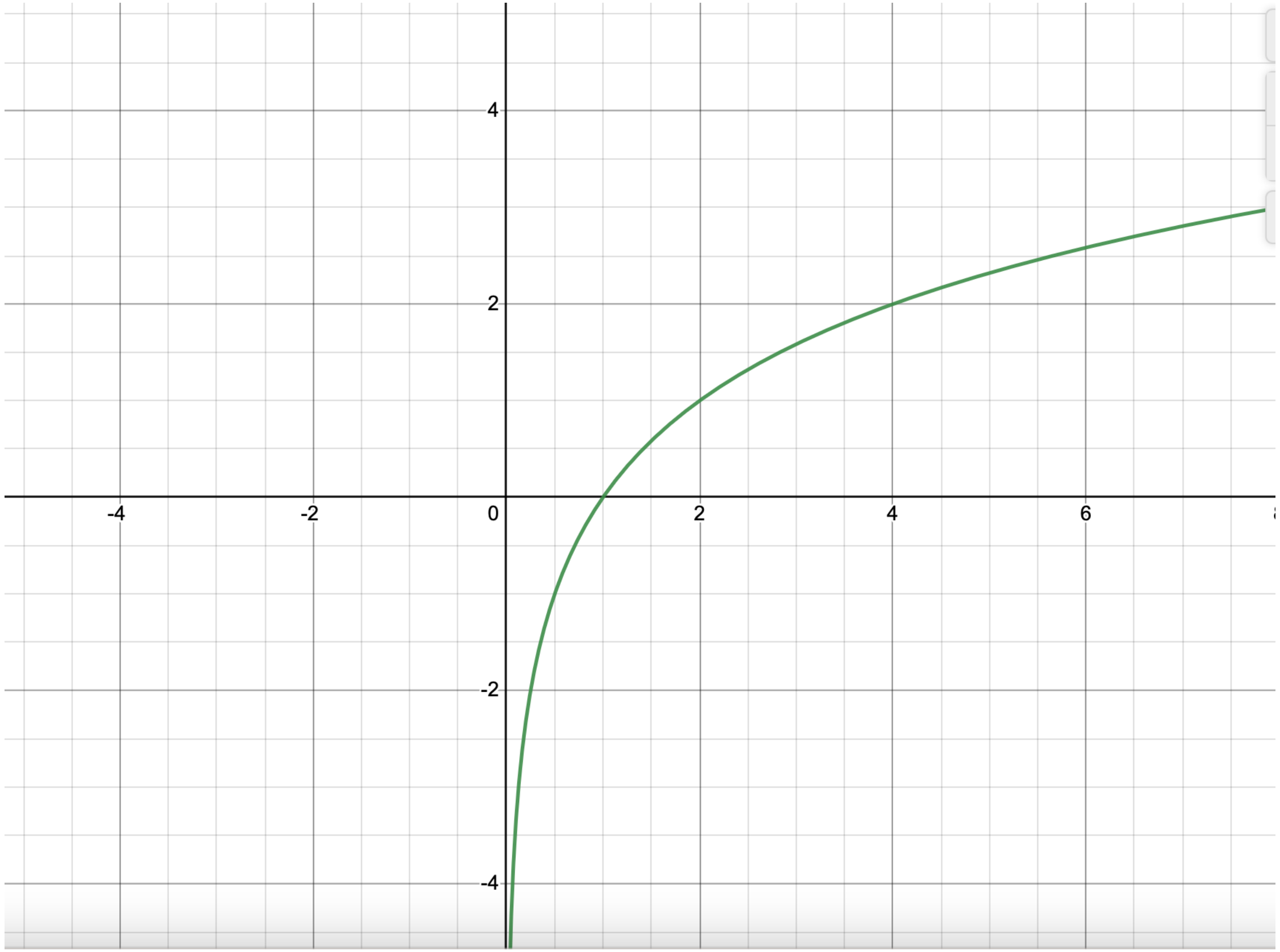


Grafico di una funzione logarimica. $a > 1$

Ad ogni coppia

Associamo un punto del piano cartesiano

$$(x, log_2 x)$$



Mathematica

Grafico di una funzione logarimica. $0 < a < 1$

Una funzione associa ad ogni valore di x un solo valore di

ESEMPIO $y = log_{\frac{1}{2}}x$

$x = \frac{1}{8} \longrightarrow y = log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} = 3$

$x = \frac{1}{4} \longrightarrow y = log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} = 2$

$x = \frac{1}{2} \longrightarrow y = log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} = 1$

$x = 1 \longrightarrow y = log_{\frac{1}{2}}1 = 0$

$x = 2 \longrightarrow y = log_{\frac{1}{2}}2 = -1$

$x = 4 \longrightarrow y = log_{\frac{1}{2}}4 = -2$

$x = 8 \longrightarrow y = log_{\frac{1}{2}}8 = -3$

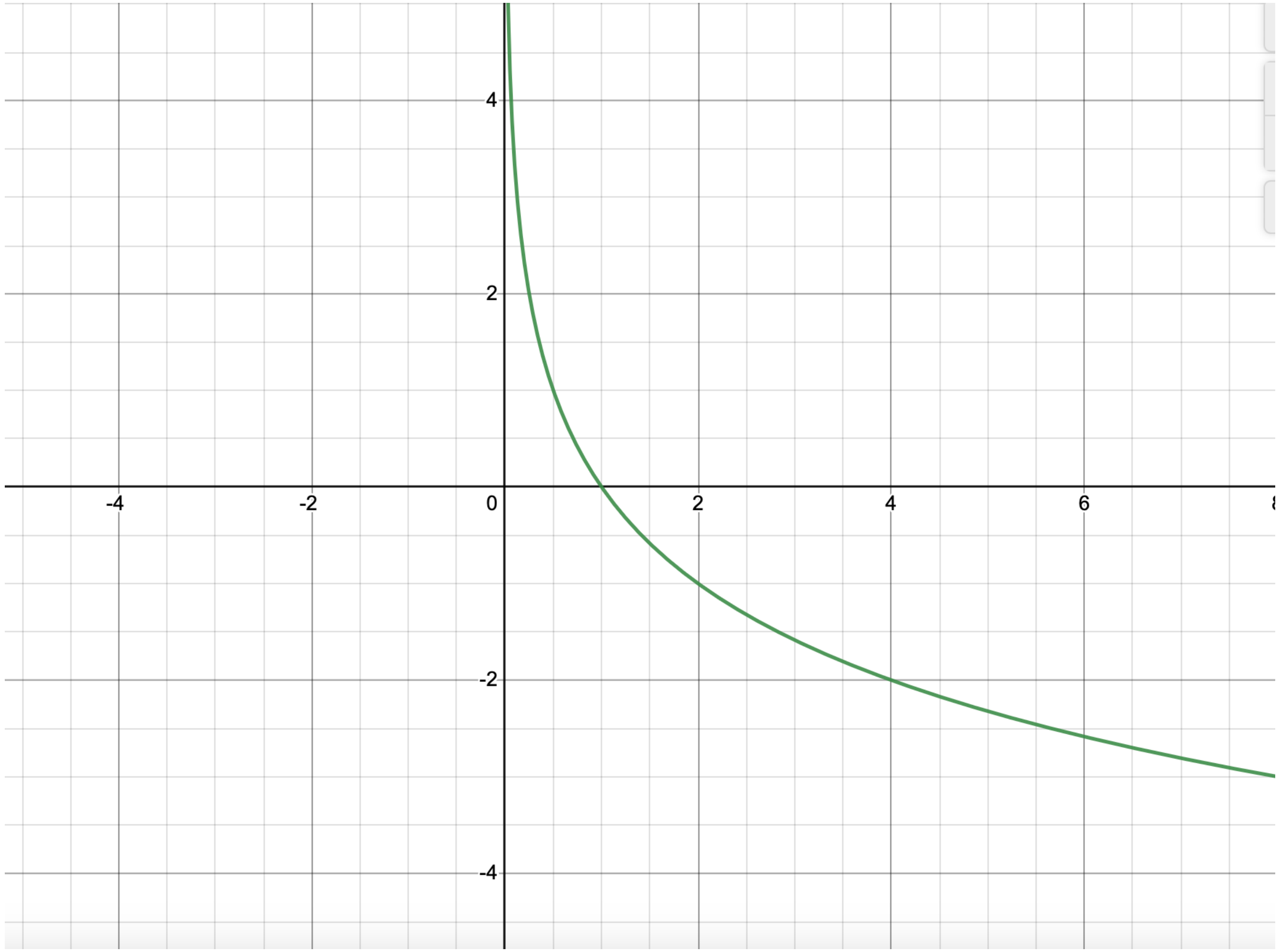


Grafico di una funzione logarimica. $0 < a < 1$

Ad ogni coppia **Associamo un punto del piano cartesiano**

$$\left(x, \log_{\frac{1}{2}} x\right)$$

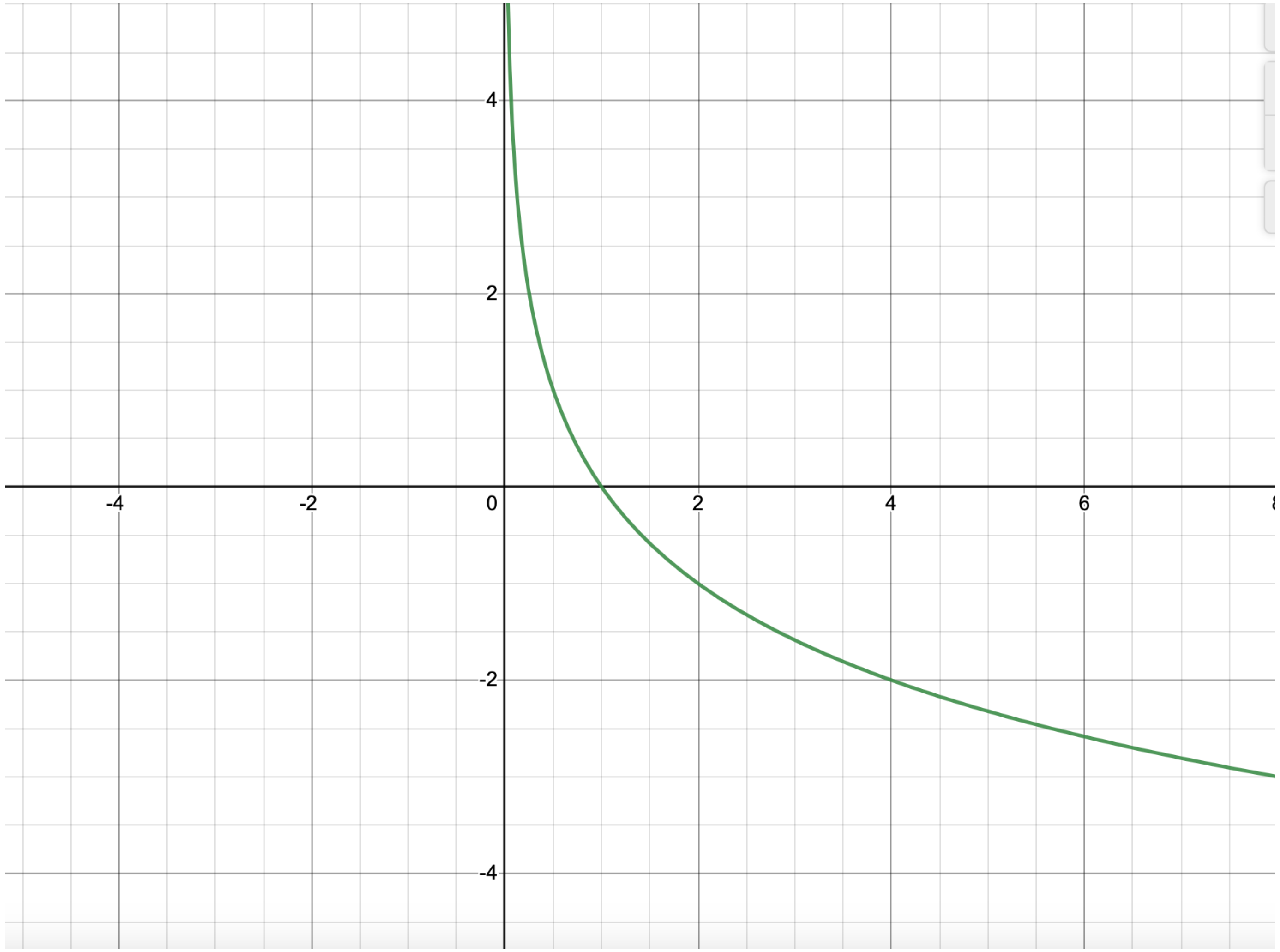
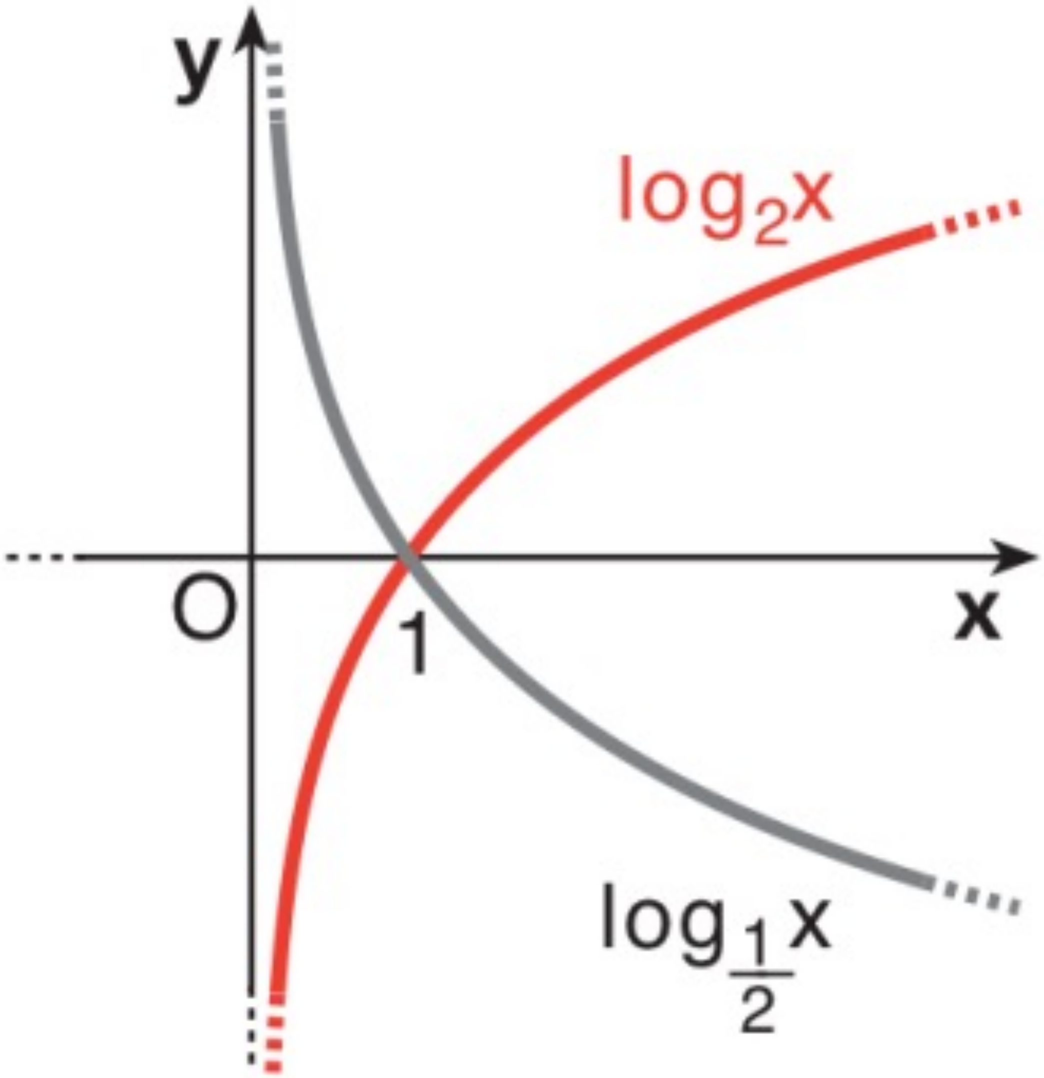


Grafico di una funzione logarimica.

$y = log_2 x$

$y = log_{\frac{1}{2}} x$

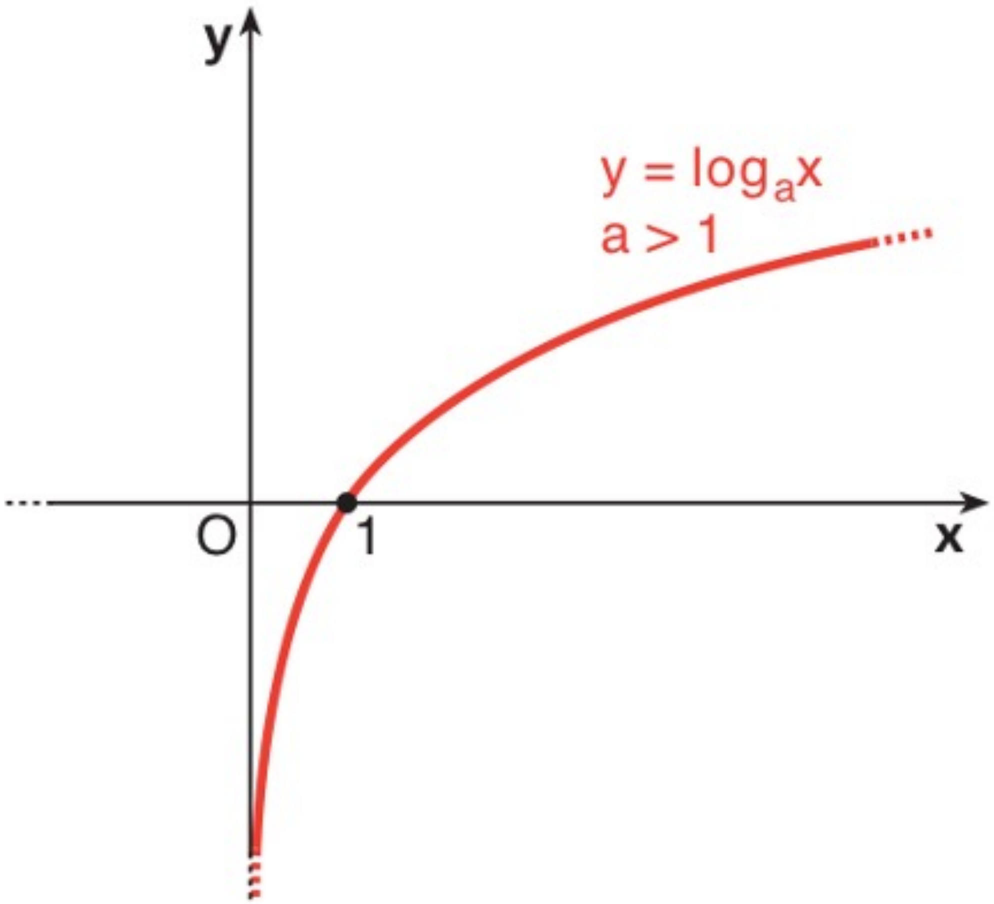


Prof. Domenico Lo Iacono

Mathematica

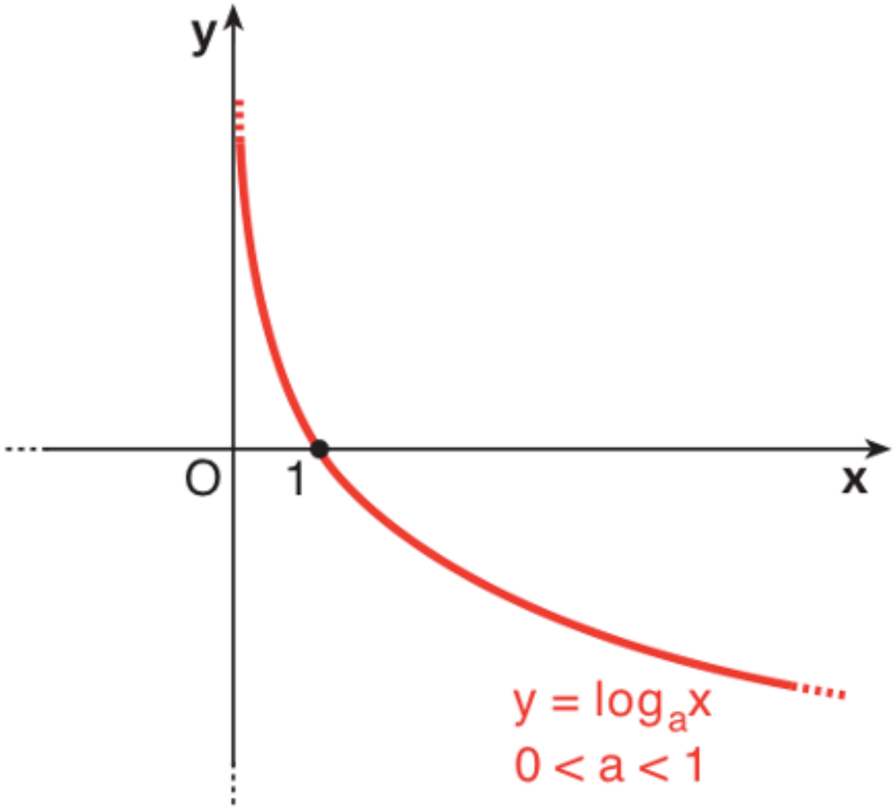
Funzione logarimica.

a. • Dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}^+$;
- funzione biiettiva;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.



Funzione logarimica.

b.
- Dominio: $\mathbb{R}^+$;
- codominio: $\mathbb{R}$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}^+$;
- funzione biiettiva;
- $\log_a x \to +\infty$ per $x \to 0$;
- $\log_a x \to -\infty$ per $x \to +\infty$.



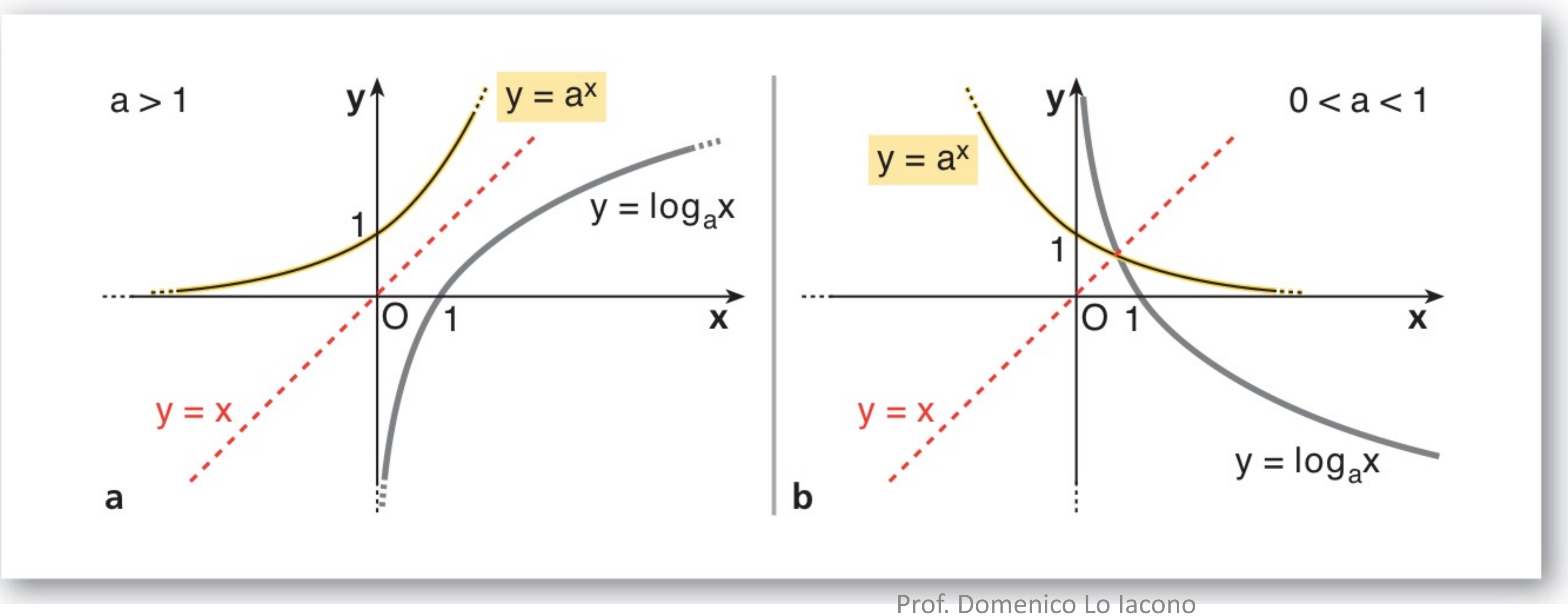
CONFRONTO

CONFRONTO

La funzione esponenziale è la funzione logaritmica sono invertibili

Invertendola si ottiene

$$y = a^x \qquad\qquad y = log_a x$$



Esercizi

1 Quale dei seguenti logaritmi **non** è definito?

A $\log_3 \frac{1}{2}$ B $\log_3 (-2)^3$ C $\log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$ D $\log_3 (-2)^4$

2 Quale dei seguenti simboli **non** è definito?

A $\log_3 (-5)^2$ B $\log_3 (-7)^3$ C $\log_3 (-0{,}5)^4$ D $\log_3 (\sqrt{2} - 1)^5$

Esercizi

3 Completa le seguenti tabelle (il primo caso è svolto come esempio).

Uguaglianza in forma logaritmica	Uguaglianza in forma esponenziale
$\log_3 x = 2$	$3^2 = x$
In base alla definizione di logaritmo, significa: «2 è l'esponente da dare a 3 per ottenere x»	
$\log_3 27 = y$	....
$\log_a 1000 = 3$	....
$\log_7 x = 3$	....

Uguaglianza in forma esponenziale	Uguaglianza in forma logaritmica
$b^3 = 1000$	$3 = \log_b 1000$
3 è l'esponente da dare a b per ottenere 1000. Quindi 3 è il logaritmo in base b di 1000	
$7^x = 200$	....
$15^2 = b$	....
$a^3 = 125$	....

Esercizi

4 Completa, calcolando i seguenti logaritmi, senza utilizzare la calcolatrice.

Logaritmo	Domanda da porsi per calcolarlo	Risposta
$\log_3 9$	Qual è l'esponente da dare a 3 per ottenere 9? La risposta è 2, poiché $3^2 = 9$.	$\log_3 9 = 2$
$\log_2 \sqrt{2}$	Qual è l'esponente da dare a 2 per ottenere $\sqrt{2}$? La risposta è $\frac{1}{2}$.	$\log_2 \sqrt{2} = \ldots$
$\log_5 \frac{1}{25}$	Qual è l'esponente da dare a 5 per ottenere $\frac{1}{25}$? Osserva che $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = (5^2)^{-1}$, quindi la risposta è	$\log_5 \frac{1}{25} = \ldots$
$\log_5 1$	Qual è l'esponente da dare a 5 per ottenere 1? La risposta è	$\log_5 1 = \ldots$
$\log_2 \sqrt[3]{4}$	Qual è l'esponente da dare a 2 per ottenere $\sqrt[3]{4}$? Osserva che $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\ldots}$, quindi la risposta è	$\log_2 \sqrt[3]{4} = \ldots$

Esercizi

5 Completa, calcolando i seguenti logaritmi.

a. $\log_2 \sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \log_2 (2 \cdot 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \log_2 (2^{1+\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = \log_2 (2^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

b. $\log_3 \sqrt[3]{9\sqrt{3}} = \log_3 (3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{\ldots}} = \log_3 (3^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{\ldots}} = \log_3 3^{\frac{5}{\ldots}} = \ldots\ldots$

c. $\log_5 \frac{5\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

6 **ESERCIZIO SVOLTO**

Completiamo l'uguaglianza $\log_2 \sqrt{2\sqrt{2}} = \ldots\ldots$

Dobbiamo scrivere al posto dei puntini il numero a cui bisogna elevare 2 per ottenere $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

Poiché $\sqrt{2\sqrt{2}} = (2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}}$, al posto dei puntini occorre scrivere il numero $\frac{3}{4}$.

Esercizi

Completa, calcolando i logaritmi senza utilizzare la calcolatrice.

7 $\log_2 8 =$ .... $\log_3 \dfrac{1}{3} =$ .... $\log_5 \sqrt{5} =$ ....

8 $\log_{10} 10^3 =$ .... $\log_3 27 =$ .... $\log_{100} \dfrac{1}{10} =$ ....

9 $\ln e^2 =$ .... $\log_2 \dfrac{1}{4} =$ .... $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt{5}} =$ ....

10 $\log_{25} 5 =$ .... $\ln 1 =$ .... $\log_7 1 =$ ....

11 $\log_{\frac{2}{3}} \dfrac{9}{4} =$ .... $\log_{10} 1000 =$ .... $\ln \dfrac{1}{e^6} =$ ....

12 $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\dfrac{9}{4}} =$ .... $\log_{10} \sqrt[3]{10\sqrt{10}} =$ .... $\ln \sqrt{\dfrac{1}{e^5}} =$ ....

13 $\log_5 \dfrac{\sqrt{5}}{25} =$ .... $\log_5 \dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} =$ .... $\log_3 \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} =$ ....

Mathematica ML

Esercizi

14 ESERCIZIO SVOLTO

Completiamo l'uguaglianza $\log_{\ldots} 10 = \frac{1}{3}$.

In base alla definizione di logaritmo, l'uguaglianza $\log_{\ldots} 10 = \frac{1}{3}$ equivale a $(\ldots)^{\frac{1}{3}} = 10$.

Il numero che, elevato a $\frac{1}{3}$, è uguale a 10 è 1000. Quindi $\log_{1000} 10 = \frac{1}{3}$.

Esercizi

Completa, individuando la base dei seguenti logaritmi.

15 $\log_{\ldots} 8 = 3$ $\quad$ $\log_{\ldots} 81 = 2$ $\quad$ $\log_{\ldots} \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

16 $\log_{\ldots} 1000 = 3$ $\quad$ $\log_{\ldots} 10 = \frac{1}{10}$ $\quad$ $\log_{\ldots} 10\,000 = 2$

17 $\log_{\ldots} e = 2$ $\quad$ $\log_{\ldots} \frac{1}{4} = 2$ $\quad$ $\log_{\ldots} 5 = 3$

18 $\log_{\ldots} 5 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\log_{\ldots} 1 = 0$ $\quad$ $\log_{\ldots} \frac{1}{5} = -1$

[Attenzione: nel secondo caso il modo di completare è unico?]

19 $\log_{\ldots} \frac{1}{5} = -1$ $\quad$ $\log_{\ldots} \frac{4}{9} = -2$ $\quad$ $\log_{\ldots} 1000 = -3$

20 $\log_{\ldots} \sqrt{\frac{1}{5}} = -1$ $\quad$ $\log_{\ldots} 2 = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\log_{\ldots} 3 = -27$

Esercizi

Completa, individuando l'argomento dei seguenti logaritmi.

22 $\log_2 \ldots = -3$ $\quad \log_3 \ldots = 3$ $\quad \log_5 \ldots = \frac{1}{3}$

23 $\log_{10} \ldots = \frac{1}{2}$ $\quad \ln \ldots = 0$ $\quad \log_{100} \ldots = -2$

24 $\ln \ldots = 2$ $\quad \log_2 \ldots = \frac{1}{3}$ $\quad \log_7 \ldots = 2$

25 $\log_{25} \ldots = -1$ $\quad \log_2 \ldots = -\frac{1}{2}$ $\quad \log_6 \ldots = 1$

26 $\log_{\frac{2}{3}} \ldots = -1$ $\quad \log_{10} \ldots = 0$ $\quad \ln \ldots = -3$

Mathematica

Proprietà dei logaritmi

1) $Log_a\ b + Log_a\ c = Log_a(bc)$ $\quad \forall b \in R^+, \quad \forall c \in R^+$

2) $Log_a(b^c) = c \cdot Log_a\ b$ $\quad \forall b \in R^+, \quad \forall c \in R$

3) $Log_a\ b - Log_a\ c = Log_a\left(\frac{b}{c}\right)$ $\quad \forall b \in R^+, \quad \forall c \in R^+$

Esercizi

Scrivi sotto forma di un unico logaritmo le seguenti espressioni. Supponi che le variabili assumano valori per cui gli argomenti di tutti i logaritmi sono positivi.

95 $\log_2 3 + \log_2 6$ $[\log_2 18]$

96 $\log_2 10 - \log_2 5$ $[1]$

97 $2\log 2 + \log 3$ $[\log 12]$

98 $2\log_3 6 - \log_3 4$ $[2]$

99 $\log 400 - 2\log 2$ $[2]$

100 $\log 500 + \frac{1}{2}\log 4$ $[3]$

101 $\frac{1}{3}\log 8 + \log\frac{1}{200}$ $[-2]$

102 $\ln(4e^5) - \ln(e^2) - 2\ln 2$ $[3]$

103 $\log 400 - 2\log 5 - \frac{1}{2}\log 4$ $[\log 8]$

104 $\log_3 600 - 2\log_3 2 - \frac{1}{2}\log_3 25 + \log_3\frac{3}{10}$ $[2]$

105 $2\log 4 - \log 2 + \log 8 - \log 16$ $[\log 4]$

106 $\frac{3}{2}\log 3 - \log 9$ $\left[\log\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

107 $\log 5 - \log\sqrt{5} + \frac{1}{4}\log 25 - \frac{3}{2}\log\sqrt[3]{5}$ $[\log\sqrt{5}]$

108 $1 + \log\sqrt{10} - \frac{1}{3}\log 10 - \log\sqrt[6]{10}$ $[\log 10]$

109 $7\ln x - \ln y$ $\left[\ln\frac{x^7}{y}\right]$

110 $8\ln(x+5) - 4\ln x$ $\left[\ln\frac{(x+5)^8}{x^4}\right]$

111 $\frac{1}{2}(\log x + \log y) - 2\log(x-y)$ $\left[\log\frac{\sqrt{xy}}{(x-y)^2}\right]$

112 $\log(x-y) + \log(x+y) - \log(x^2 - 2xy + y^2)$ $\left[\log\frac{x+y}{x-y}\right]$

Esercizi

115 **ESERCIZIO GUIDATO**

Supposto $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, scrivi $\log(xy^4z^3)$ sotto forma di somme algebriche di logaritmi di x, y e z.

$\log(xy^4z^3) = \log x + \log y^4 + \ldots\ldots =$ Ricorda che $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

$= \log x + \ldots\ldots \log y + \ldots\ldots \log z$ Ricorda che $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$

Esercizi

Supposto $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, scrivi sotto forma di somme algebriche di logaritmi di x, y o z i seguenti logaritmi.

116 $\log (xy^2)$ $\quad [\log x + 2 \log y]$

117 $\log \dfrac{x^3}{y}$ $\quad [3 \log x - \log y]$

118 $\log (2x^2y)$ $\quad [\log 2 + 2 \log x + \log y]$

119 $\log (y\sqrt[3]{z})$ $\quad \left[\log y + \dfrac{1}{3}\log z\right]$

120 $\log \dfrac{x}{\sqrt{y}}$ $\quad \left[\log x - \dfrac{1}{2}\log y\right]$

121 $\log \sqrt{\dfrac{xy}{z}}$ $\quad \left[\dfrac{1}{2}(\log x + \log y - \log z)\right]$

122 $\log \dfrac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{z^3}}$ $\quad \left[\dfrac{1}{3}\log x + \dfrac{1}{3}\log y - \dfrac{3}{2}\log z\right]$

123 $\log \dfrac{\sqrt{x}}{y\sqrt[3]{z}}$ $\quad \left[\dfrac{1}{2}\log x - \log y - \dfrac{1}{3}\log z\right]$

124 $\log \dfrac{1}{xy\sqrt{z}}$ $\quad \left[-\log x - \log y - \dfrac{1}{2}\log z\right]$

125 $\log \dfrac{x}{\sqrt{y}\cdot\sqrt[3]{z}}$ $\quad \left[\log x - \dfrac{1}{2}\log y - \dfrac{1}{3}\log z\right]$

Esercizi

Esercizi

Mathematica ML

Esercizi