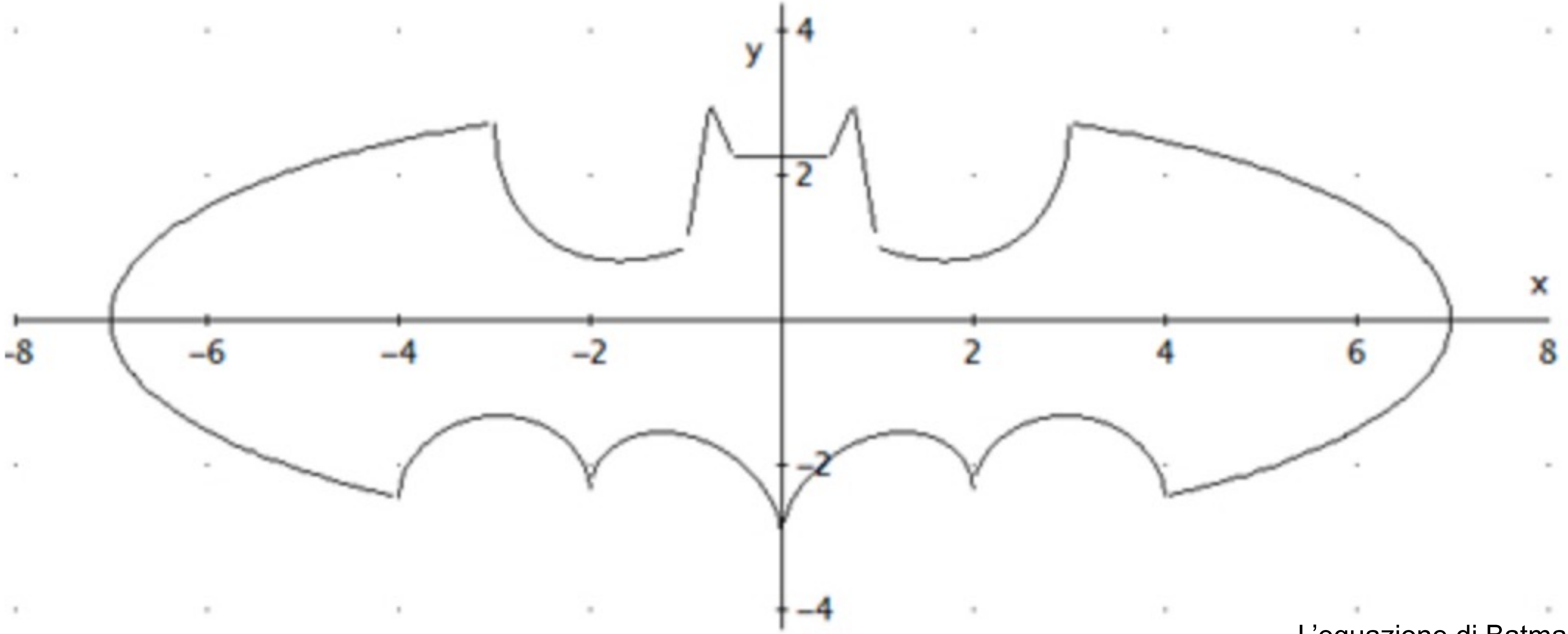
Mathematica ML

Carta penna e calamaio

Mathematica

Studio di funzione e lettura del grafico



L'equazione di Batman

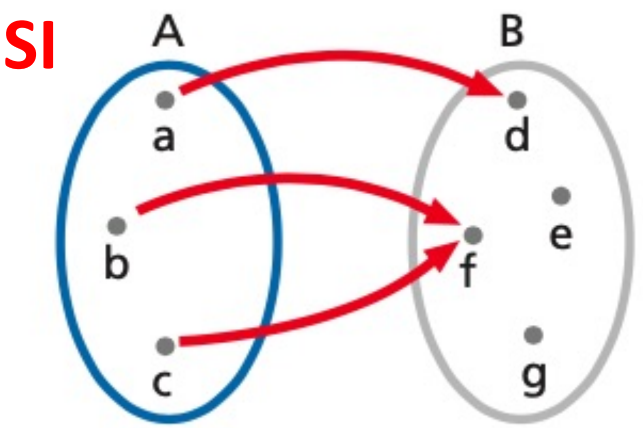
Mathematica

Studio di funzione e lettura del grafico

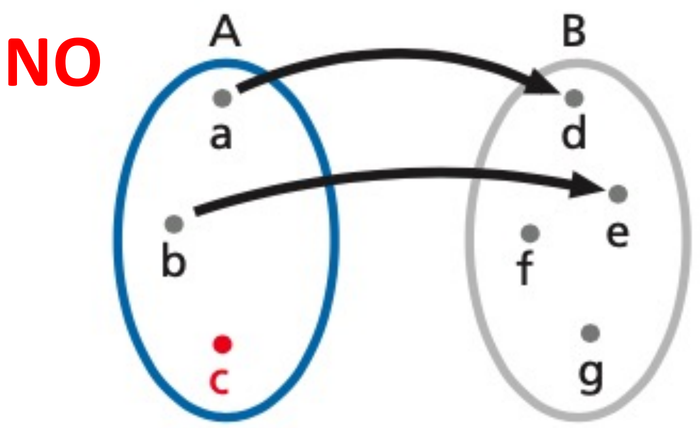
Definizione di funzione

DEFINIZIONE

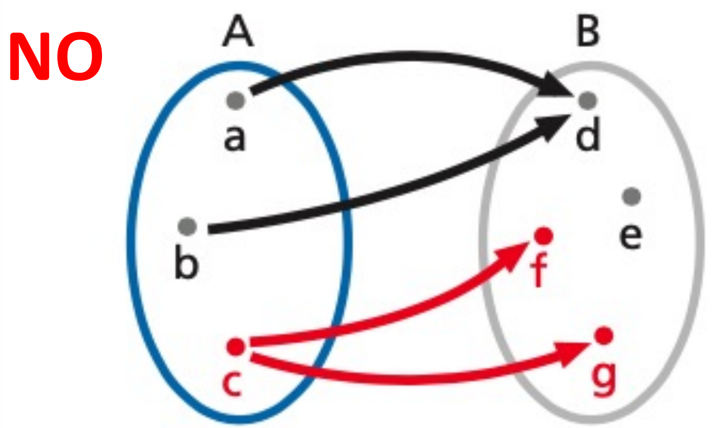
Una relazione *f* fra due insiemi *A* e *B* è una **funzione** se a *ogni* elemento di *A* associa *uno e un solo* elemento di *B*



a. La relazione è una funzione: da ogni elemento di *A* parte una sola freccia.

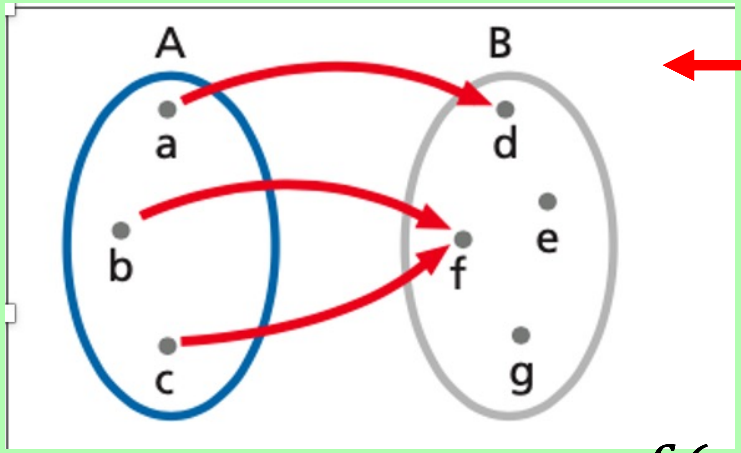


b. La relazione *non* è una funzione: *c* è un elemento di *A* che *non* è in relazione.



c. La relazione *non* è una funzione: all'elemento *c* di *A* corrispondono *due* elementi di *B*.

DOMINIO → ← **CODOMINIO**

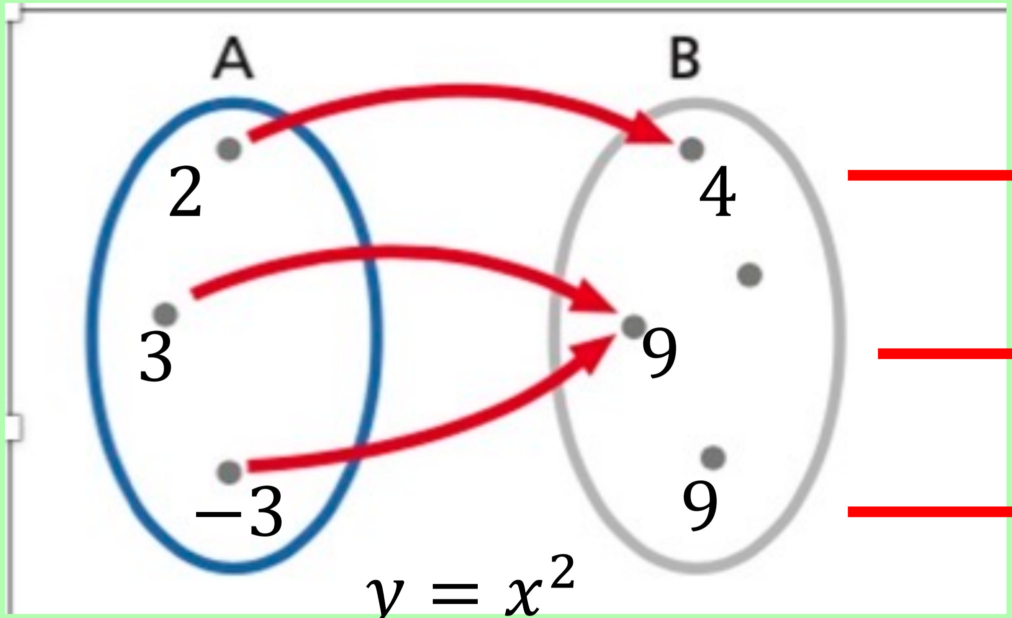


x $\qquad$ $y = f(x)$

Esempio

$y = f(x)$

$y = x^2$



$y = x^2$

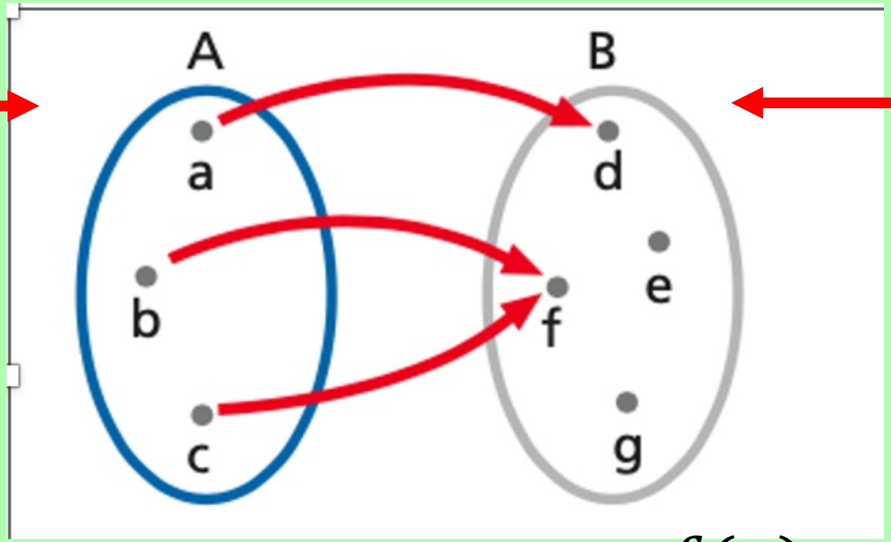
→ $y = 2^2 = 4$

→ $y = 3^2 = 9$

→ $y = (-3)^2 = 9$

DOMINIO

CODOMINIO



x $\quad\quad y = f(x)$

x **è detta** **controimmagine** **di *y*.**

immagine di *x* mediante la funzione *f*.

Il sottoinsieme di *B* formato dalle immagini degli elementi di *A* è detto **insieme immagine**.

Esempio

Stabiliamo se le seguenti curve rappresentano il grafico di una funzione.

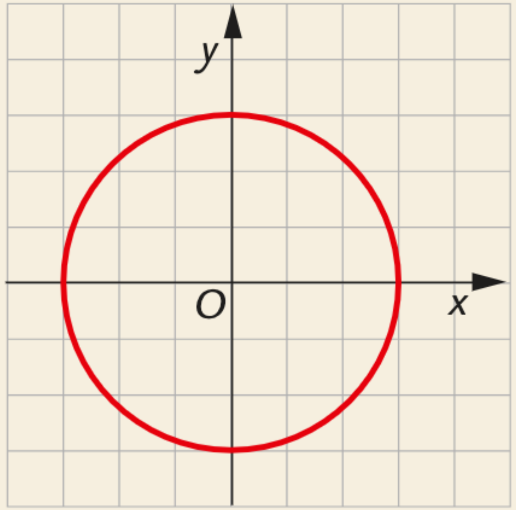


Figura a

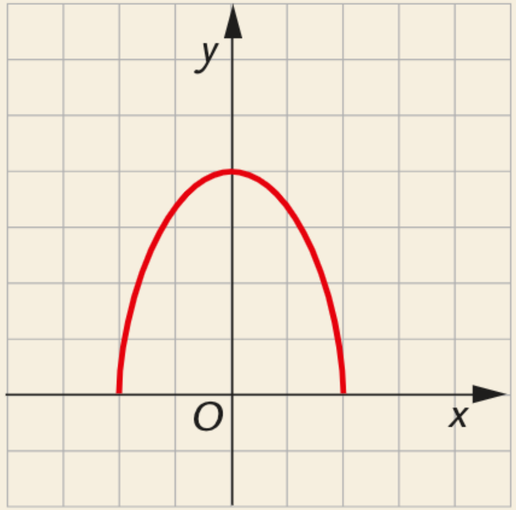


Figura b

NO

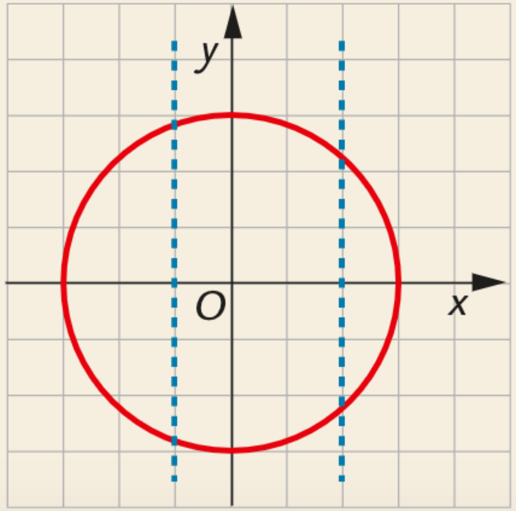


Figura c

SI

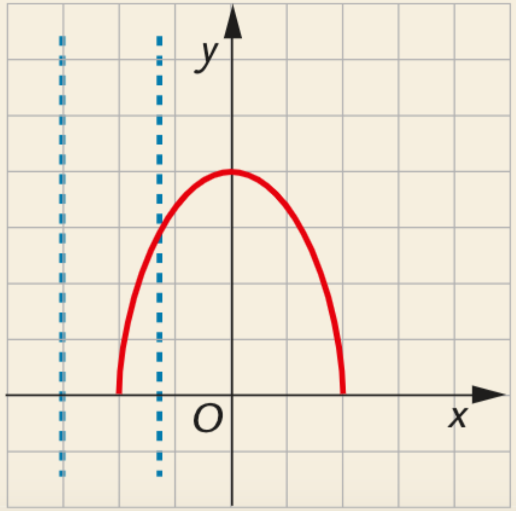
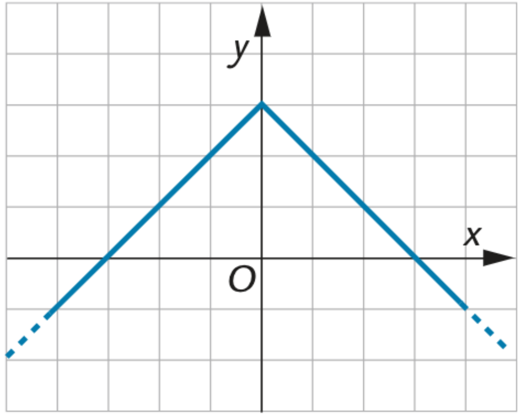


Figura d

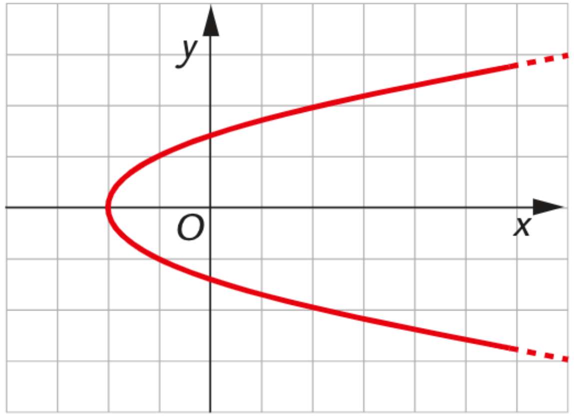
Esercizio

Interpretazione di grafici

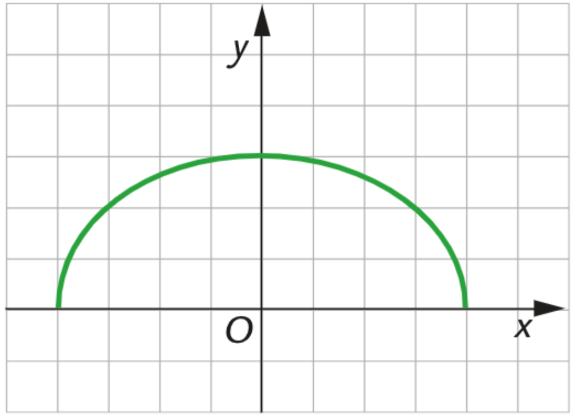
36 Per ciascuna delle curve rappresentate nelle seguenti figure, stabilisci se si tratta del grafico di una funzione.



a.

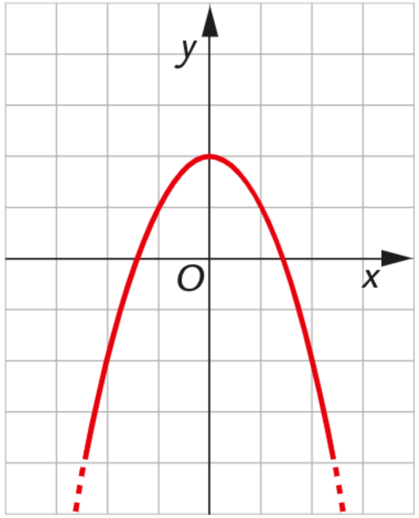


b.

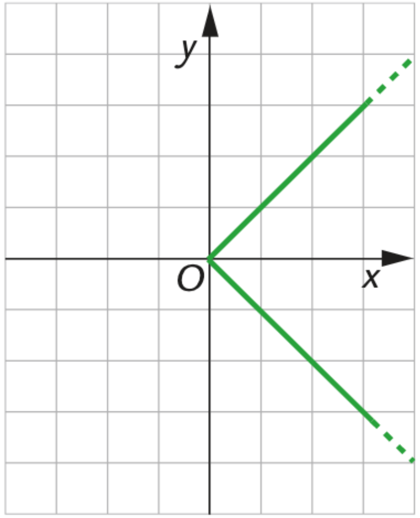


c.

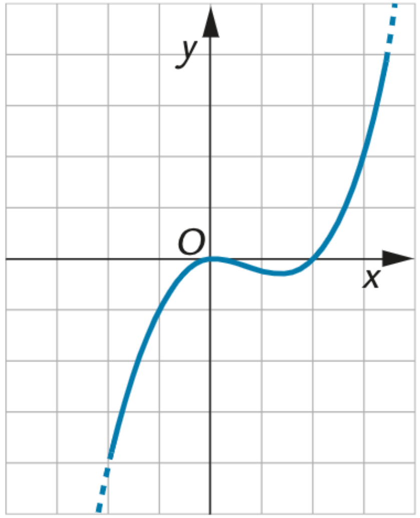
37 Per ciascuna delle curve rappresentate nelle figure seguenti, stabilisci se si tratta del grafico di una funzione.



a.



b.



c.

Mathematica

Esercizio

Mathematica ML

Funzioni numeriche

Funzioni numeriche

Se *A* e *B* sono numerici, le funzioni sono dette **funzioni numeriche**.

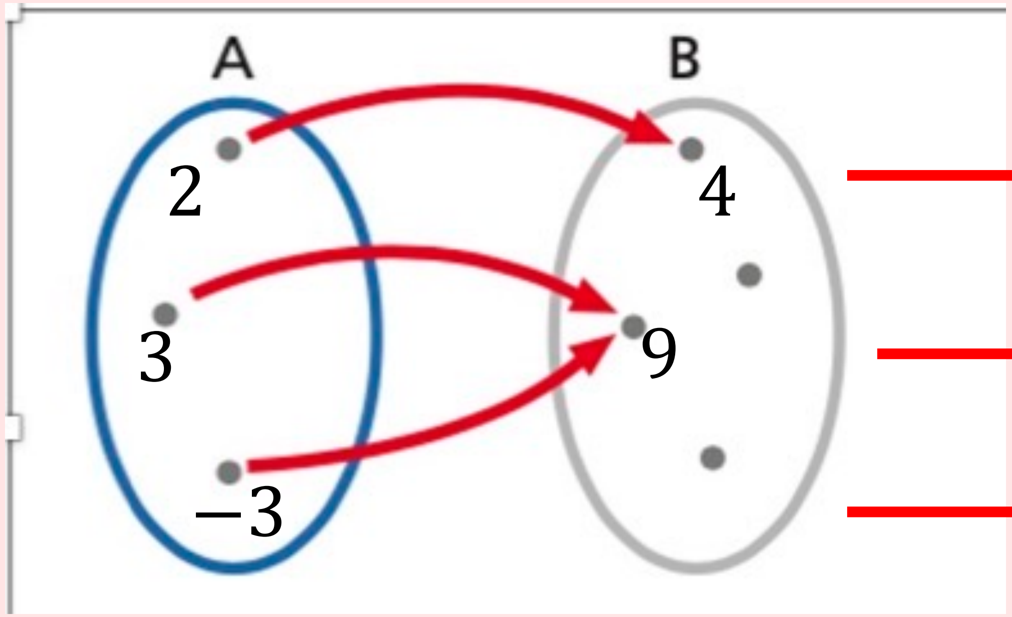
Esse sono descrivibili con un'**espressione analitica**, cioè una formula.

$$f : x \rightarrow x^2$$

Esempio

$y = f(x)$

$y = x^2$



$y = 2^2 = 4$

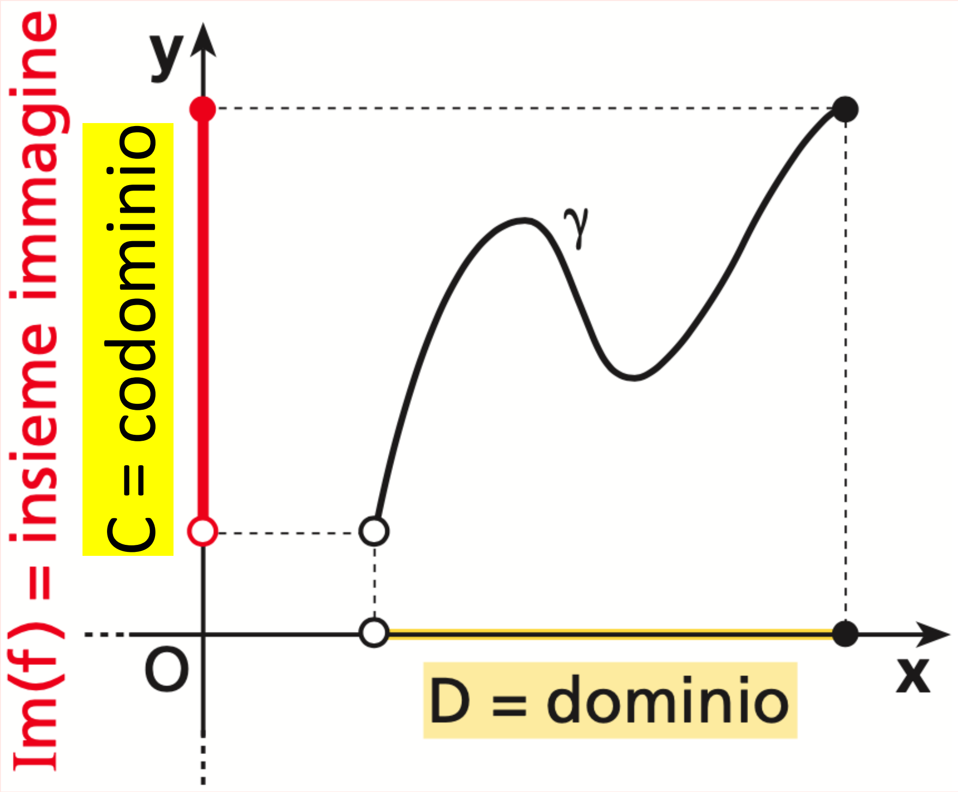
$y = 3^2 = 9$

$y = (-3)^2 = 9$

Il valore che assume *y* dipende da quello attribuito a *x*: per tale motivo *y* si dice **variabile dipendente** e *x* si dice **variabile indipendente**.

Mathematica

Funzioni numeriche



Di una funzione numerica

si studia il **grafico**, ossia l'insieme dei punti $P(x; y)$ del piano cartesiano tali che $y = f(x)$.

Il grafico è anche detto **diagramma cartesiano.**

L'espressione analitica di una funzione può avere due forme:

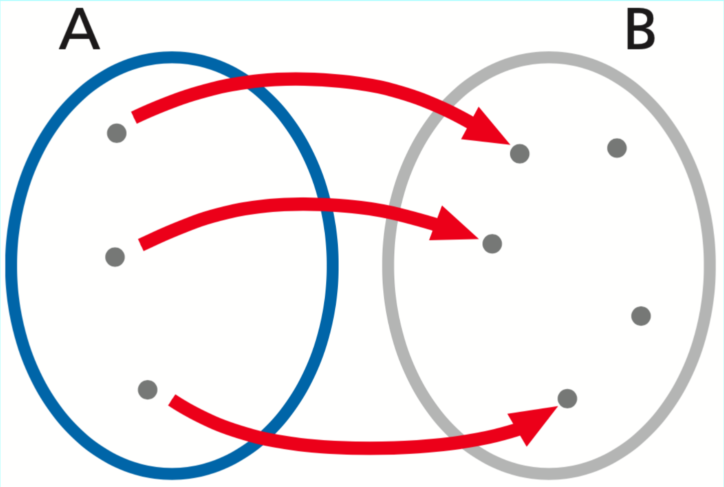
- **forma esplicita**, del tipo $y = 2x^2 - 1$;
- **forma implicita**, del tipo $2x^2 - y - 1 = 0$.

Funzioni iniettive, suriettive e biettive

Funzioni iniettive e suriettive

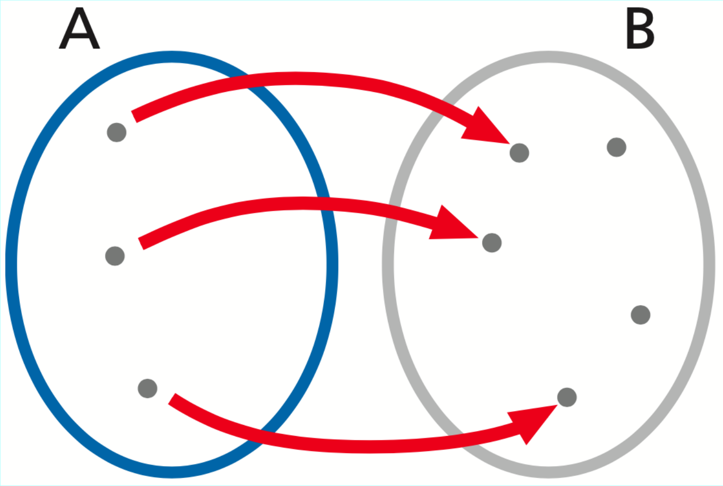
DEFINIZIONE

Una funzione da *A* a *B* è **iniettiva** se ogni elemento di *B* è immagine di al più un elemento di *A*.



Si ha l'iniettività quando

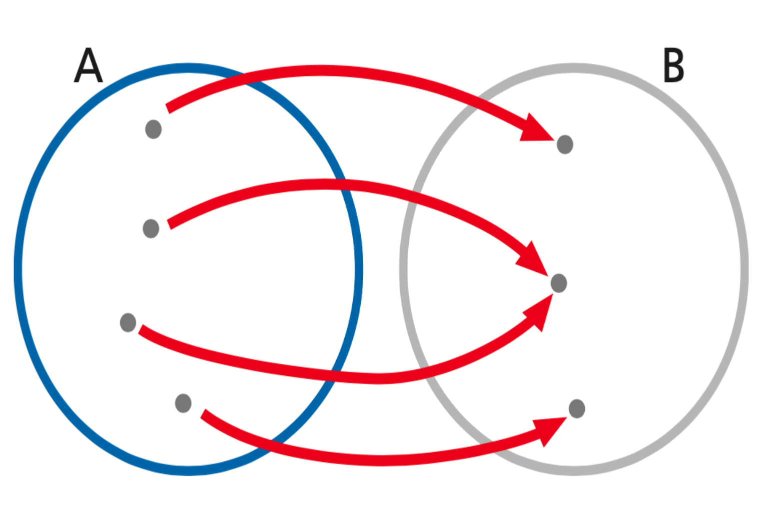
a due elementi distinti del dominio



corrispondono sempre due elementi distinti del codominio

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

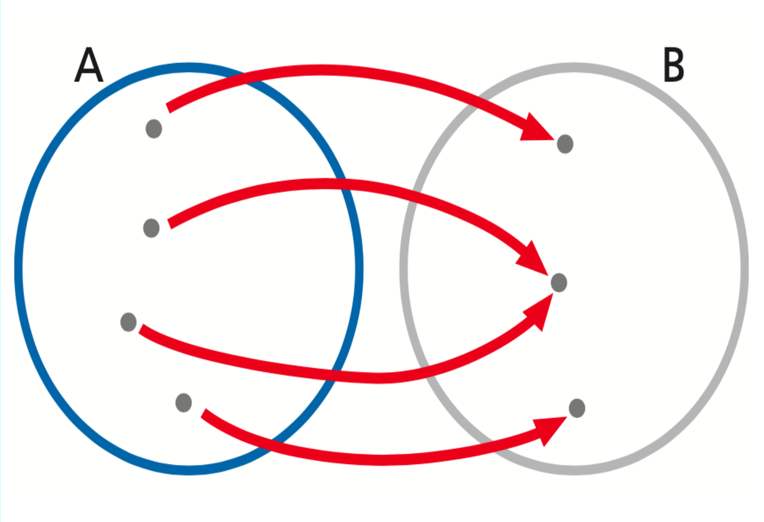
Funzioni iniettive e suriettive



DEFINIZIONE

Una funzione da *A* a *B* è **suriettiva** se ogni elemento di *B* è immagine di almeno un elemento di *A*.

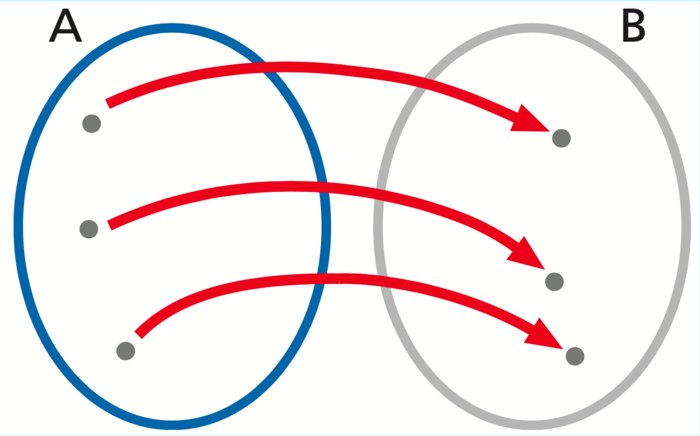
Si ha la suriettività quando



il codominio *B* coincide con l'insieme immagine.

Si può sempre ottenere una funzione suriettiva a partire da *f* restringendo il codominio all'insieme immagine.

Funzioni iniettive e suriettive



DEFINIZIONE

Una funzione da *A* a *B* è **biunivoca**, o **biiettiva**, quando è sia iniettiva sia suriettiva

In una funzione biunivoca c'è una corrispondenza «uno a uno»: ogni elemento di *A* è l'immagine di uno e un solo elemento di *B* e viceversa.

Dominio naturale o Campo di Esistenza, CE di $y = f(x)$

Dominio naturale o Campo di Esistenza, CE di $y = f(x)$

DEFINIZIONE

Il **Dominio naturale** è l'insieme più ampio dei valori reali *x* per cui esiste il corrispondente valore reale *y*.

Il dominio naturale si icava dall'espressione analitica della funzione.

ESEMPIO

Troviamo il dominio naturale della funzione $y = \sqrt{x-2}$

Per $x < 2$ → $y = \sqrt{x-2}$. la radice perde di significato

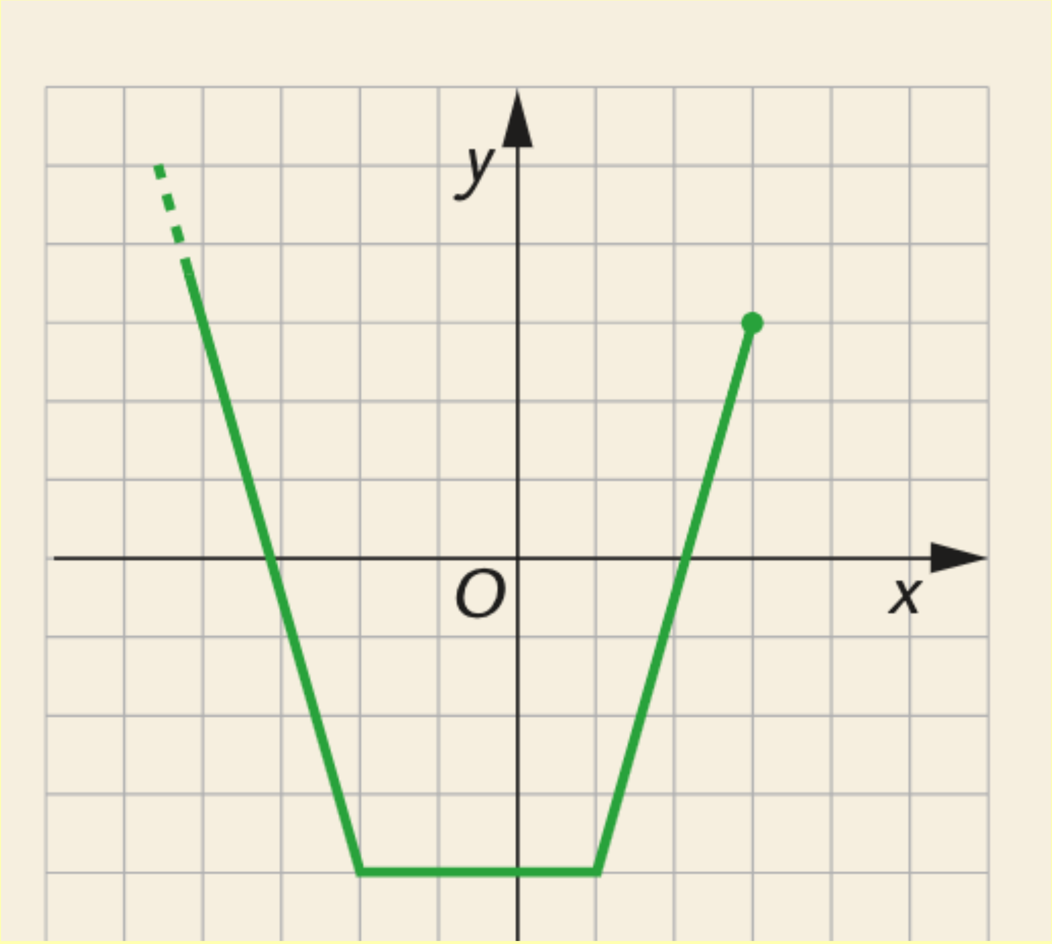
Il **dominio naturale *D*** è: $x - 2 \geq 0$. →. $x \geq 2 \; con \; x \in \mathbb{R}$

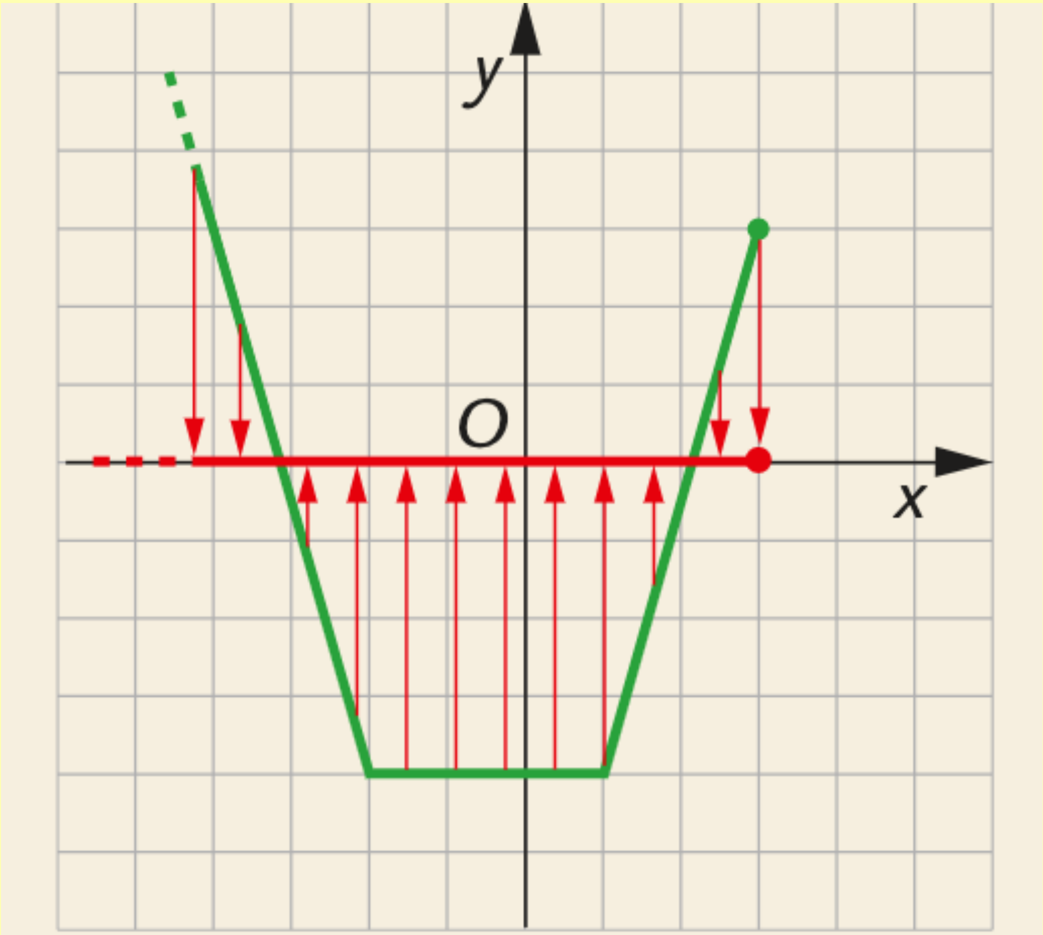
DEFINIZIONE

$y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono **funzioni uguali** se hanno lo stesso dominio D e $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in D$

Esempio

Trovare il dominio della seguente funzione



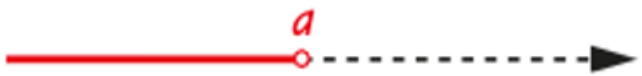


$D = \{x \in \mathbf{R}: x \leq 3\}$ ovvero l'intervallo $(-\infty, 3]$

Intervalli limitati

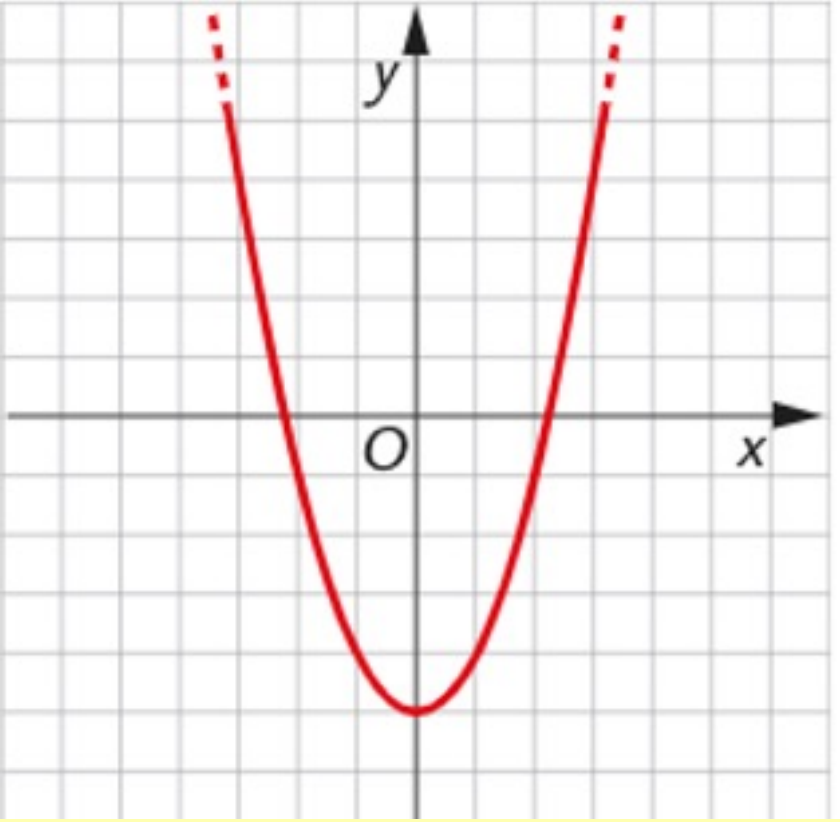
Tipo di intervallo	Notazione con le parentesi	Notazione algebrica	Rappresentazione grafica
Intervallo **chiuso**	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
Intervallo **aperto**	(a, b)	$a < x < b$	
Intervallo **chiuso a sinistra e aperto a destra**	$[a, b)$	$a \leq x < b$	
Intervallo **chiuso a destra e aperto a sinistra**	$(a, b]$	$a < x \leq b$	

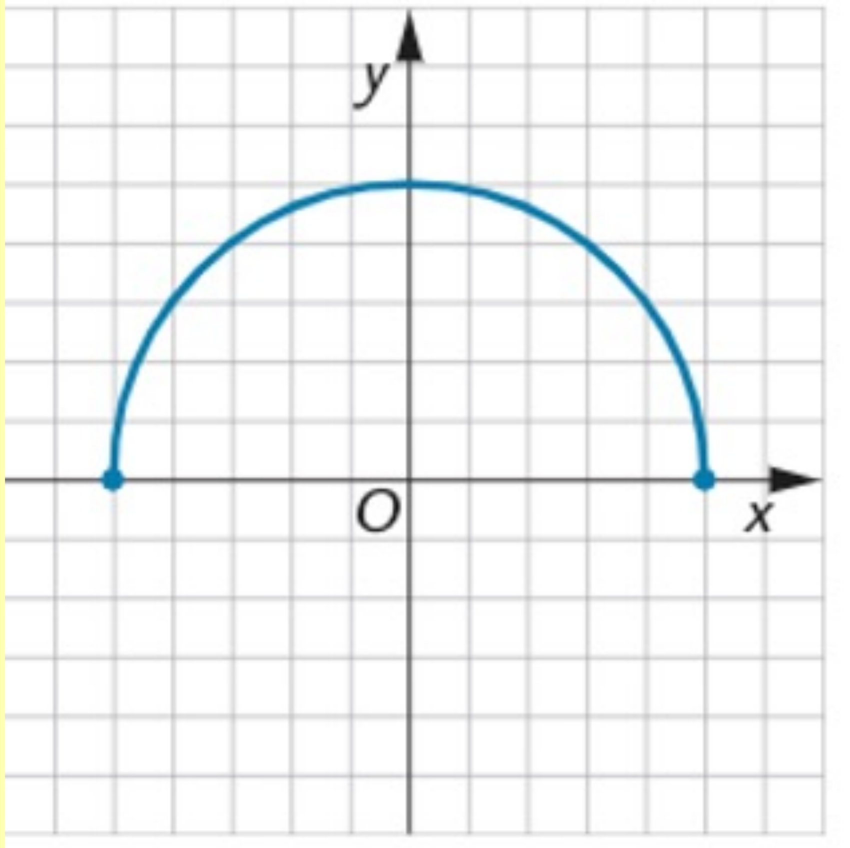
Intervalli illimitati

Tipo di intervallo	Notazione con le parentesi	Notazione algebrica	Rappresentazione grafica
Chiuso, illimitato a destra	$[a, +\infty)$	$x \geq a$	
Aperto, illimitato a destra	$(a, +\infty)$	$x > a$	
Aperto, illimitato a sinistra	$(-\infty, a)$	$x < a$	
Chiuso, illimitato a sinistra	$(-\infty, a]$	$x \leq a$	

Esercizio

39 Deduci dal grafico il dominio delle seguenti funzioni (il tratteggio agli estremi del grafico indica che esso prosegue indefinitamente).





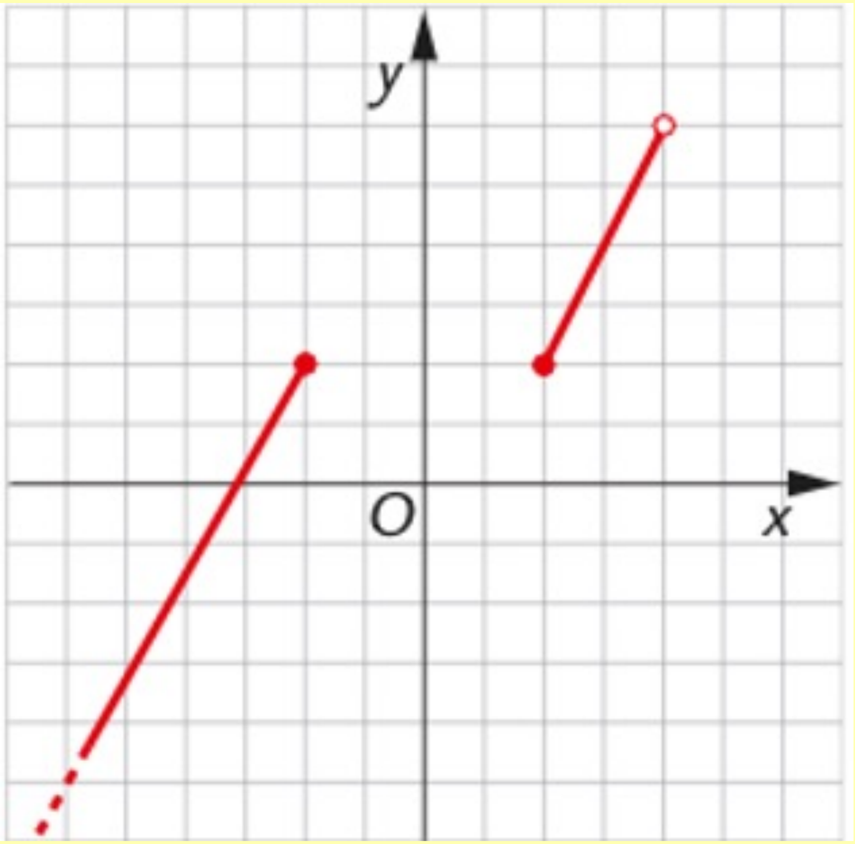
$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-\infty, +\infty)$

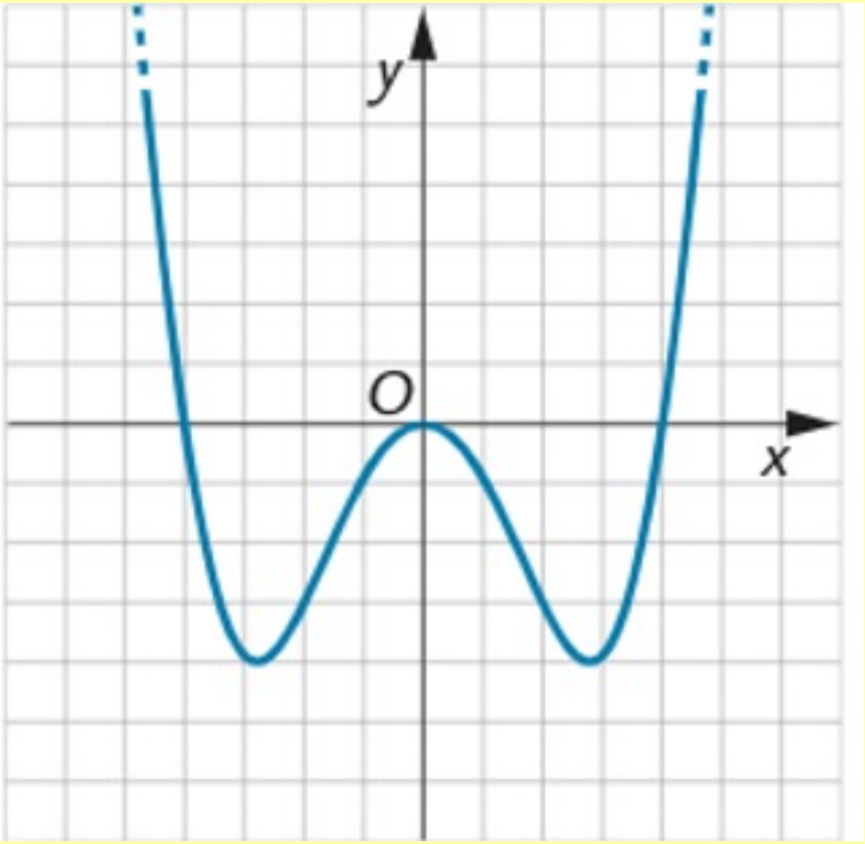
$[-5, +5]$

Mathematica

Esercizio

39 Deduci dal grafico il dominio delle seguenti funzioni (il tratteggio agli estremi del grafico indica che esso prosegue indefinitamente).



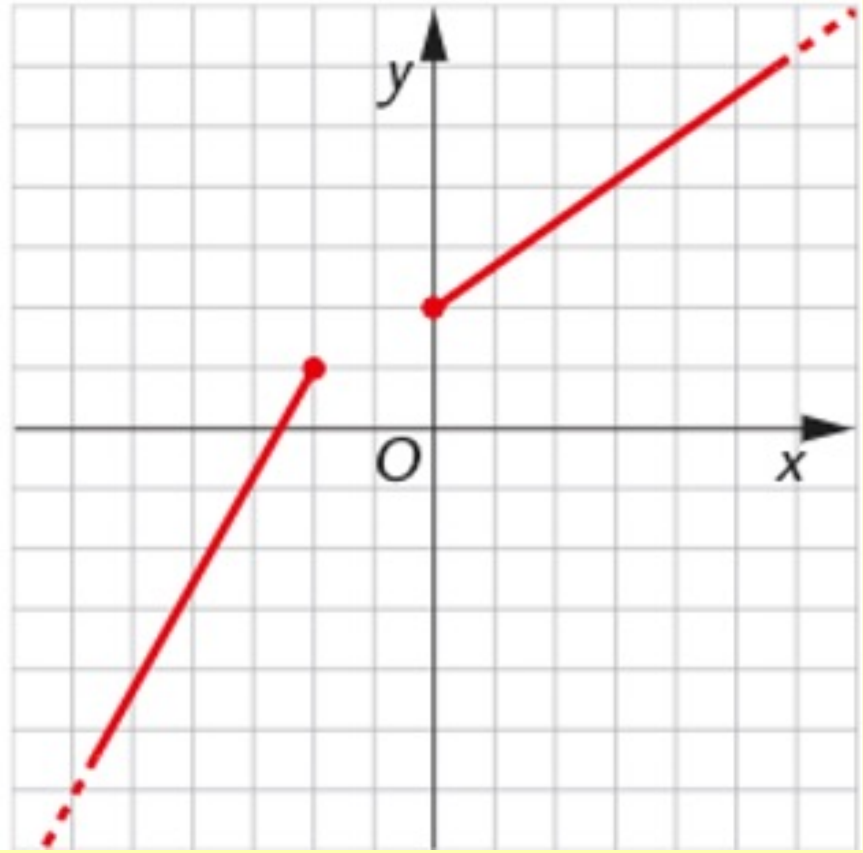


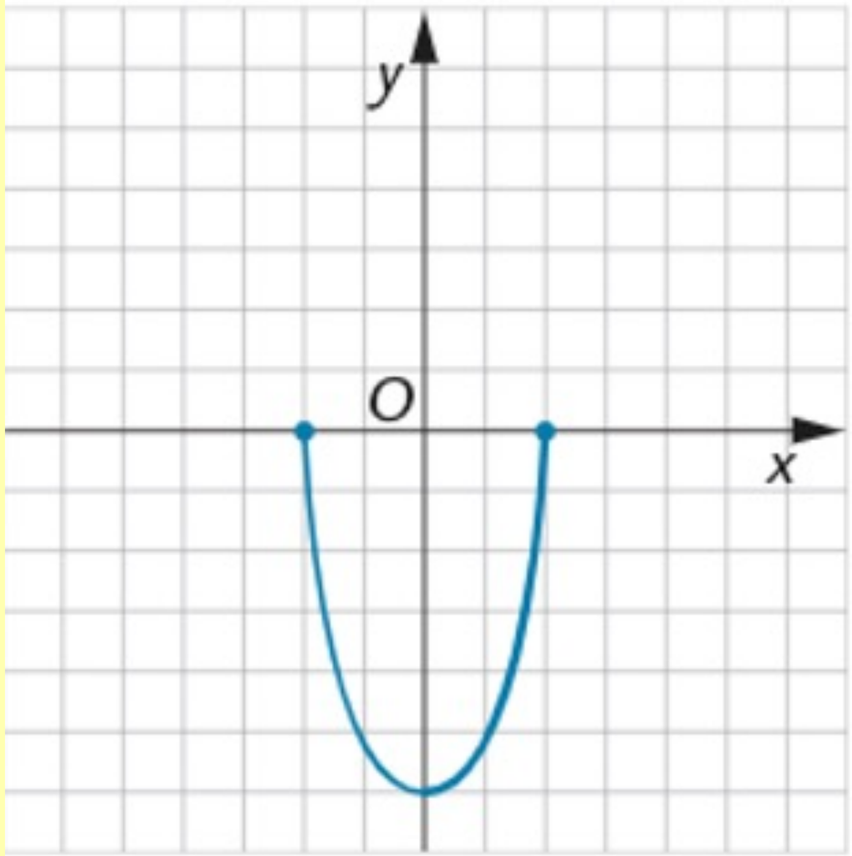
$$(-\infty, -2] \cup [2, 4)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-\infty, +\infty)$$

Esercizio

39 Deduci dal grafico il dominio delle seguenti funzioni (il tratteggio agli estremi del grafico indica che esso prosegue indefinitamente).





$$(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$$

$$[-2, +2]$$

Esempio

- $y = x^4 - x^2$ ha come dominio **R**.

- $y = \dfrac{x+1}{x^2+3x-4}$ è definita purché risulti:

$x^2 + 3x - 4 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -4$

Il suo dominio è perciò $\mathbf{R} - \{-4, 1\}$.

Mathematica ML

Esempio

- $y = \sqrt{5x - x^2}$ è definita purché risulti:

$5x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 5$

- $y = \sqrt[3]{x^2 + x}$ è definita per ogni valore reale di x.

Il suo dominio è **R**.

Esempio

- $y = \ln(x^2 - 4)$ è definita purché risulti:

  $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 2$

  Il suo dominio è l'insieme $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

- $y = e^{\frac{x}{x+1}}$ è definita purché esista l'esponente, cioè per:

  $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

  Il suo dominio è $\mathbf{R} - \{-1\}$.

Esempio

Dominio naturale o CE di $y = f(x)$

- $y = e^{\frac{x}{x+1}}$ è definita purché esista l'esponente, cioè per:

  $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

  Il suo dominio è $\mathbf{R} - \{-1\}$.

- $y = \sin x^2$ e $y = \cos(5 - 3x)$ hanno come dominio **R**.

- $y = \tan(2x - 1)$ è definita purché:

  $2x - 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}$

  Il suo dominio è $\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}\right\}$.

Mathematica

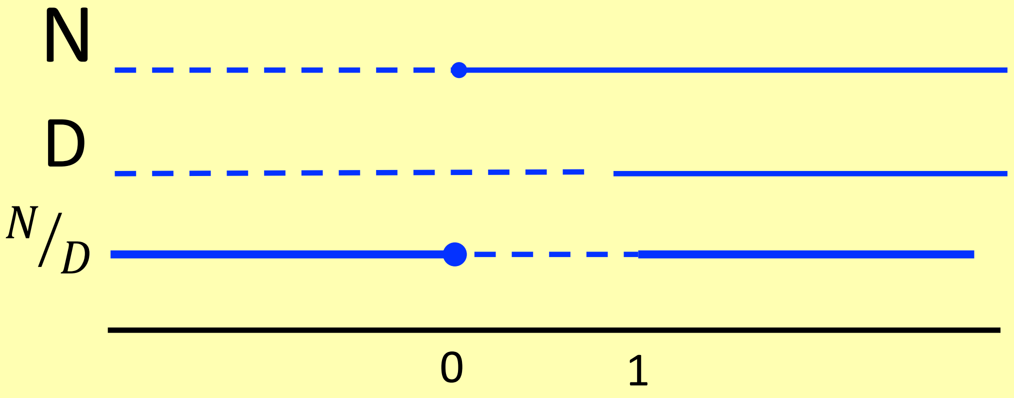
Esempi calcolo CE

Determina il dominio delle seguenti funzioni algebriche.

1- $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}} + \sqrt[3]{x}$

$$\frac{x}{x-1} \geq 0 \qquad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x - 1 > 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x > 1 \end{array}$$

$x \leq 0 \;\vee\; x > 1$

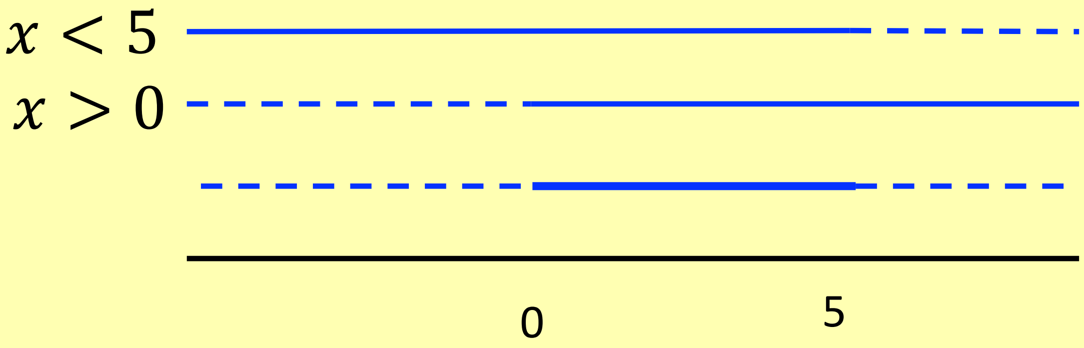


2. $y = \ln(5x - x^2)$

$$5x - x^2 > 0 \qquad x > 0$$

$$x(5-x) > 0 \qquad 5 - x > 0$$

$0 > x < 5$



Esempi calcolo CE

1- $y = \dfrac{\ln x}{2^x - 8}$

$x > 0 \ \vee \ x \neq 3$

Numeratore

$\ln x$ $\qquad$ $x > 0$

Denominatore

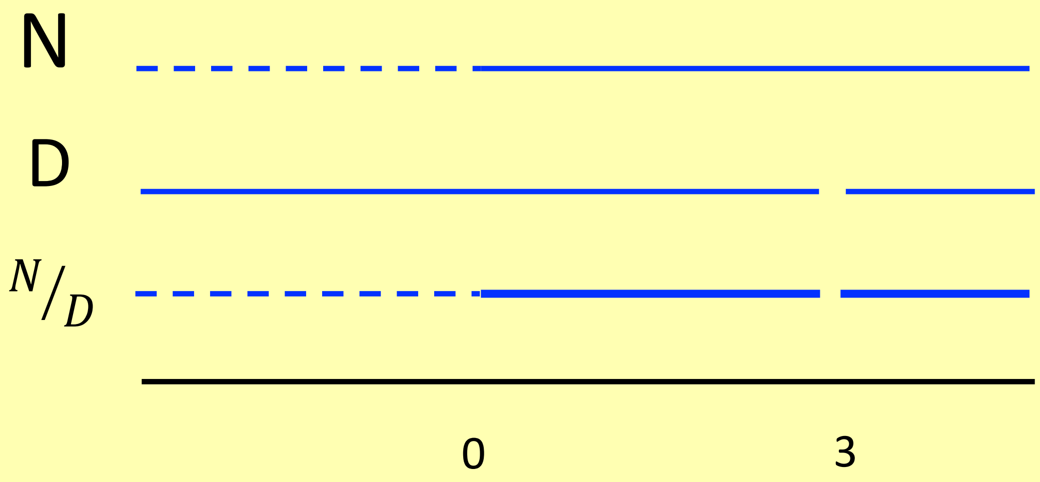
$2^x - 8$

$$2^x - 8 \neq 0$$

$$2^x - 2^3 \neq 0$$

$$2^x \neq 2^3$$

$$x \neq 3$$



Mathematica ML

Esercizi calcolo CE

La ricerca del dominio di una funzione

Test

41 La funzione $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x - 5}$ è definita:

A se e solo se $x^2 + 4x - 5 \neq 0$

B se e solo se $x^2 + 4x - 5 > 0$

C se e solo se $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

D per ogni $x \in \mathbf{R}$

42 La funzione $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$ è definita:

A se e solo se $x^2 + 4x - 5 \neq 0$

B se e solo se $x^2 + 4x - 5 > 0$

C se e solo se $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

D per ogni $x \in \mathbf{R}$

43 La funzione $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$ è definita:

A se e solo se $x^2 + 4x - 5 \neq 0$

B se e solo se $x^2 + 4x - 5 > 0$

C se e solo se $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

D per ogni $x \in \mathbf{R}$

44 La funzione $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x - 5}$ è definita:

A se e solo se $x^2 + 4x - 5 \neq 0$

B se e solo se $x^2 + 4x - 5 > 0$

C se e solo se $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

D per ogni $x \in \mathbf{R}$

45 La funzione $y = \ln(x^2 + 4x - 5)$ è definita:

A se e solo se $x^2 + 4x - 5 \neq 0$

B se e solo se $x^2 + 4x - 5 > 0$

C se e solo se $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

D per ogni $x \in \mathbf{R}$

46 La funzione $y = e^{x^2 + 4x - 5}$ è definita:

A se e solo se $x^2 + 4x - 5 \neq 0$

B se e solo se $x^2 + 4x - 5 > 0$

C se e solo se $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

D per ogni $x \in \mathbf{R}$

Mathematica

Esercizi calcolo CE

Determina il dominio delle seguenti funzioni algebriche.

55 $y = \dfrac{x^2+1}{2x+5}$

56 $y = \dfrac{4x-1}{3x-27}$

57 $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x-4}$

58 $y = \dfrac{x}{x+4} + \dfrac{1}{2x+6}$

59 $y = \dfrac{1}{3x^2-6x}$

60 $y = \dfrac{1}{4x^2-16}$

61 $y = \dfrac{x+1}{x^2+7x+12}$

62 $y = \dfrac{x-1}{x^2+2x+4}$

63 $y = \dfrac{1}{3x^2-5x+2}$

64 $y = \dfrac{1}{4x+2} - \dfrac{1}{x^2-1}$

65 $y = \dfrac{\sqrt{4x+1}}{x}$

66 $y = \sqrt{\dfrac{x}{2}+1} + \sqrt{20-2x}$

67 $y = \dfrac{\sqrt{x^2+5x}}{x-7}$ [x

68 $y = \sqrt{-2x^2+50}$

69 $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2-3}$

70 $y = \dfrac{1}{x^3-25x}$

71 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-2x-1}$

Mathematica

Esercizi calcolo CE

Determina il dominio delle seguenti funzioni algebriche.

72 $y = \sqrt{\dfrac{x}{9 - x^2}}$

73 $y = \dfrac{1}{4x^2 - 25}$

74 $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 9} + \dfrac{1}{6x + 3}$

75 $y = \dfrac{1}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{x^3}$

76 $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{1}{3}}$

77 $y = \sqrt{25 - x^2}$

78 $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2x + 2}}$

79 $y = \dfrac{1}{4x^2 - 20x + 25}$

80 $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x}}$

81 $y = \sqrt{3x^2 - 6x + 3}$

82 $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{2x + 4}$

83 $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}}$

84 $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+5}}$

85 $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+5}}$

86 $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x+5}}$

87 $y = \dfrac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+5}}$

88 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x}}$

Mathematica ML

Esercizi calcolo CE

Determina il dominio delle seguenti funzioni algebriche.

89 $y = \sqrt{2x^2 - 18} + \sqrt{7 - x}$

90 $y = \dfrac{\sqrt{5x - x^2}}{x - 3}$

91 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$

92 $y = \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{2}x}$

93 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 6x - 7}$

94 $y = \sqrt{10x - x^2}$

95 $y = \dfrac{1}{3x^2 + 3x} + \sqrt[3]{x}$

96 $y = (1 + 5x - 6x^2)^{-\frac{1}{2}}$

97 $y = \dfrac{1}{x^3 + x^2 + 2x}$

98 $y = \dfrac{x}{(2x + 1)^2 - (x - 1)^2}$

99 $y = \sqrt{|x - 1| - 2}$

100 $y = \dfrac{\sqrt{3 - |x|}}{x^3 + 1}$

101 $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x}}$

102 $y = \sqrt{x^2 + 5x - 6} + \sqrt{8 - x^3}$

103 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x + 3}}$

104 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}} + \sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 1}}$

105 $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x^2 - 4}$

106 $y = \sqrt{\dfrac{x - 3}{4 - |x|}}$

Mathematica ML

Esercizi calcolo CE

Determina il dominio delle seguenti funzioni trascendenti, contenenti funzioni esponenziali e/o logaritmiche.

107 $y = \sqrt{2^x - 1}$

108 $y = \sqrt{2^{x+1}}$

109 $y = \dfrac{1}{4^x - 16}$

110 $y = \ln(2 - 3x)$

111 $y = \ln(x^2 + 10x + 25)$

112 $y = e^{\frac{1+2x}{1+3x}}$

113 $y = \ln\left(\dfrac{x}{2x+6}\right)$

114 $y = \sqrt{e^{3x} - 1}$

115 $y = \dfrac{1}{e^{-x^2} - e}$

116 $y = \dfrac{xe^{-2x}}{x+1}$

117 $y = \sqrt{e^{2x} + e^x + 3}$

118 $y = \ln(e^{3x-4} - e^{1-2x})$

119 $y = \dfrac{1}{e^{2x} - 4e^x + 3}$

120 $y = \dfrac{1}{\ln(x+4)}$

Esercizi calcolo CE

Determina il dominio delle seguenti funzioni trascendenti, contenenti funzioni esponenziali e/o logaritmiche.

121 $y = \dfrac{1}{\ln^2 x - \ln x}$

122 $y = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^{8x^2} - \dfrac{9}{16}}$

123 $y = \ln(e^{2x} + 5e^x - 14)$

124 $y = \sqrt{\dfrac{e - e^{2x}}{e^x - 1}}$

125 $y = \ln(2x - 3) - \ln(10 - x)$

126 $y = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

127 $y = \log_2(2x + 3) - \log_2(5x - 10)$

128 $y = \ln(7 - 6x - x^2)$

129 $y = \dfrac{1}{25^x - 125}$

130 $y = \ln\left(\dfrac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 1}\right)$

131 $y = \ln(3x + 4)$

132 $y = \dfrac{\sqrt{5^x - 25}}{3^x}$

133 $y = \ln \dfrac{1}{8x + 24}$

134 $y = \ln(5^x - \sqrt{5})$

135 $y = 5^{\frac{x^2+1}{x^2-4}}$

Studio del segno
e
Intersezione con gli assi

Studio del segno e intersezione con gli assi

1) **Intersezione con gli assi**

2) **Studio del segno**

Intersezione con gli assi

$\cap\, x$ si pone $y = 0$ e si risolve l'equazione $f(x) = 0$

$\cap\, y$ Esiste se la funzione è definita per $x = 0$

si pone $x = 0$ e si risolve la $f(0)$

Studio del segno e intersezione con gli assi

Intersezione con gli assi

Studio del segno

Studio del segno

Si tratta di stabilire per quali valori della x la $f(x) > 0$ e per quali valori la $f(x) > 0$

che individua gli intervalli dove la funzione è **positiva**, ossia dove il suo grafico è «al di sopra» dell'asse x;

La funzione sarà **negativa** ovunque essa non sia positiva.

Esempio, intersezioni con gli assi e studio del segno

Studio del segno della seguente funzione

FASI

1) Dominio
2) Intersezione con gli assi
3) Studio del segno
4) Rappresentazione sul piano cartesiano

Mathematica ML

Esempio, intersezioni con gli assi e studio del segno

Studio del segno della seguente funzione

$f(x) = x^5 - 9x^3$

1) Dominio

La funzione è definita su tutto R

2) Intersezione con gli assi

$\cap\, \boldsymbol{x}$ si pone $y = 0.$

$x^5 - 9x^3$=0 → $x^3(x^2 - 9) = 0.0$ → $x^3(x - 3)(x + 3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x - 3 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

$y = 0.$ per $x = -3 \vee x = 0 \vee x = 3$

$\cap\, \boldsymbol{x}$ **(-3, 0) ; (0, 0); (3, 0)**

Mathematica ML

Esempio, intersezioni con gli assi e studio del segno

Studio del segno della seguente funzione

$\cap\, \boldsymbol{y}$ si pone $x = 0.$

$f(x) = x^5 - 9x^3.$ → $f(0) = 0^5 - 9 \cdot 0^3 = 0$

$\cap\, \boldsymbol{y}$ **(0, 0) l'origine degli assi**

3) Studio del segno

$\boldsymbol{y > 0}.$

$x^5 - 9x^3 > 0$ → $x^3(x^2 - 9) > 0$ → $x^3(x - 3)(x + 3) > 0$

Esempio, intersezioni con gli assi e studio del segno

Studio del segno della seguente funzione

$$x^5 - 9x^3 > 0 \quad \rightarrow \quad x^3(x^2 - 9) > 0 \quad \rightarrow \quad x^3(x-3)(x+3) > 0$$

$x > 0$

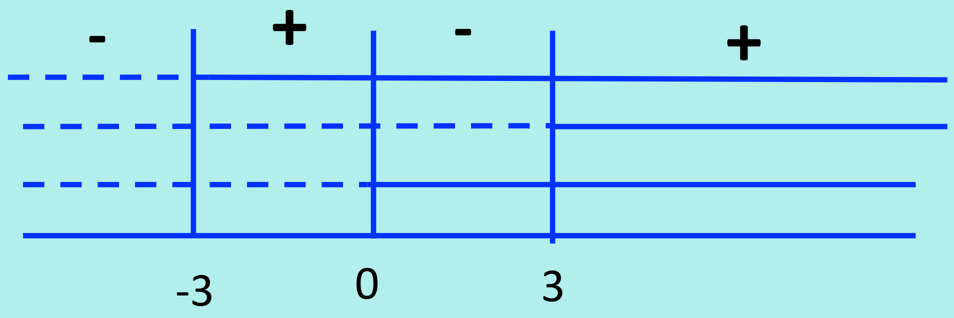
$x - 3 > 0$

$x + 3 > 0$

$x > 0$ $\quad$ $x > 0$

$x - 3 > 0$ $\quad$ $x > 3$

$x + 3 > 0$ $\quad$ $x > -3$



$$-3 < x < 0 \quad \vee \quad x > 3$$

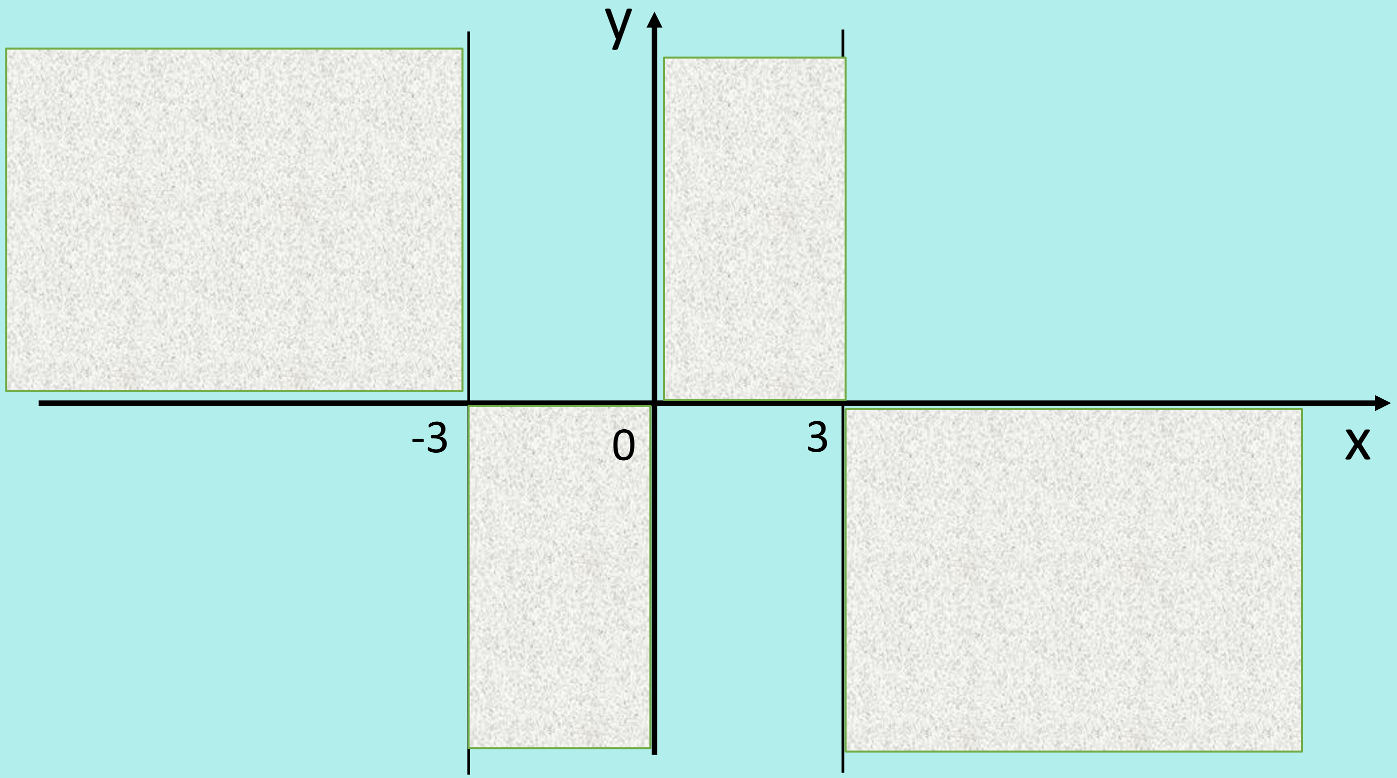
Esempio, intersezioni con gli assi e studio del segno

Studio del segno della seguente funzione

4) Rappresentazione sul piano cartesiano

$$x^5 - 9x^3 > 0$$

$$-3 < x < 0 \quad \vee \quad x > 3$$



Mathematica ML

Esempio, intersezioni con gli assi e studio del segno

Studio del segno della seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$$

1) Dominio

La funzione è definita su tutto R-(2)

2) Intersezione con gli assi

$\cap \boldsymbol{x}$ si pone $y = 0.$

$\frac{x^2+2x-3}{x-2} = 0.$ → . $x^2 + 2x - 3 = 0$ → $x = 1$, $x = -3$

$y = 0.$ per $x = -3 \lor x = 1$

$\cap \boldsymbol{x}$ **(-3, 0) ; (1, 0)**

Mathematica ML

Esempio, intersezioni con gli assi e studio del segno

Studio del segno della seguente funzione

$\cap\, \boldsymbol{y}$ si pone $x = 0.$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-2} \quad \rightarrow \quad f(0) = \frac{0^2+2\cdot 0-3}{0-2} = \frac{3}{2}$$

$\cap\, \boldsymbol{y}$ $\quad \left(\mathbf{0}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$

3) Studio del segno

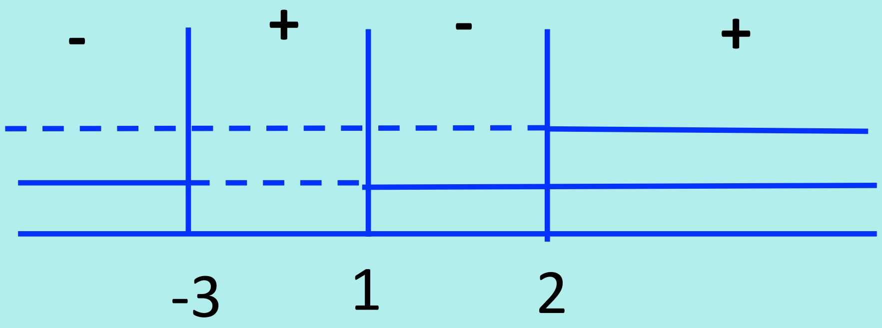
$\boldsymbol{y} > \mathbf{0}.$

$$\frac{x^2+2x-3}{x-2} > 0 \quad \rightarrow. \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}. \quad \rightarrow. \begin{cases} x < -3 \;\; \vee x > 1 \\ x > 2 \end{cases}$$

Esempio, intersezioni con gli assi e studio del segno

Studio del segno della seguente funzione

$$\frac{x^2+2x-3}{x-2} > 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^2+2x-3>0 \\ x-2>0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x<-3 \ \vee x>1 \\ x>2 \end{cases}$$



$$-3<x<1 \quad \vee x>2$$

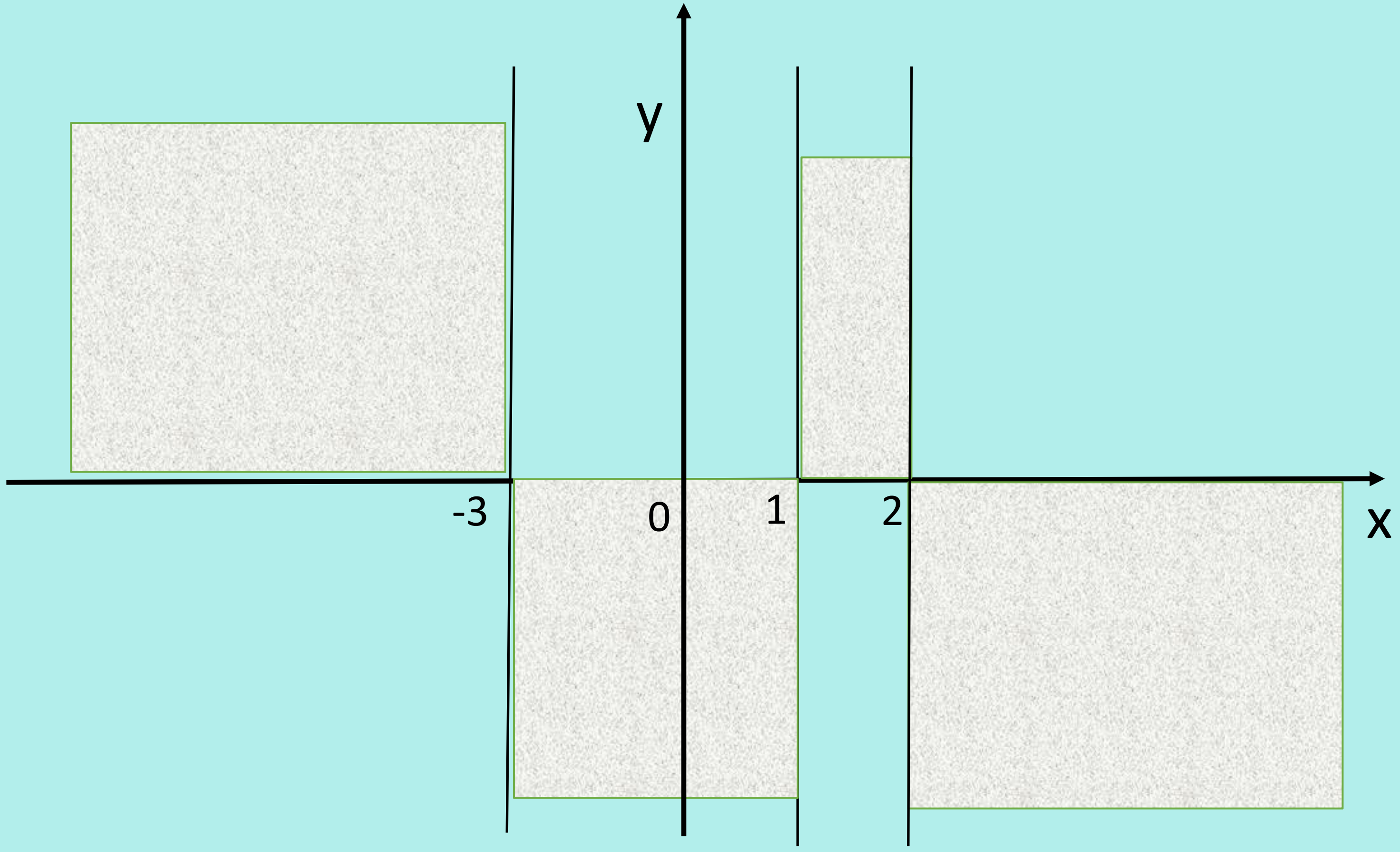
Esempio, intersezioni con gli assi e studio del segno

Studio del segno della seguente funzione

4) Rappresentazione sul piano cartesiano

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$$

$$-3 < x < 1 \quad \vee\ x > 2$$



Esercizi, intersezioni con gli assi e studio del segno

Determina il dominio, eventuali punti d'intersezione con gli assi cartesiani e il segno delle seguenti funzioni.

213 $y = 3x - 4$

214 $y = x^2 + 5x - 6$

215 $y = -x^2 + 3x$

216 $y = x^3 + 4x^2$

217 $y = x^3 - 25x$

218 $y = x^5 - x^3$

219 $y = x^3 + 10x^2 - 11x$

220 $y = x^4 - 5x^2 + 4$

221 $y = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$

222 $y = \dfrac{3x^2 + 1}{4x + 4}$

223 $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 4}$

224 $y = \dfrac{x^2 - 16}{x}$

225 $y = \dfrac{x}{x^2 + 4x - 5}$

226 $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4}$

Mathematica

Esercizi, intersezioni con gli assi e studio del segno

Determina il dominio, eventuali punti d'intersezione con gli assi cartesiani e il segno delle seguenti funzioni.

227 $y = \dfrac{x^3 - 1}{4 - x^2}$

228 $y = \sqrt{4 - |x|}$

229 $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{9x - x^2}}$

230 $y = \sqrt{\dfrac{x - 4}{x - 2}}$

231 $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{9 - x^2}$

232 $y = 2^{\frac{2x-1}{x+1}} - \sqrt{2}$

233 $y = e^{2x} - e^{-2x}$

234 $y = \dfrac{x}{2 - \log_2 x}$

235 $y = \ln\left(\dfrac{x - 1}{2x + 1}\right)$

236 $y = \dfrac{\ln x}{\ln x - 1}$

237 $y = \dfrac{2^x - 4^{x+1}}{8^x - 2\sqrt{2}}$

238 $y = \ln(e^x - 1)$

Mathematica

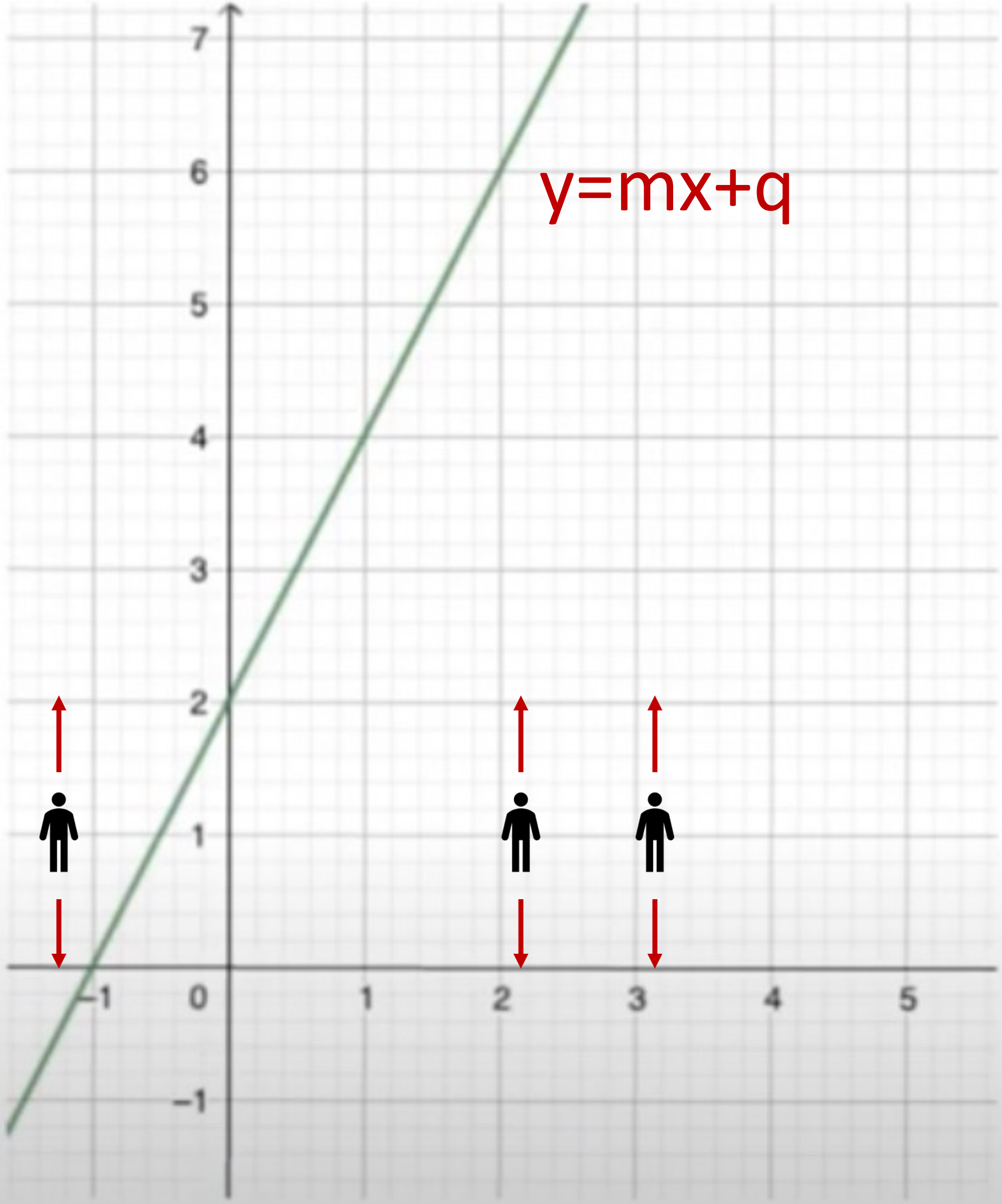
Mathematica

Mathematica

Lettura del grafico di una funzione

Lettura grafico di una funzione

- Dominio
- Zeri e intersezioni asse y
- Segno



-Dominio

D: $(-\infty;\ +\infty)$

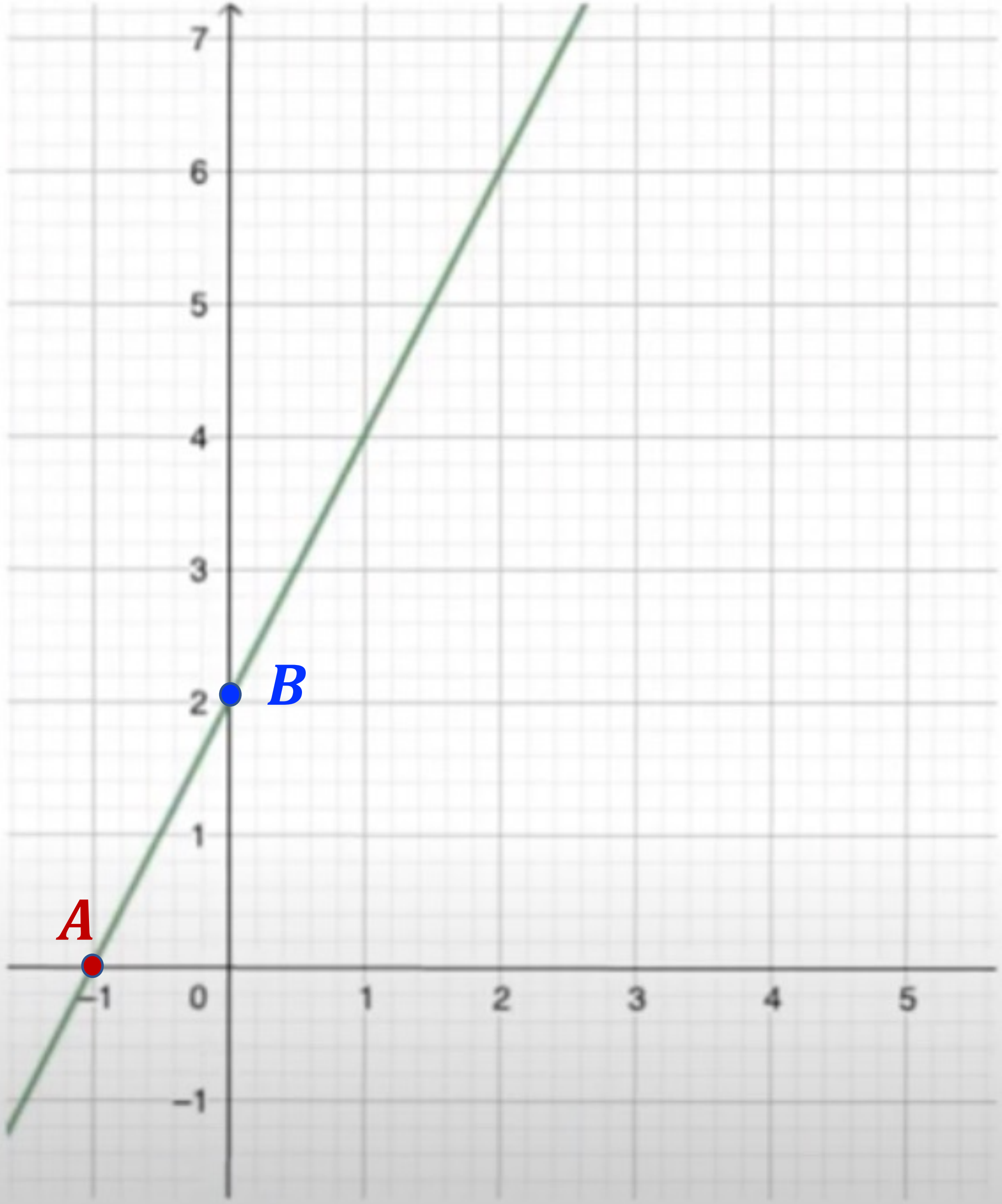
D: $\Re$

-Zeri e intersezioni con asse y

-Segno

$(-1;\ +\infty)$

Mathematica



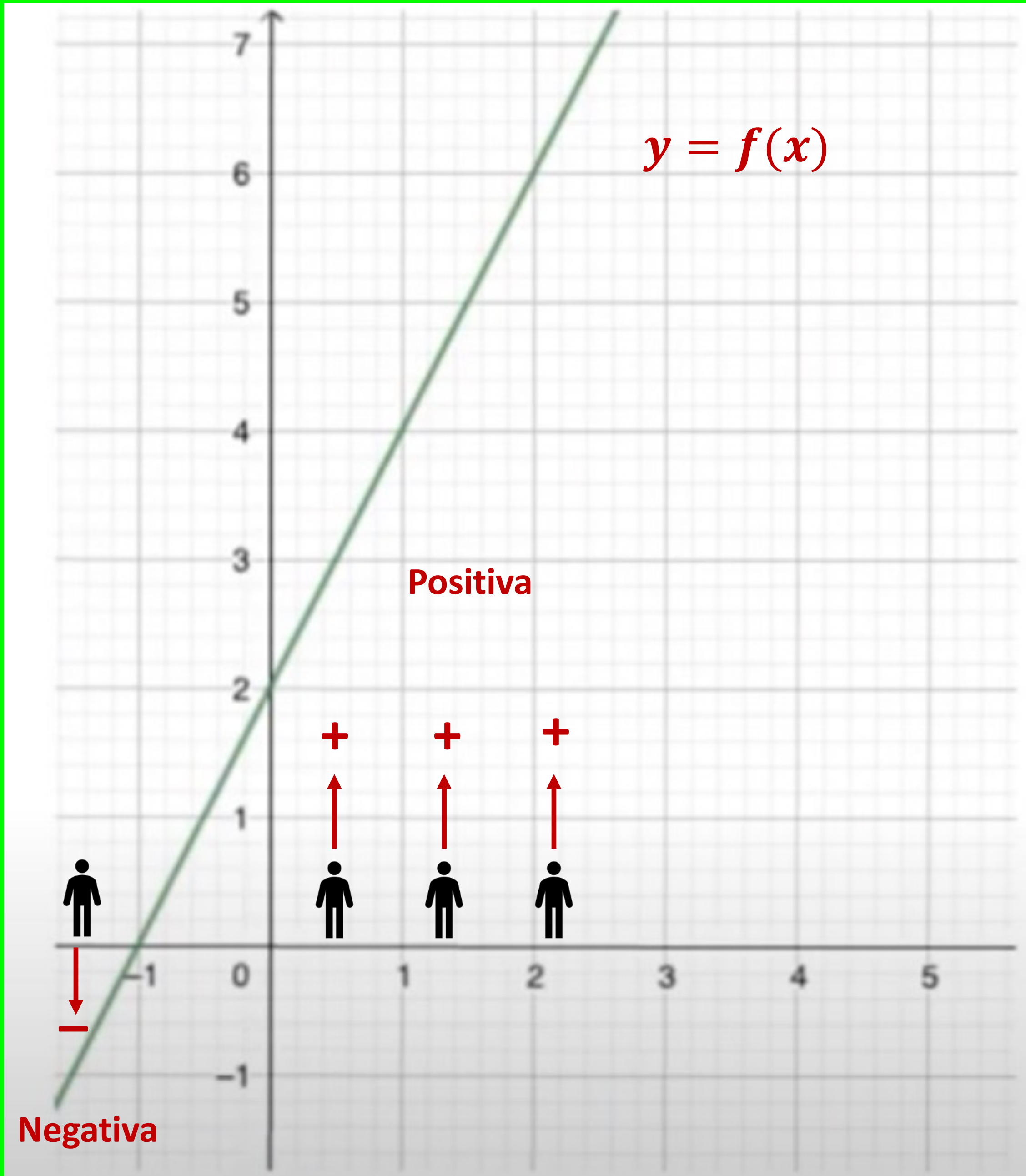
-Dominio

-Zeri e intersezioni con asse y

Zeri = Punti di intersezione con l'asse x $\quad \boldsymbol{A(-1;0)}$

Intersezione con l'asse y $\quad \boldsymbol{B(0;2)}$

-Segno



-Dominio

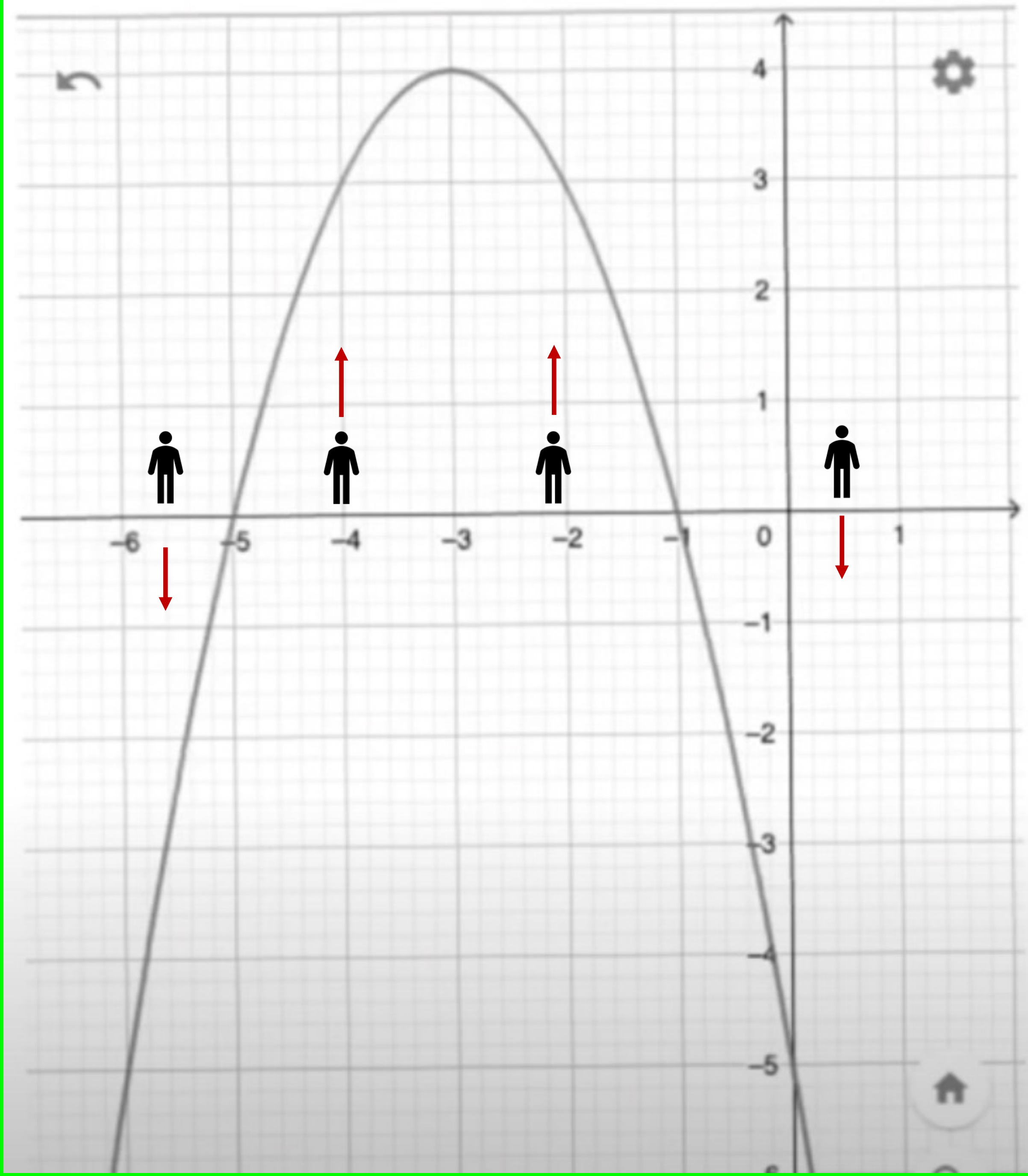
-Zeri e intersezioni con asse y

Intervalli in cui la funzione è positiva o negativa

-Segno

$y > 0 \qquad (-1;\ +\infty)$

$y < 0 \qquad (-\infty; -1)$

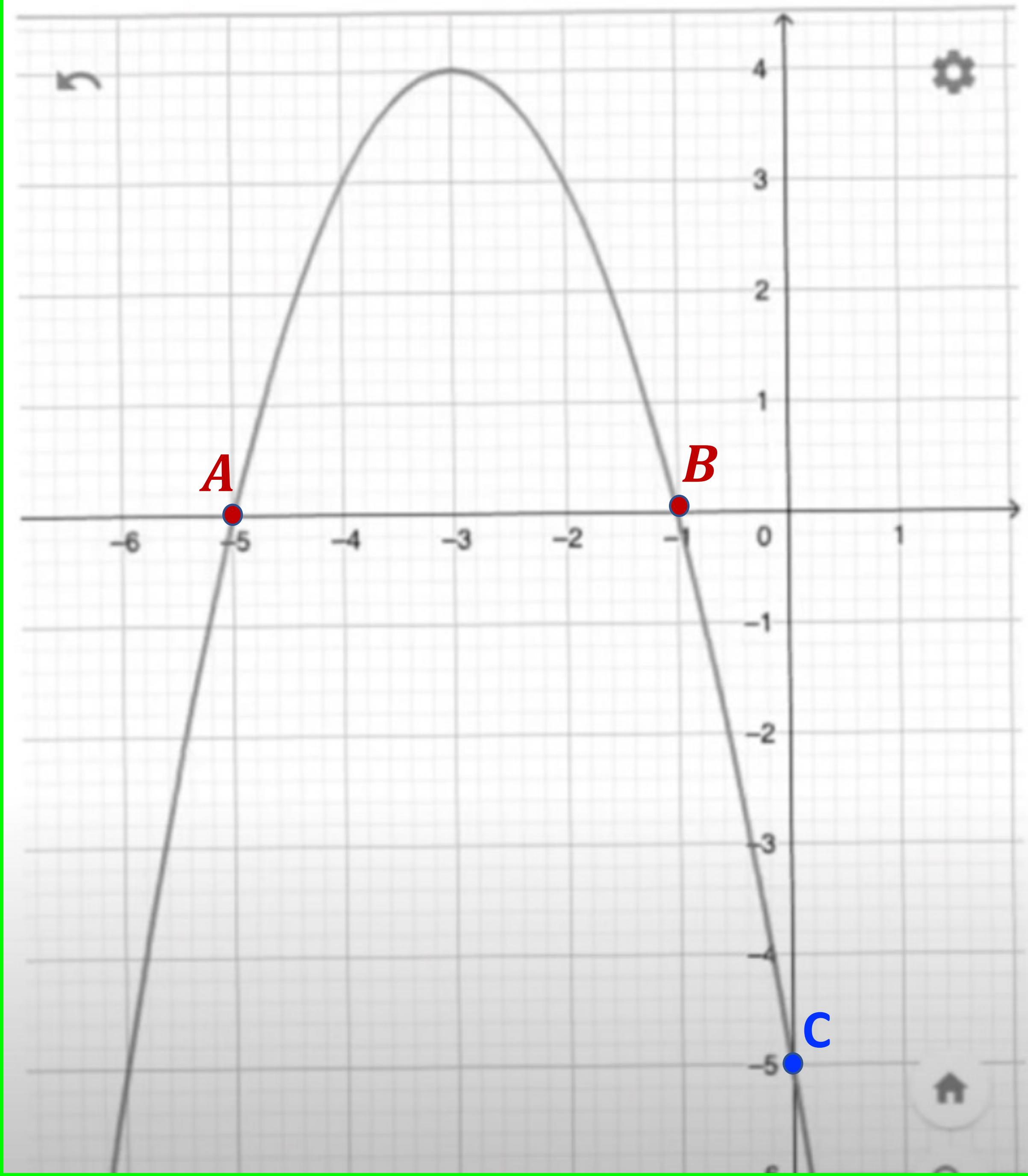


· Dominio D: $(-\infty; +\infty)$

D: $\Re$

· Zeri e intersezioni con asse y

- Segno



·Dominio

·Zeri e intersezioni
con asse y

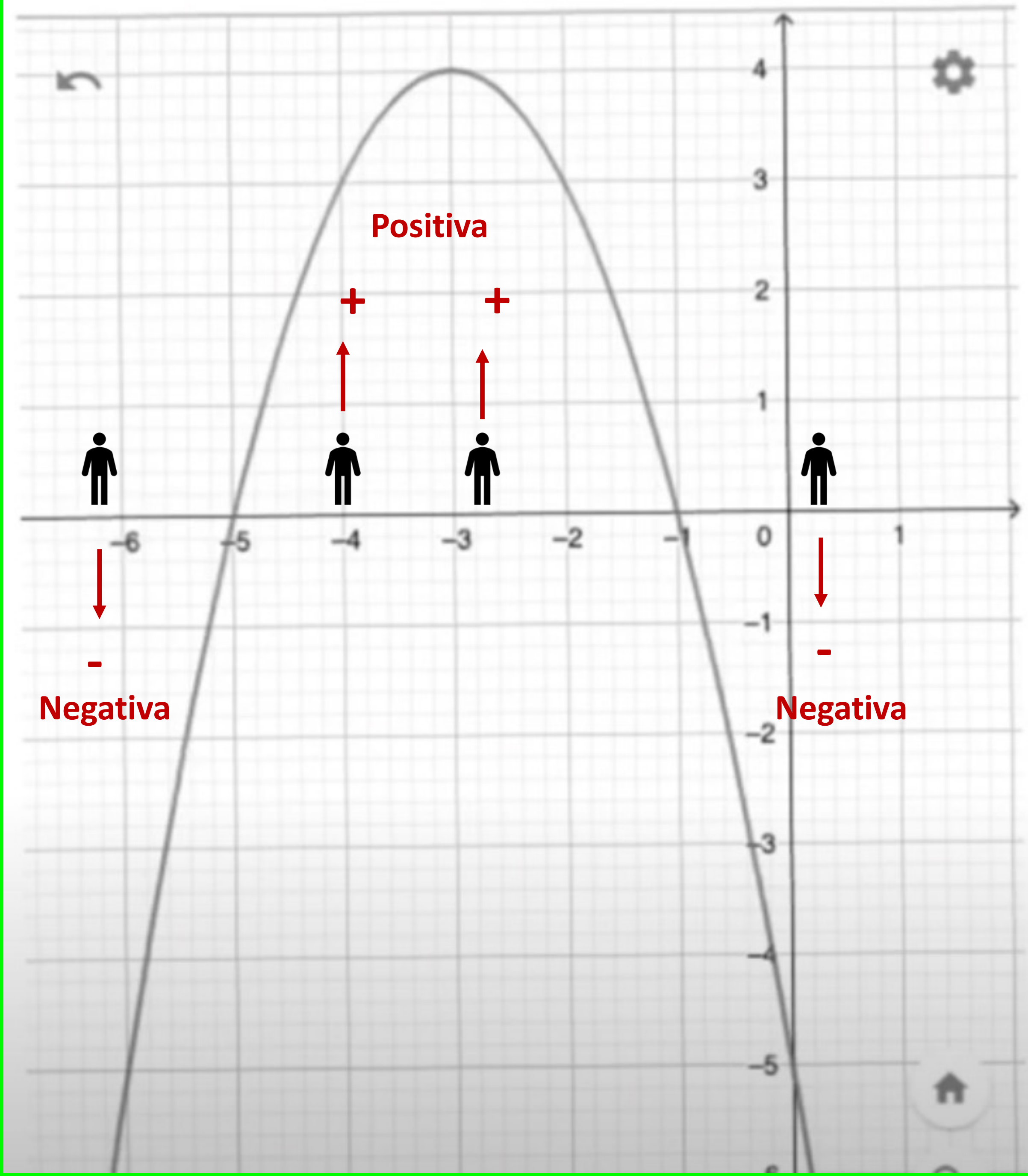
Zeri: $\boldsymbol{A(-5; 0)}$ $\boldsymbol{B(-1; 0)}$

Intersezione con l'asse y:

$\boldsymbol{C(0; -5)}$

-Segno

Mathematica



·Dominio

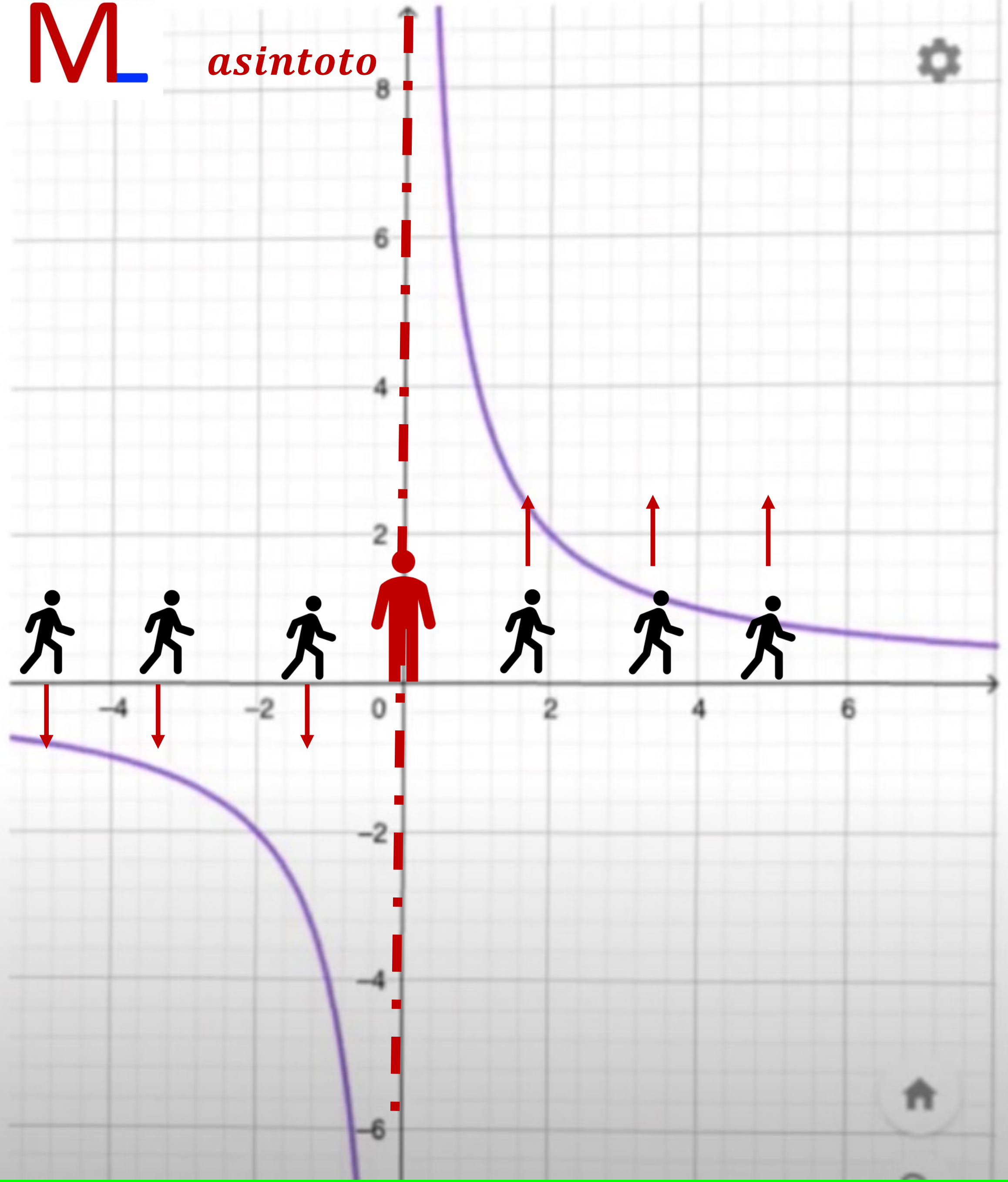
·Zeri e intersezioni con asse y

Intervalli in cui la funzione è positiva o negativa

-Segno

$y > 0$ $\quad (-5; -1)$

$y < 0$ $\quad (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$



Iperbole equilatera

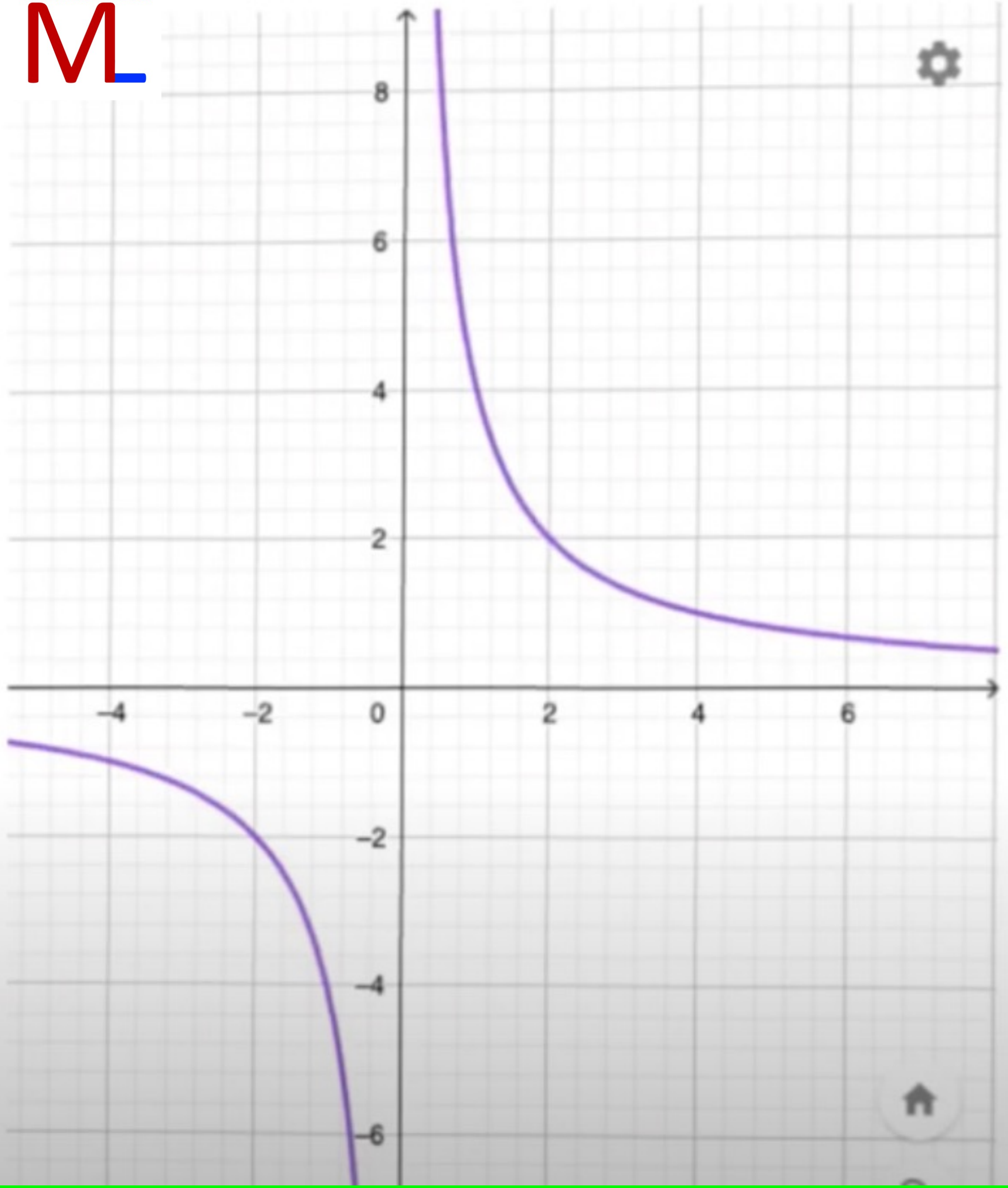
-Dominio

D: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

D: $\Re - (0)$

-Zeri e intersezioni con asse y

-Segno



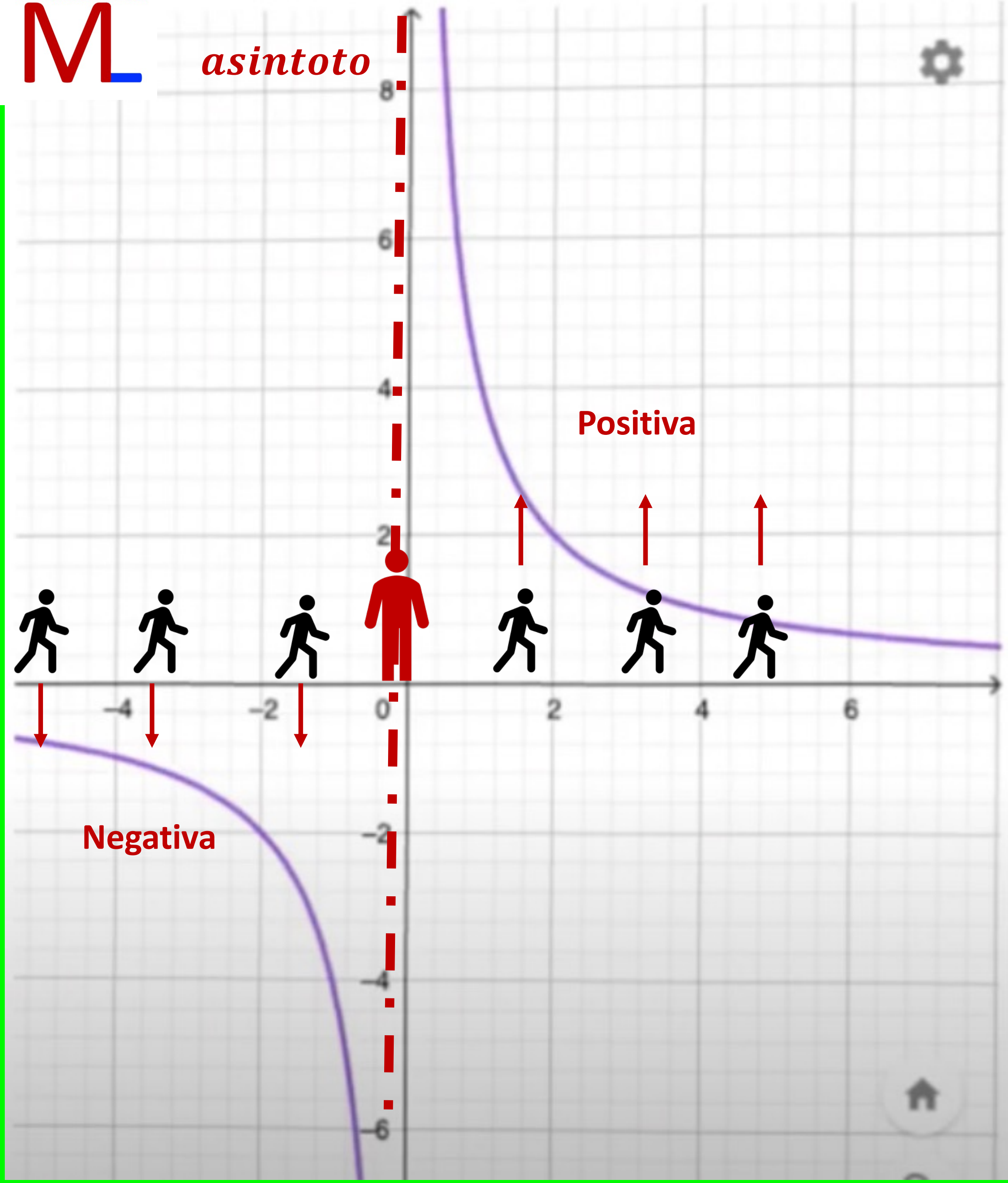
-Dominio

-Zeri e intersezioni con asse y

$\boldsymbol{Zeri}$: $\boldsymbol{NO}$:

$\boldsymbol{Intersezione\ con\ l'asse\ y}$: $\boldsymbol{NO}$

-Segno



-Dominio

-Zeri e intersezioni con asse y

-Segno

$y > 0$ $(0; +\infty)$

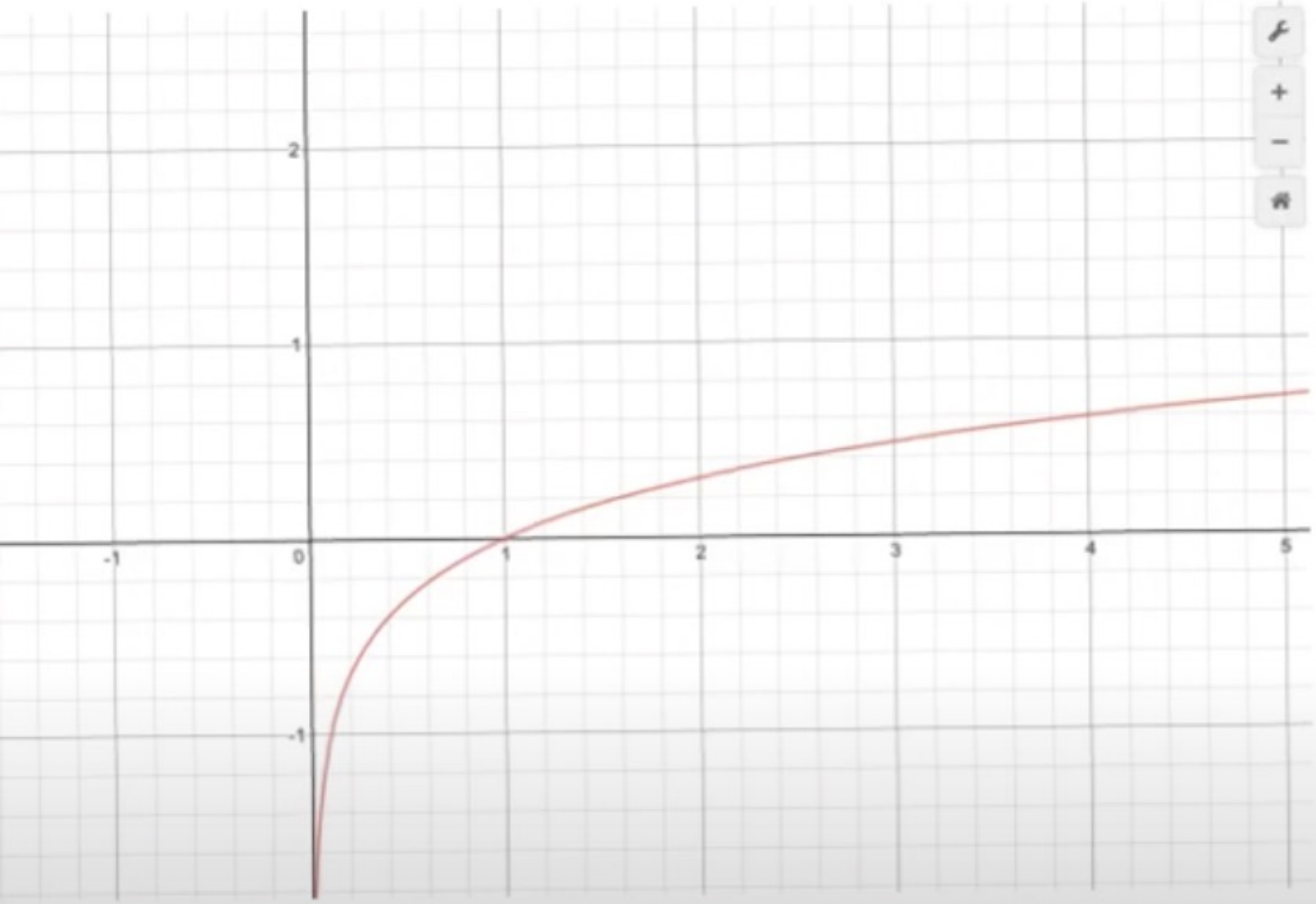
$y < 0$ $(-\infty; 0)$

-Dominio

-Zeri e intersezioni con asse y

-segno

Mathematica ML

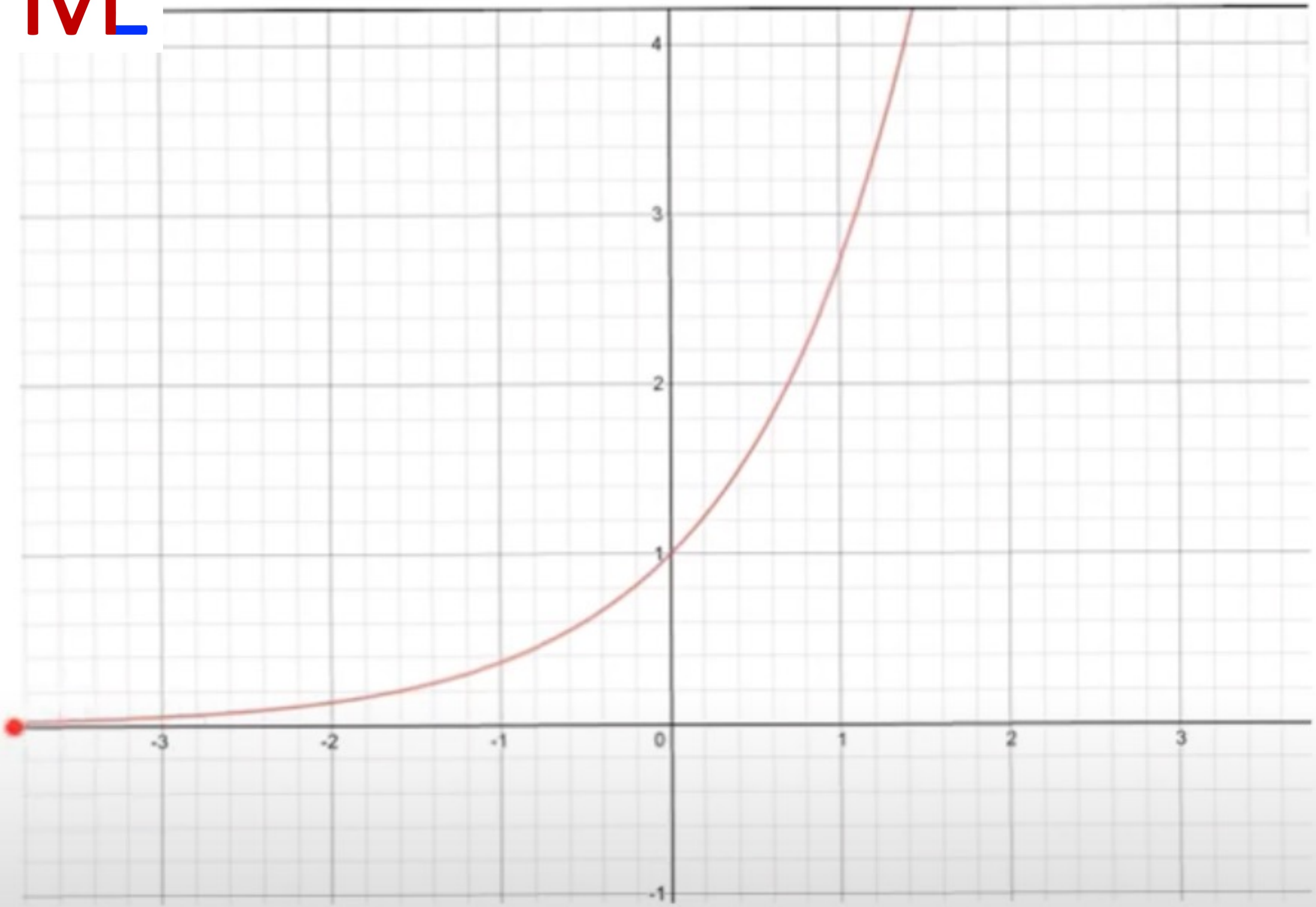


-Dominio

-Zeri e intersezioni con asse y

-Segno

Mathematica ML



-Dominio

-Zeri e intersezioni con asse y

-Segno

Funzioni Crescenti e Decrescenti

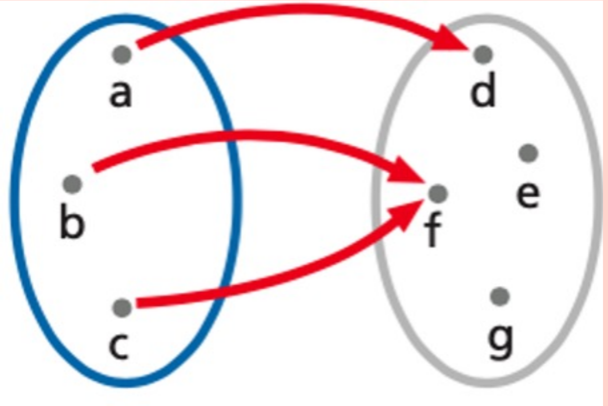
Funzioni strettamente crescenti e strettamente decrescenti

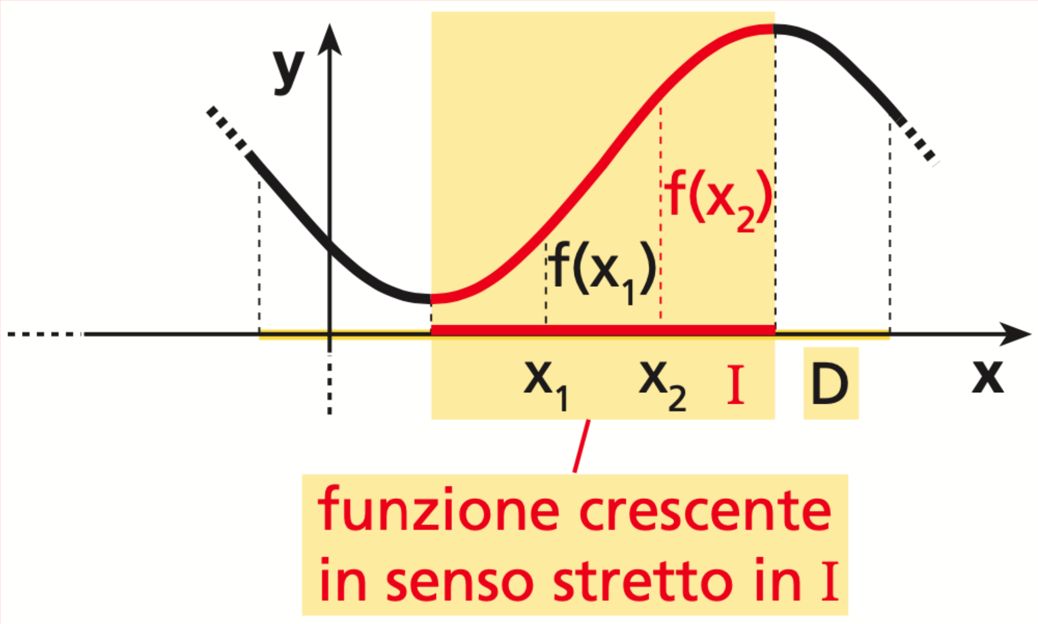
DEFINIZIONE

$y = f(x)$

$\boldsymbol{D \subseteq R}$

f: D ⟶ R





È una funzione:

Crescente in senso stretto in un intervallo $I \subseteq D$ se, scelti:

$$x_1, x_2 \in I, \qquad con\ \ x_1 < x_2 \quad \text{risulta } f(x_1) < f(x_2)$$

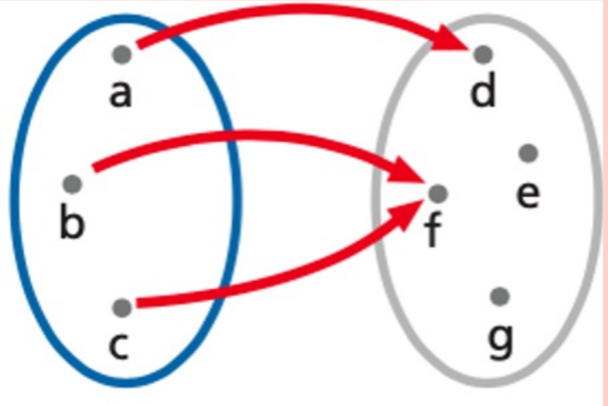
Funzioni strettamente crescenti e strettamente decrescenti

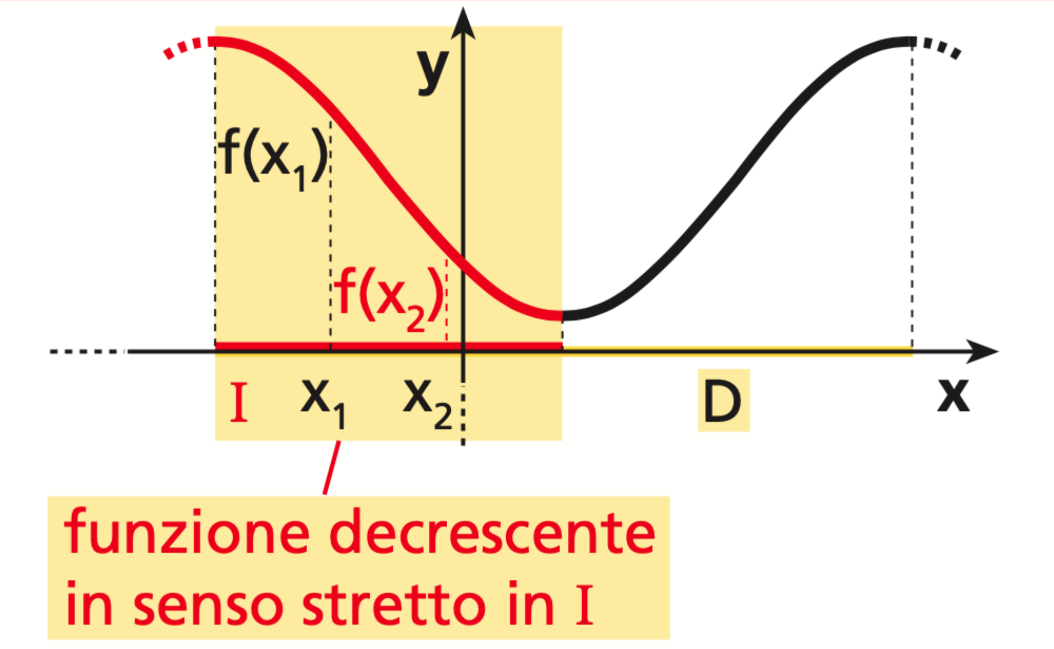
DEFINIZIONE

$y = f(x)$

f: D $\longrightarrow$ **R**

$D \subseteq R$





È una funzione:

Decrescente in senso stretto in un intervallo $I \subseteq D$ se, scelti:

$$x_1, x_2 \in I, \qquad con\ \ x_1 < x_2 \quad \text{risulta } f(x_1) > f(x_2)$$

Una funzione di dominio $D \in$ è **monotòna in senso stretto** in un intervallo

$I \subseteq D$,

se in quell'intervallo è:

sempre crescente o

sempre decrescente

in senso stretto.

Esempio funzione strettamente crescente

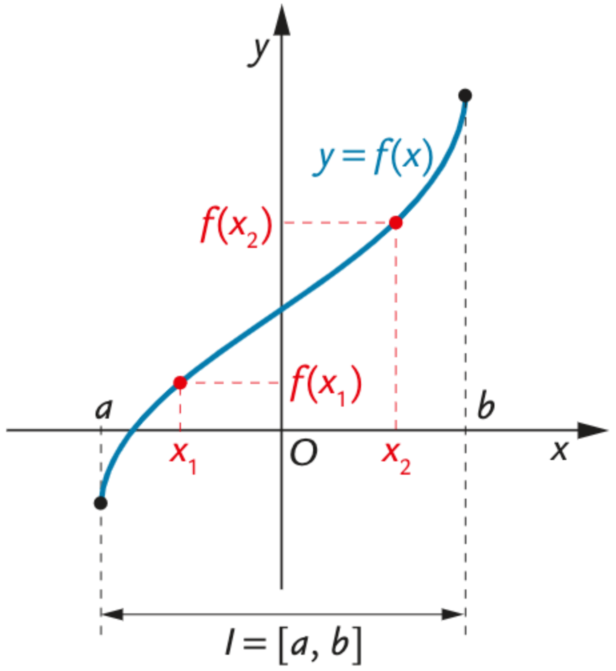


Figura 5.10 Per ogni $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$: la funzione è strettamente *crescente* in $[a, b]$.

Esempio funzione strettamente decrescente

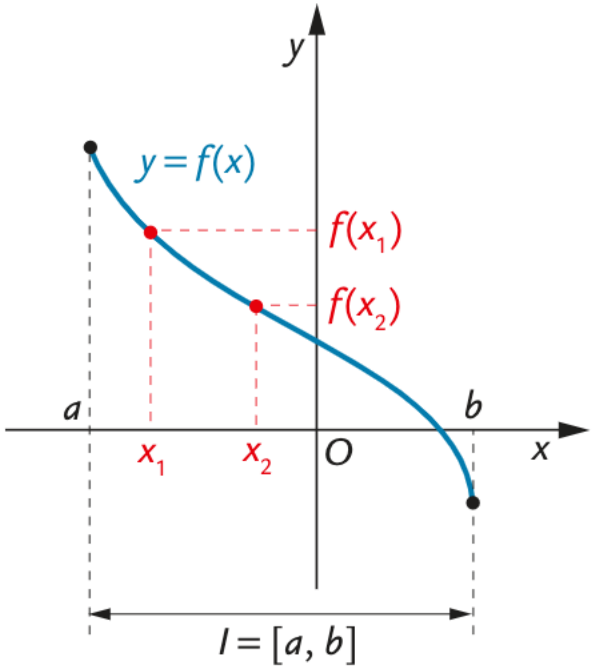
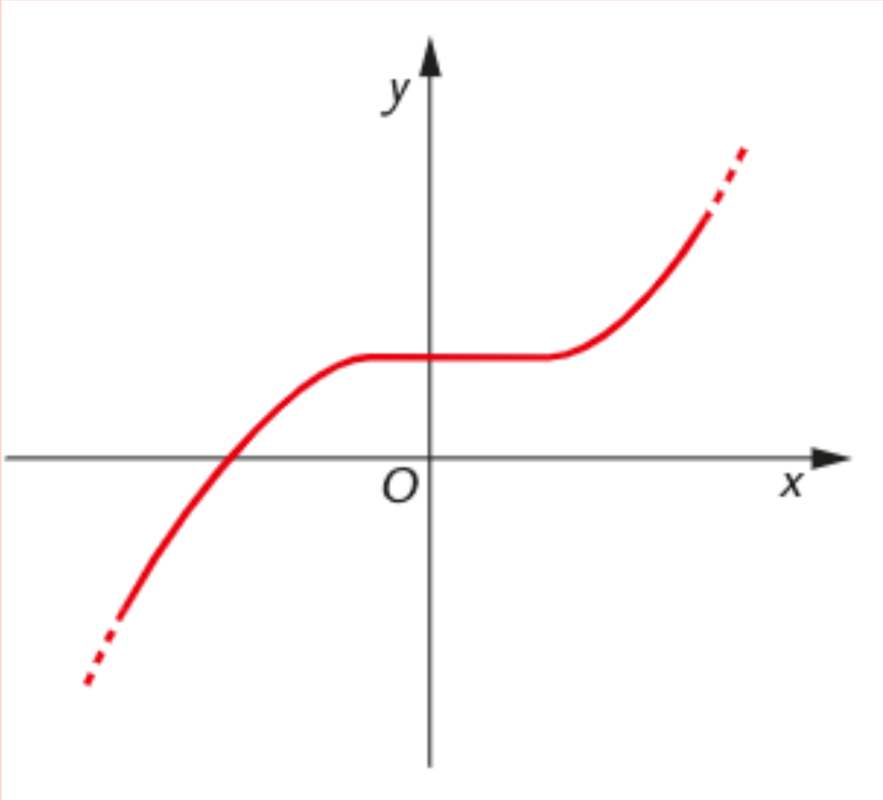


Figura 5.11 Per ogni $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) > f(x_2)$: la funzione è strettamente *decrescente* in $[a, b]$.

Funzioni crescenti e decrescenti

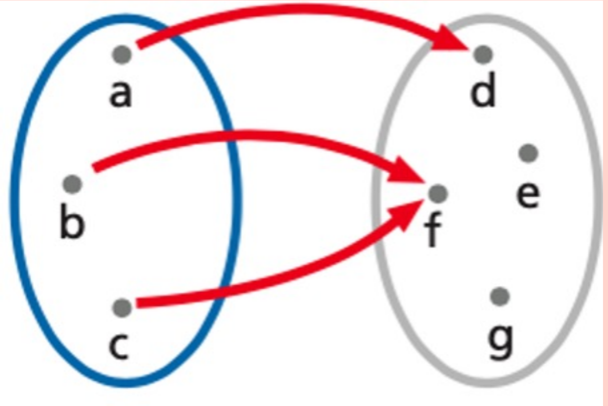


DEFINIZIONE

$y = f(x)$

$\boldsymbol{D \subseteq R}$

f: D ⟶ R



È una funzione:

Crescente in senso stretto in un intervallo $I \subseteq D$ se, scelti:

$$x_1, x_2 \in I, \qquad con\ \ x_1 < x_2 \quad \text{risulta } f(x_1) \leq f(x_2)$$

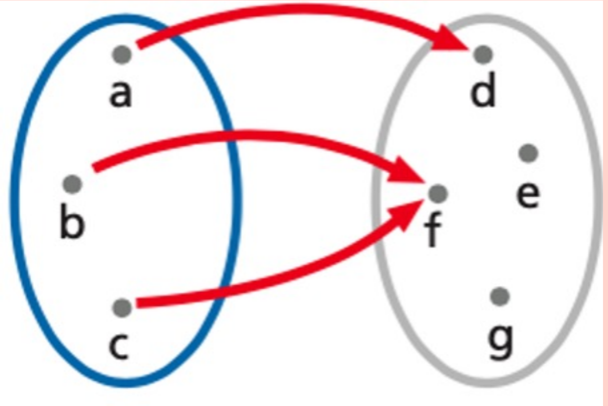
Funzioni crescenti e decrescenti

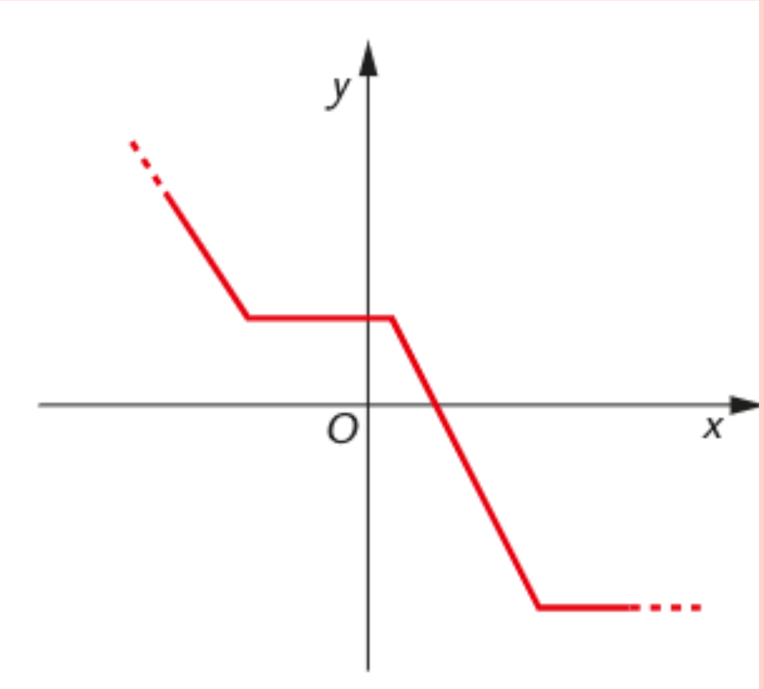
DEFINIZIONE

$y = f(x)$

$\boldsymbol{D \subseteq R}$

f: D $\longrightarrow$ **R**





È una funzione:

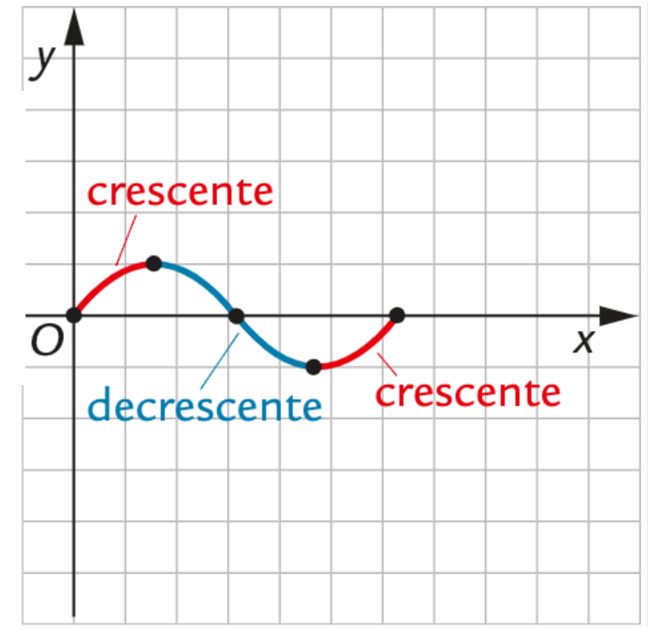
Decrescente in senso stretto in un intervallo $I \subseteq D$ se, scelti:

$$x_1, x_2 \in I, \qquad con\ \ x_1 < x_2 \quad \text{risulta } f(x_1) \geq f(x_2)$$

Esempi funzione crescente e descrescente

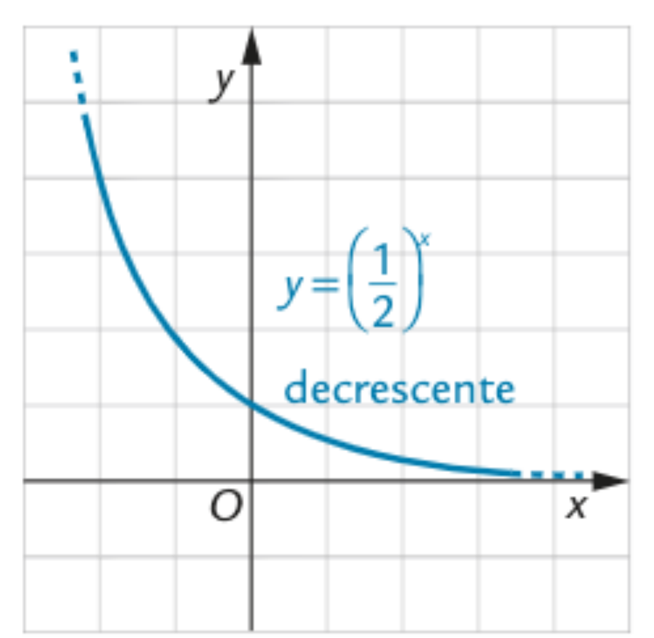
a. La funzione seno:

- negli intervalli $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ è strettamente crescente
- nell'intervallo $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ è strettamente decrescente



La funzione esponenziale $y = a^x$ *con* $0 < x < a$

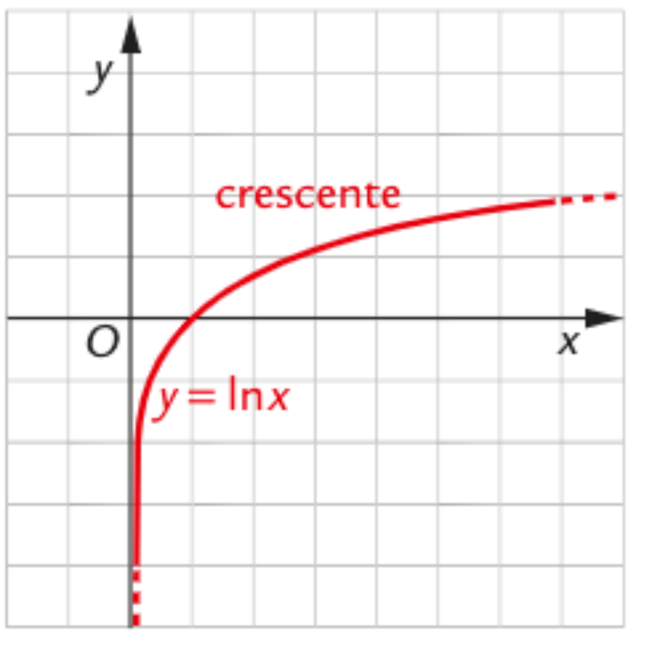
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ è } strettamente\ decrescente$$



Esempi funzione crescente e descrescente

La funzione logaritmica $y = log_a x \quad a > 1$

$$y = \ln x \text{ è } strettamente\ crescente$$



Funzioni PARI e DISPARI

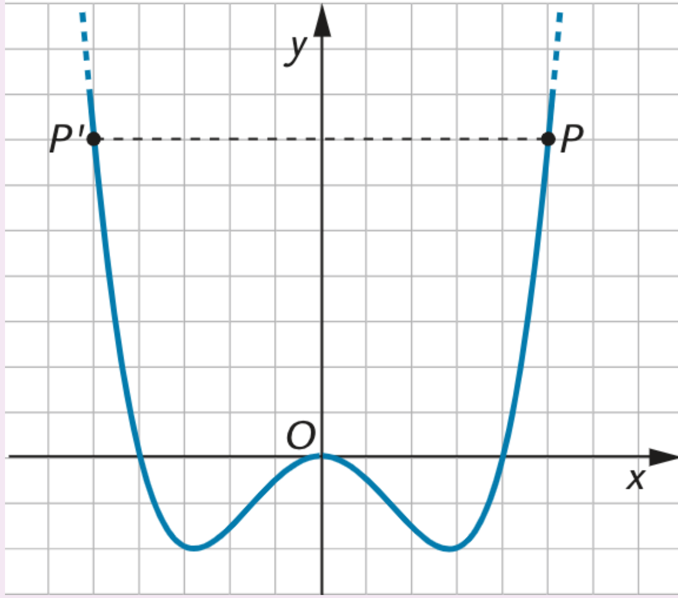
Funzioni pari e dispari

DEFINIZIONE (PARI)

Sia data $y = f(x)$, avente dominio D

Se risulta $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in D$ la funzione si dice **Pari**

Il suon grafico è simmetrico rispetto all'asse y

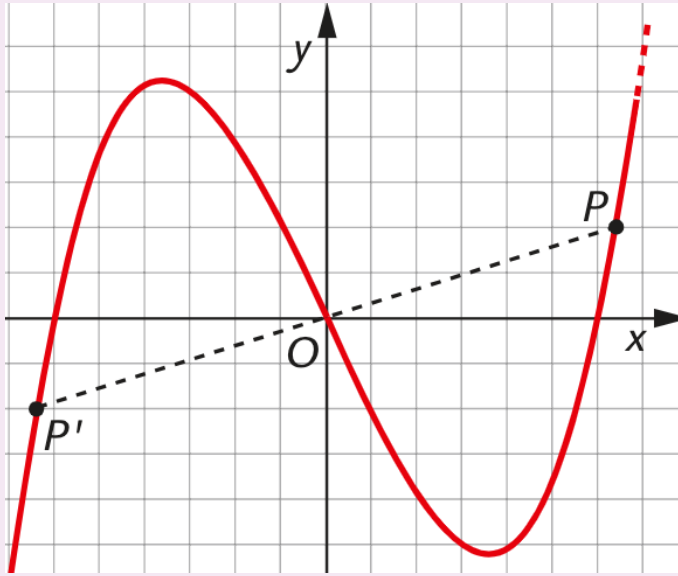


DEFINIZIONE (DISPARI)

Sia data $y = f(x)$, avente dominio D

Se risulta $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$ la funzione si dice **Dispari**

Il suon grafico è simmetrico rispetto all'origine



Funzioni pari e dispari

Sia data $y = f(x)$, avente dominio D

FUNZIONE PARI

Se risulta $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in D$

FUNZIONE DISPARI

Se risulta

$f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$

Esempi Funzioni pari e dispari

Stabilire se una funzione è pari o dispari

1) $f(x) = |x|$

Definita su tutto R

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$ La funzione è pari

2) $f(x) = \sqrt{x}$

Definita $x \geq 0$

$f(-x) = \sqrt{-x} \neq f(x)$ La funzione non è ne pari ne dispari

3) $f(x) = \sin x$

Definita su tutto R

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$ La funzione è dispari

Esempi Funzioni pari e dispari

Stabilire se una funzione è pari o dispari

4) $f(x) = x^5 - 1$

Definita su tutto R

$f(-x) = -x^5 - 1 \neq f(x) = x^5 - 1.$ La funzione non è pari

$f(-x) = -x^5 - 1 \neq -f(x) = -x^5 + 1.$ La funzione non è dispari

$f(x) = x^5 -$

Esercizi funzione pari o dispari

Stabilisci se le seguenti funzioni sono pari, dispari o né pari né dispari.

260 $y = x^8 - x^5$ N

261 $y = x^8 - x^6$ P

262 $y = x^3 - x^5$ D

263 $y = x^3 - x^5 + 1$ N

264 $y = x^8 - x^6 + 1$ P

265 $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$ N

266 $y = \dfrac{1}{4}\sqrt[3]{x}$ D

267 $y = \dfrac{1}{x^5 - x^3}$ D

268 $y = \sqrt[3]{2 - x^2}$ P

269 $y = \dfrac{2x}{x^4 - 1}$ D

270 $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ N

271 $y = x^5 - x^3 - x + 2$ N

272 $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ D

273 $y = \dfrac{3x^2 - 1}{4x^3}$ D

274 $y = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$

275 $y = e^{x^3}$

Mathematica

Mathematica

Esercizi funzione pari o dispari

Stabilisci se le seguenti funzioni sono pari, dispari o né pari né dispari.