Mathematica

Funzioni esponenziali

Classe Quarta

Prof. Domenico Lo Iacono

Ripasso: le potenze

Prof. Domenico Lo Iacono

Mathematica ML

Proprietà delle potenze

Si può dimostrare che dato un numero reale $a \geq 0$ ed un numero $\boldsymbol{m}$ reale qualsiasi, la potenza $\boldsymbol{a^m}$ è ancora un numero reale

Le potenze ad esponente intero, razionale o reale, che indichiamo generalmente con ***m*** e ***n***, godono delle seguenti proprietà:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^m = a^{m \cdot} b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^{m \cdot}}{b^m}$$

Mathematica ML

Ripasso: le potenze

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{(-1)^2}{(2)^2} = \frac{(1)^2}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$(2)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

Cosa succede quando l’esponente è 0?

Esercizi

Semplifica, applicando le proprietà delle potenze.

25 $2^{10} : 2^7$ [8]

26 $(10^{11} : 10^9)^2$ [10 000]

27 $(2^3)^2 : 2^2$ [16]

28 $(3^6)^2 : (3^4)^2$ [81]

29 $(8^7)^2 : (8^2)^6$ [64]

30 $(10^2 \cdot 10^5) : 10^7$ [1]

31 $(80^6 : 20^6) : 4^4$ [16]

32 $2^2 \cdot (2^{2\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ [64]

33 $[(3^{\sqrt{3}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}]^{\sqrt{3}}$ [27]

34 $(5^{2-\sqrt{5}})^{2+\sqrt{5}} \cdot 5^3$ [25]

Mathematica

Esercizi

Mathematica

Funzioni esponenziali

Prof. Domenico Lo Iacono

Funzioni esponenziali

$$a = 1$$

$$y = 1^x = 1$$

$$y = 1 \quad \textit{Retta parallela all'asse } x$$

Per esempio $\quad y = 2^x$

Mathematica ML

Funzioni esponenziali

- La funzione esponenziale è un’equazione del tipo

$$y = a^x \qquad a > 0 \qquad a \neq 1$$

Dominio. $\Re$

Codominio. $\Re^+$-(0)

Per esempio $y = 2^x$

Mathematica

Grafico di una funzione esponenziale

Una funzione associa ad ogni valore di x un solo valore di y

ESEMPIO

$x = 1 \quad \longrightarrow \quad y = 2^1 = 2$

$x = 2 \quad \longrightarrow \quad y = 2^2 = 4$

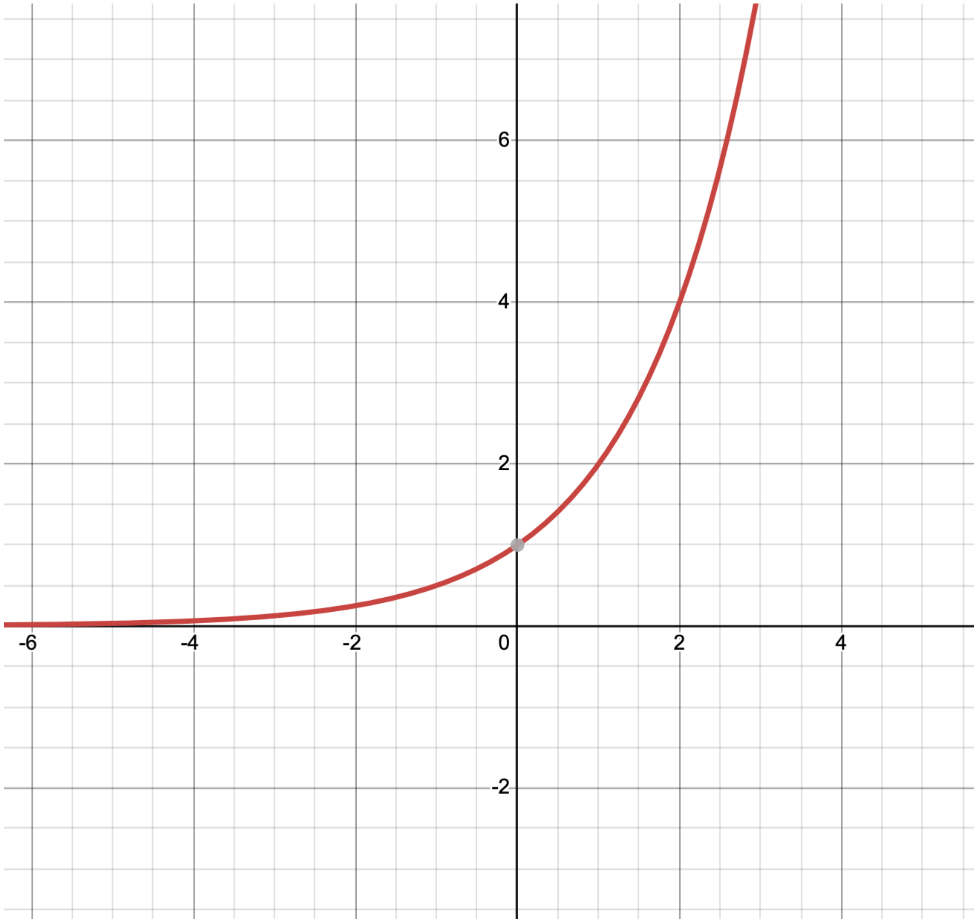
$x = 3 \quad \longrightarrow \quad y = 2^3 = 8$

$x = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 2^0 = 1$

$x = -1 \quad \longrightarrow \quad y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$x = -2 \quad \longrightarrow \quad y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$x = -10 \quad \longrightarrow \quad y = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}}$

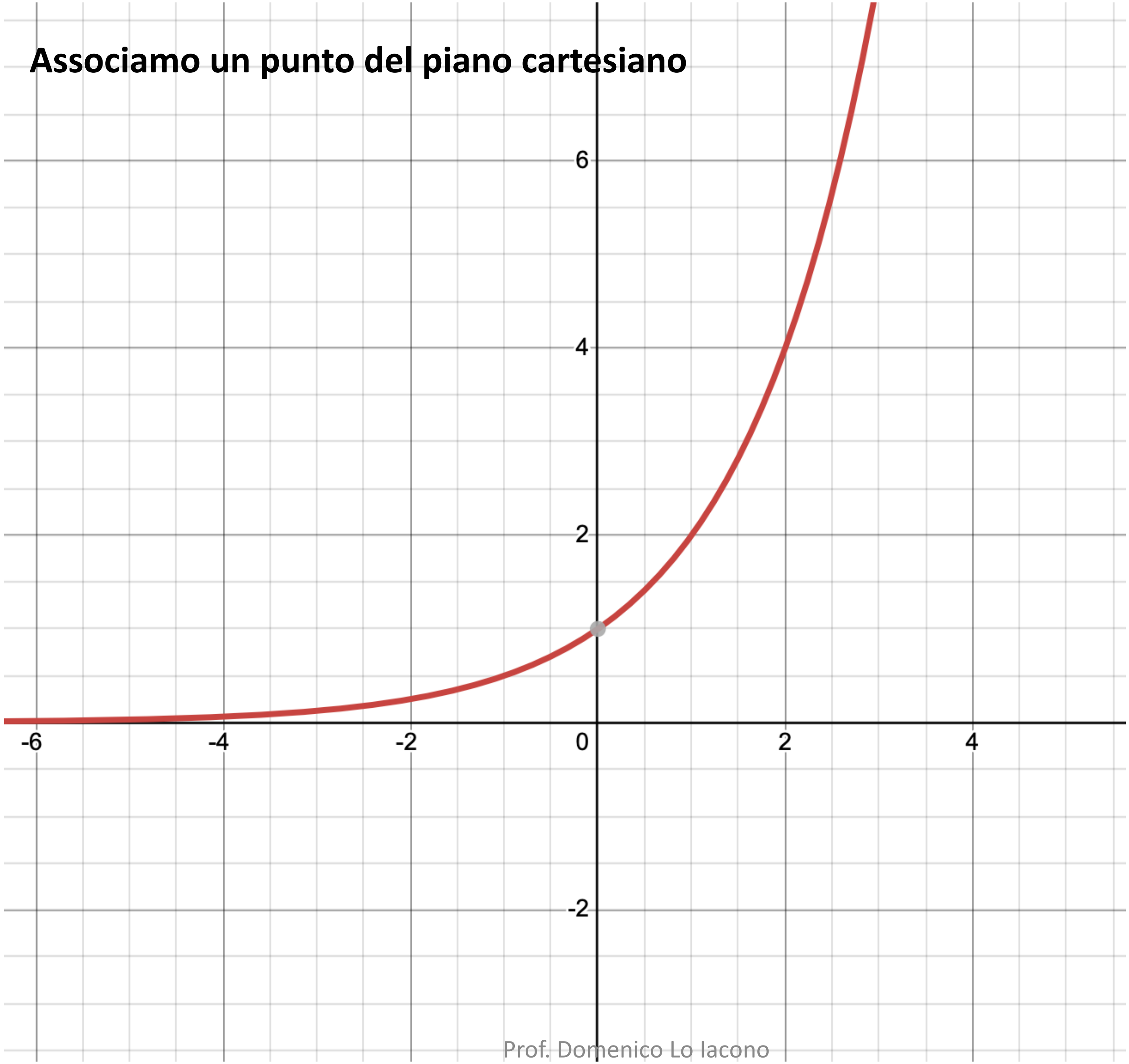


Grafico

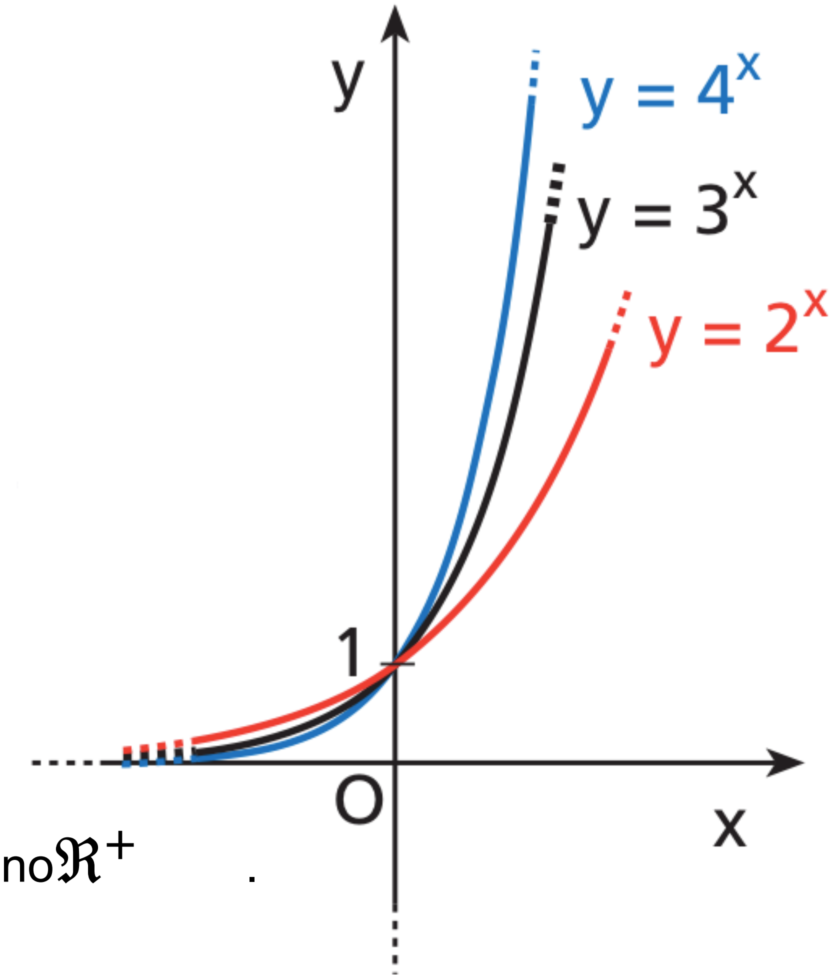
Ad ogni coppia

$$(x, \qquad 2^x)$$

Associamo un punto del piano cartesiano



funzione esponenziale



DEFINIZIONE

Funzione esponenziale

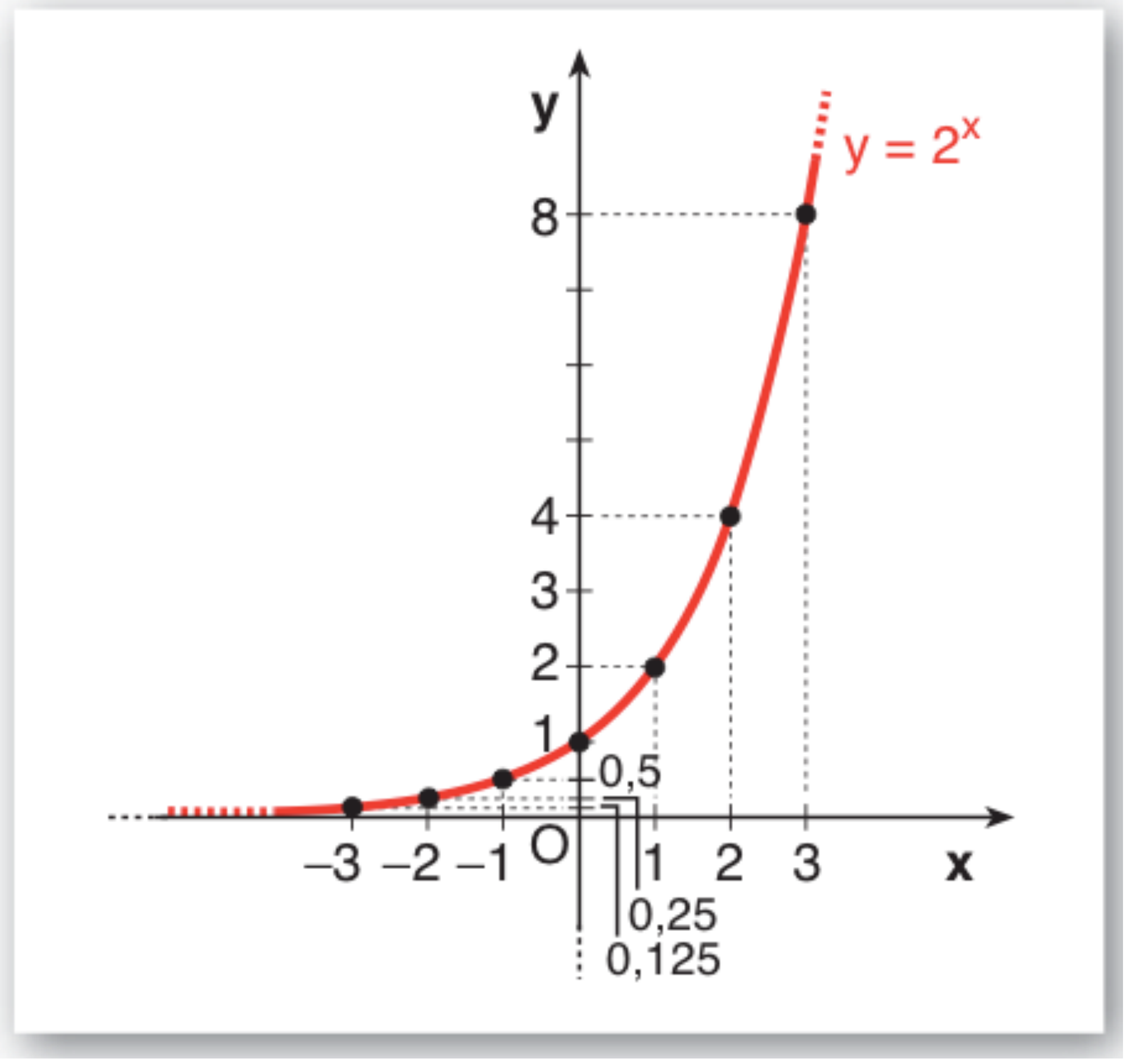
Si chiama funzione esponenziale ogni funzione del tipo:

$y = a^x$, con $a \in \mathbb{R}$

Il dominio della funzione è $\Re$, il codomino $\Re^+$.

Al variare di a si hanno tre possibili andamenti:

funzione esponenziale



a > 1

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

La funzione esponenziale a > 1

- ha come dominio tutta la retta reale $\mathbb{R}$
- interseca gli assi nel punto di coordinate $(0; 1)$
- è maggiore di zero per ogni $x \in \mathbb{R}$ appartenente ad
- è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

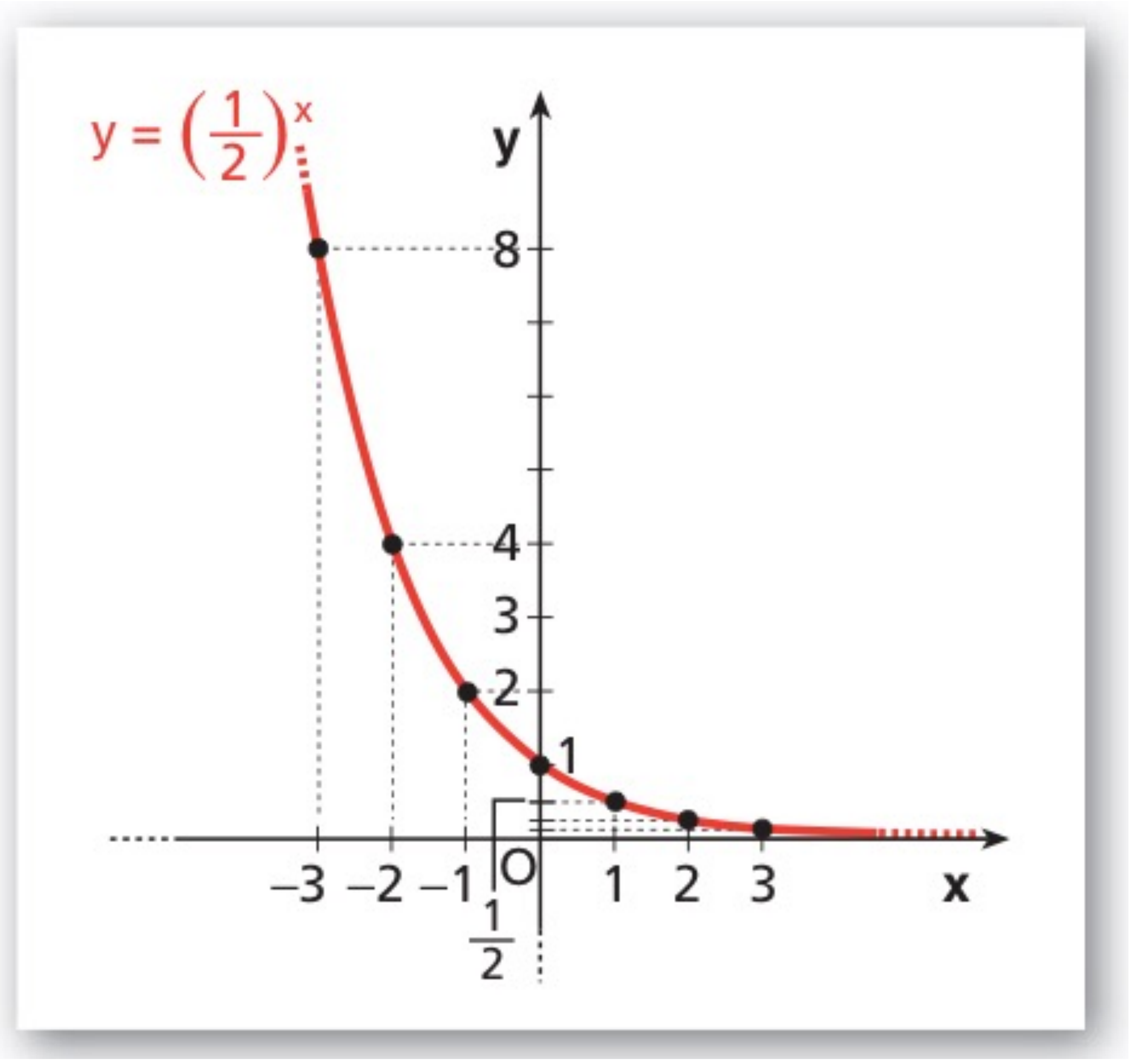
Inoltre, osservando il grafico della funzione è semplice dedurre che:

- quando x "cresce" la funzione esponenziale "cresce".
- quando x "decresce" la funzione esponenziale "tende ad annularsi".

funzione esponenziale

0 < a < 1

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



funzione esponenziale $0 < a < 1$

- ha come dominio tutta la retta reale $\mathbb{R}$ **e come codominio** $\mathbb{R}^+$

- interseca gli assi nel punto di coordinate $(0; 1)$

- è maggiore di zero per ogni $x \in \mathbb{R}$ appartenente ad

- è strettamente decrescente su $\mathbb{R}$.

Inoltre, osservando il grafico della funzione è semplice dedurre che:

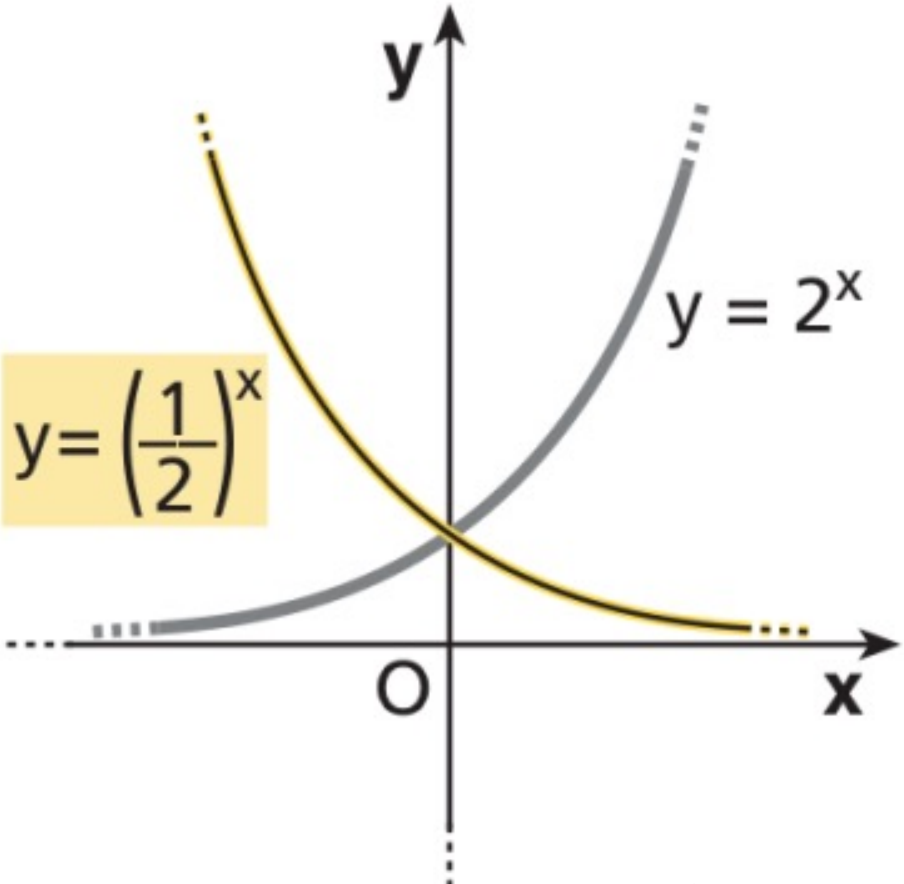
- quando x "cresce" la funzione esponenziale "tende ad annularsi".

- quando x "decresce" la funzione esponenziale "cresce".

funzione esponenziale

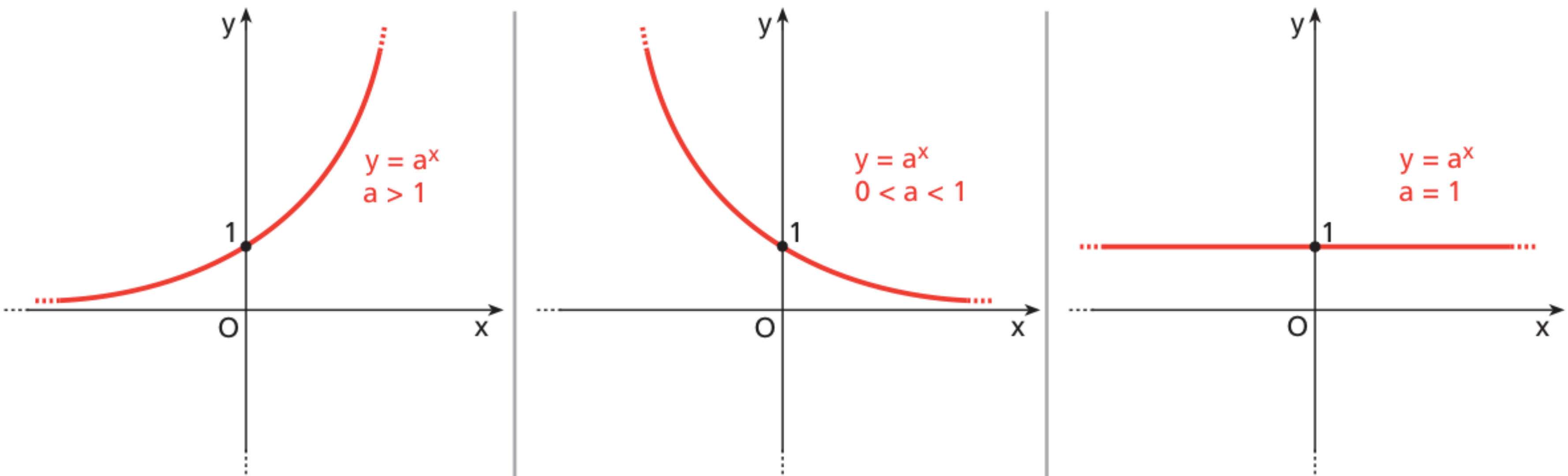
- Se *a=1* la funzione è una retta parallela all'asse delle ascisse passante per il punto (0;1).

- Il grafico della funzione $y = 2^x$ e quello della funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ sono simmetrici ri



funzione esponenziale

In conclusione:



a.
- Dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione crescente in $\mathbb{R}$;
- funzione biiettiva;
- $a^x \to 0$ per $x \to -\infty$;
- $a^x \to +\infty$ per $x \to +\infty$.

b.
- Dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\mathbb{R}^+$;
- funzione decrescente in $\mathbb{R}$;
- funzione biiettiva;
- $a^x \to 0$ per $x \to +\infty$;
- $a^x \to +\infty$ per $x \to -\infty$.

c.
- Dominio: $\mathbb{R}$;
- codominio: $\{1\}$;
- funzione costante;
- funzione non iniettiva.

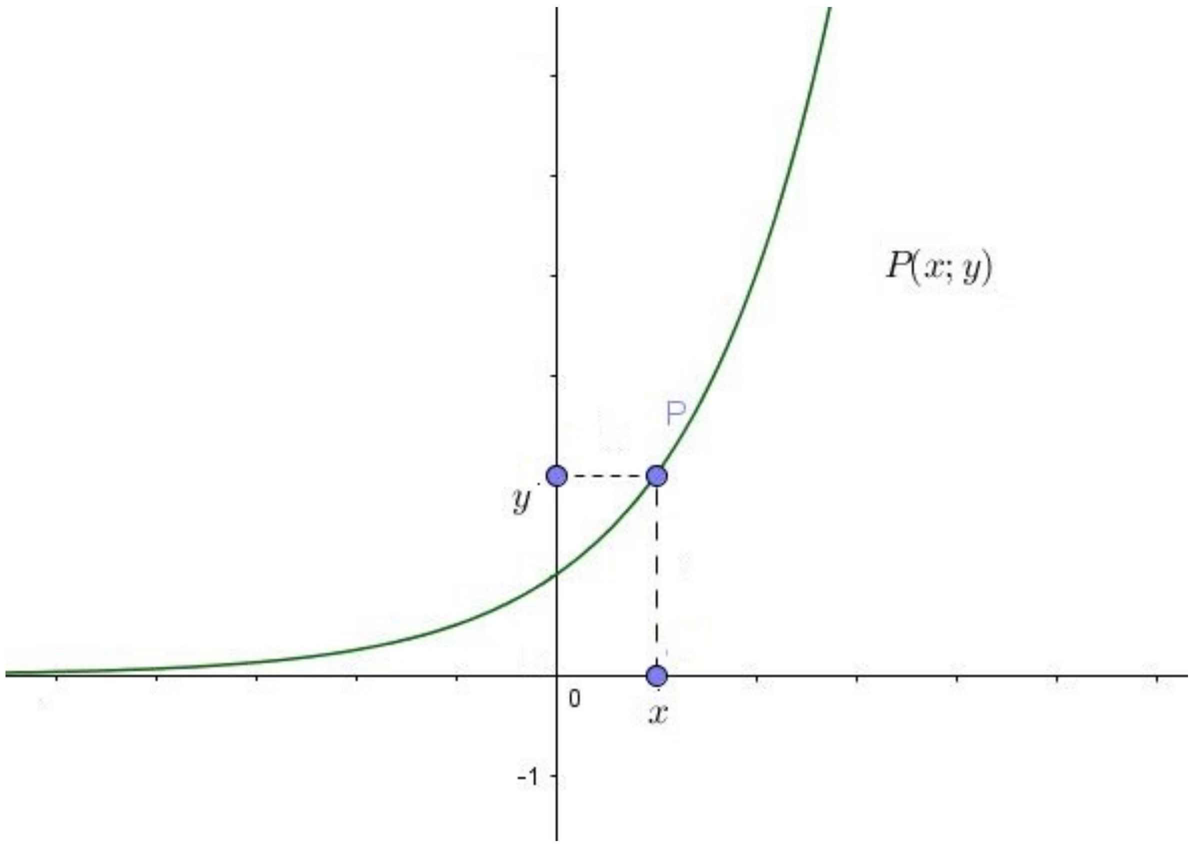
Mathematica ML

Proprietà

- Se x cresce, y cresce molto più velocemente.
- Se x diventa sempre più negativa, y tende ad annullarsi
- Per ogni punto del grafico, ogni valore dell'ordinata è il corrispondente di un solo valore dell'ascissa.

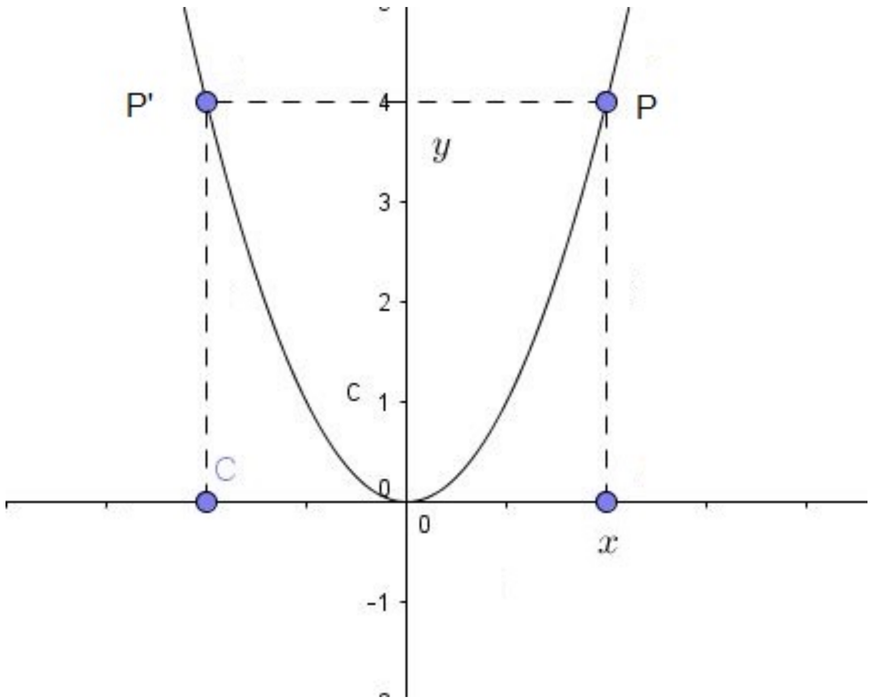
  (La funzione è UNIVOCA)

Funzioni univoche



Per ogni valore di x, UN SOLO punto assume il valore dell'ordinata corrispondente y

Funzioni non univoche



DUE punti diversi, P e P’, assumono uno stesso valore dell’ordinata, y

Traccia il grafico delle funzioni:

Utilizzando opportune trasformazioni geometriche, traccia il grafico delle seguenti funzioni.

a. $y = 2^x + 2$ **b.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ **c.** $y = |2^x - 1|$

Rivedi preliminarmente le tecniche per dedurre, a partire dal grafico di una funzione nota, i grafici di altre funzioni utilizzando opportune trasformazioni geometriche.

a. Rappresenta preliminarmente il grafico di $y = 2^x$. Puoi ottenere il grafico della funzione $y = 2^x + 2$ traslando verticalmente il grafico di $y = 2^x$ di due unità verso l'alto.

b. Rappresenta preliminarmente il grafico di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Puoi ottenere il grafico della funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ traslando orizzontalmente il grafico di $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ di una unità verso sinistra.

c. Rappresenta preliminarmente il grafico di $y = 2^x$. Puoi ottenere il grafico della funzione $y = 2^x - 1$ traslando verticalmente il grafico di $y = 2^x$ di una unità verso il basso.
Simmetrizza infine rispetto all'asse x le parti del grafico di $y = 2^x - 1$ che hanno ordinate negative, in modo da ottenere il grafico di $y = |2^x - 1|$.

Traccia il grafico delle funzioni:

60 $y = -2^x + 2$

61 $y = 2^{x-3} - 1$

62 $y = 3^{-x} - 5$

63 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 1$

64 $y = \frac{1}{6} \cdot 3^x - 2$

65 $y = 3 - 3^x$

66 $y = 2^{-2x} - 4$

67 $y = 4 - 2^{x+2}$

68 $y = |-2^x|$

69 $y = 2^{-|x|} + 1$

70 $y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3\right|$

71 $y = |2 - 2^x|$

72 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$

73 $y = |2^{x+1} - 1|$

74 $y = 2^{|x-1|} - 1$

75 $y = -\left|4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x\right|$

Traccia il grafico delle funzioni:

Mathematica ML

Esercizi

- Esempio 1

$$2^{x+1} = 2^{2x-1}$$

$$x + 1 = 2x - 1$$

$$x - 2x = 1 - 1$$

$$-x = 0$$

$$x = 0$$

- Esempio 2

$$2^{x+1} = 2^{3}$$

$$x + 1 = 3$$

$$x = 3 - 1$$

Equazioni esponenziali

Equazioni esponenziali

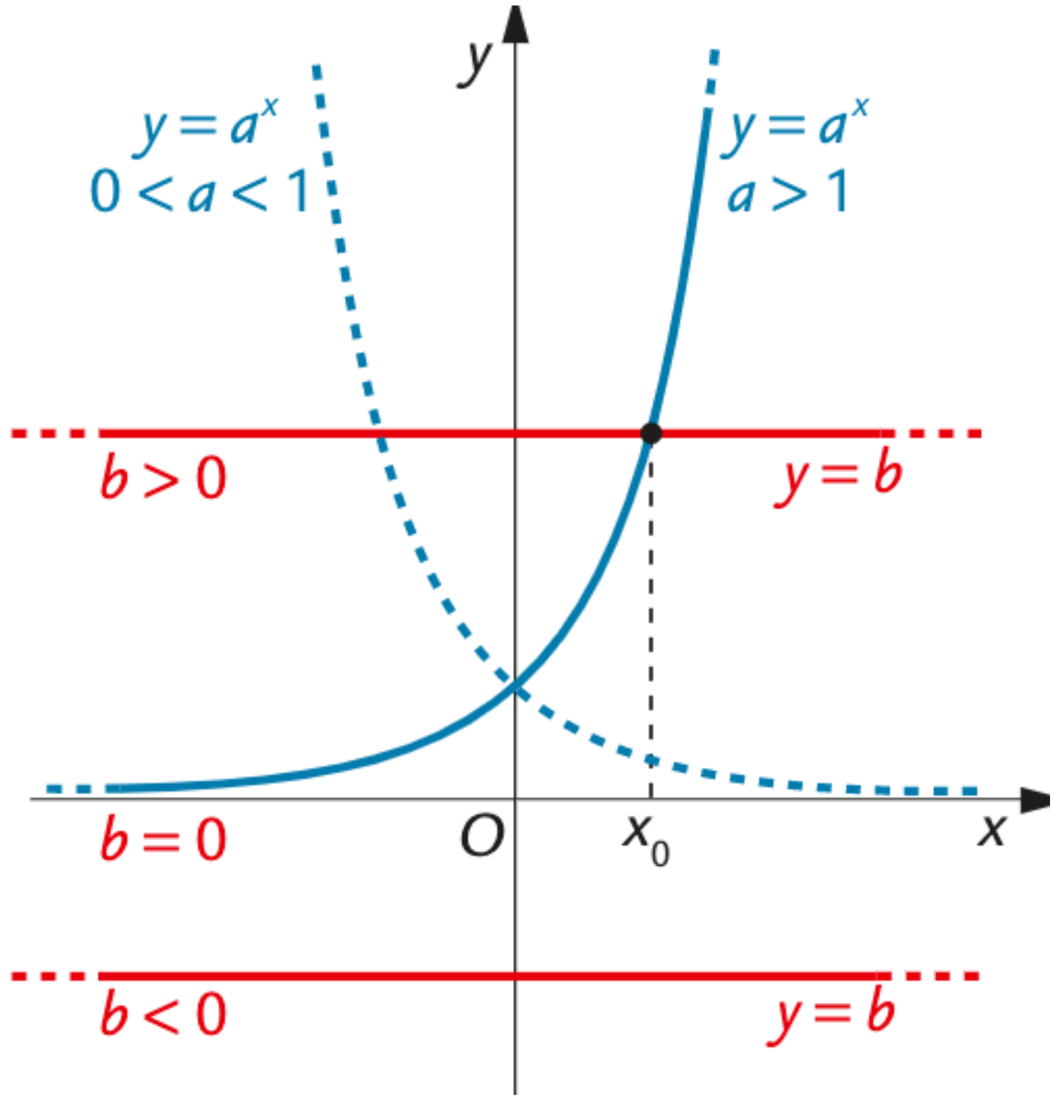
EQUAZIONE ESPONENZIALE

Un'equazione si dice **esponenziale** quando l'incognita compare nell'esponente di almeno una potenza.

La più semplice equazione esponenziale, detta **equazione esponenziale elementare**, si presenta nella forma:

$$a^x = b, \qquad \text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$a^x = b, \qquad \text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$



$a^x = b$

- se $\boldsymbol{b \leq 0}$, è impossibile
- se $\boldsymbol{b > 0}$, ammette un'unica soluzione

ESEMPI Equazioni esponenziali elementari

a. L'equazione $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4}$ ha come unica soluzione $x = 2$.

b. L'equazione $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$ ha come unica soluzione $x = -1$.

c. L'equazione $3^x = -2$ **non** ha soluzioni perché una potenza con base positiva (come 3^x) è sempre positiva, qualsiasi valore si attribuisca all'esponente.

d. L'equazione $\left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$ ha come unica soluzione $x = 0$.

e. L'equazione $2^{-x} = 0$ **non** ha soluzioni perché una potenza con base diversa da zero (come 2^{-x}) non è mai nulla.

Equazioni riconducibili alla forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Uguaglianza di potenze con la stessa base

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Due potenze aventi la stessa base e uguale e diversa da 1 sono uguali cioè solo se è uguale l’esponente

Quindi diventa:

$$f(x) = g(x)$$

Equazioni riconducibili a equazioni elementari mediante sostituzioni

ESEMPIO **Equazione risolvibile mediante una sostituzione**

Risolviamo l'equazione $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

Poniamo $2^x = t$ e, quindi, $2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$.
Con questa sostituzione l'equazione data si può riscrivere nella forma:

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

che ammette come soluzioni $t = -1$ e $t = 4$.

Esercizi

Equazioni riconducibili alla forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

$3^{2x+1} = 27$

$3^{2x+1} = 27 \Rightarrow 3^{2x+1} = 3^3 \Rightarrow 2x+1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

$5^x = 5\sqrt[3]{5}$

$5^x = 5\sqrt[3]{5} \Rightarrow 5^x = 5 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 5^x = 5^{1+\frac{1}{3}} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

39 Completa la risoluzione delle seguenti equazioni.

a. $5^{2x} = 25 \Rightarrow 5^{2x} = 5^{\cdots} \Rightarrow 2x = \ldots \Rightarrow x = \ldots$

b. $3^{-x} = \sqrt{3} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{1}{\cdots}} \Rightarrow -x = \frac{1}{\ldots} \Rightarrow x = -\frac{1}{\ldots}$

c. $4^x = \frac{1}{8} \Rightarrow (2^2)^x = 2^{-3} \Rightarrow 2^{\cdots} = 2^{-3} \Rightarrow 2x = \ldots \Rightarrow x = \ldots$

d. $3^x \cdot 9^{2x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 3^x \cdot 3^{\cdots} = \frac{1}{3^{\frac{1}{\cdots}}} \Rightarrow 3^{x+\cdots} = 3^{-\frac{1}{\cdots}} \Rightarrow x + \ldots = -\frac{1}{\ldots} \Rightarrow \ldots x = -\frac{1}{\ldots} \Rightarrow x = \ldots$

Esercizi Equazioni riconducibili alla forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Risolvi le seguenti equazioni.

90 $5^x = 25$ $[2]$

91 $2^x = 64$ $[6]$

92 $9^x = 27$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

93 $8^x = \sqrt{3} - 2$ [Impossibile]

94 $5^{2-x} = \frac{1}{125}$ $[5]$

95 $3^{2x} = \frac{1}{9}$ $[-1]$

96 $4^x = 2\sqrt{2}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

97 $9^x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

98 $4^x = -2$ [Impossibile]

99 $9^x = \frac{1}{81}$ $[-2]$

100 $25^{2-x} = 125$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

101 $3^{x-1} = \frac{1}{9}$ $[-1]$

102 $(5)^{x^2} = \sqrt{5}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Esercizi Equazioni riconducibili alla forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

104 $(5^x)^2 = \sqrt{5}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

105 $\pi^x = 1 - \pi$ [Impossibile]

106 $3^{x+1} = \frac{1}{9}$ $[-3]$

107 $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{4}{9}$ $[-1]$

108 $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$ [Impossibile]

109 $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2x} = \left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$ $[-1]$

110 $2^{2x} \cdot 4^{x+1} = 16$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

111 $3^{x+1} \cdot \sqrt{3} = 3^{-x}$ $\left[-\frac{3}{4}\right]$

112 $e^{\frac{x-1}{x-2}} = 1$ $[1]$

113 $e^{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}$ $[2]$

114 $5^{\frac{x-2}{2}} = \sqrt{5}$ $[3]$

115 $\frac{1}{3^x} = 9\sqrt{3}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

Esercizi

37 Fra le funzioni che hanno le seguenti equazioni, una **non** è esponenziale. Quale?

A $y = (-2)^x$ B $y = (\sqrt{2})^x$ C $y = 2^{2x}$ D $y = (0{,}1)^x$

38 Fra le funzioni che hanno le seguenti equazioni, una **non** è esponenziale. Quale?

A $y = (2 - \sqrt{2})^x$ B $y = (\sqrt{2} - 2)^x$ C $y = 3^{-x}$ D $y = 100^x$

39 Individua la base delle funzioni esponenziali di cui è data l'equazione:

a. $y = 3^{-2x}$ **b.** $y = 2^{3x}$ **c.** $y = (0{,}1)^{-x}$

(*Suggerimento*: osserva, per esempio, che $y = 3^{-2x} = (3^{-2})^x$; analogamente per le altre funzioni.)

40 **Vero o falso?**

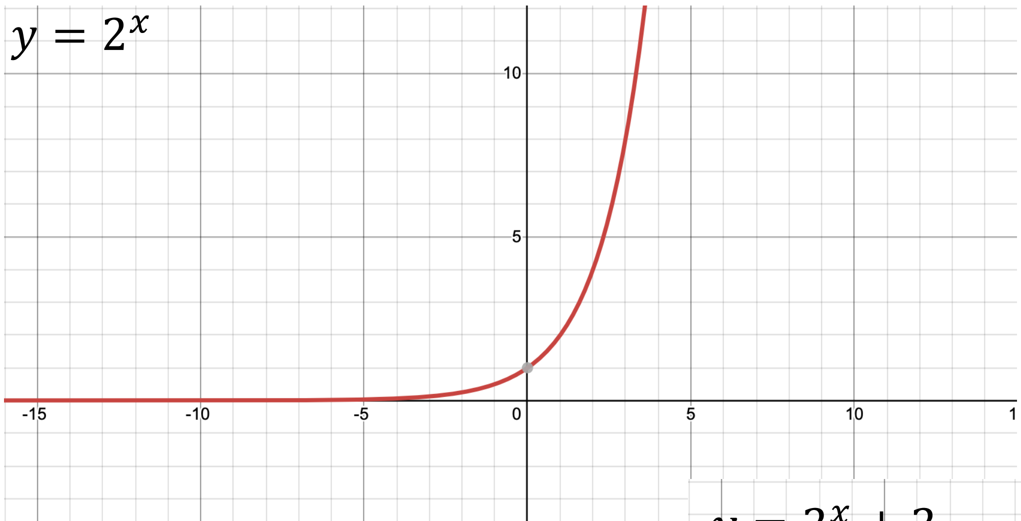
a. la funzione di equazione $y = 5^x$ è crescente V F
b. la funzione di equazione $y = 5^{-x}$ è crescente V F
c. la funzione di equazione $y = (0{,}3)^x$ è decrescente V F
d. la funzione di equazione $y = (0{,}3)^{-x}$ è decrescente V F

Mathematica ML

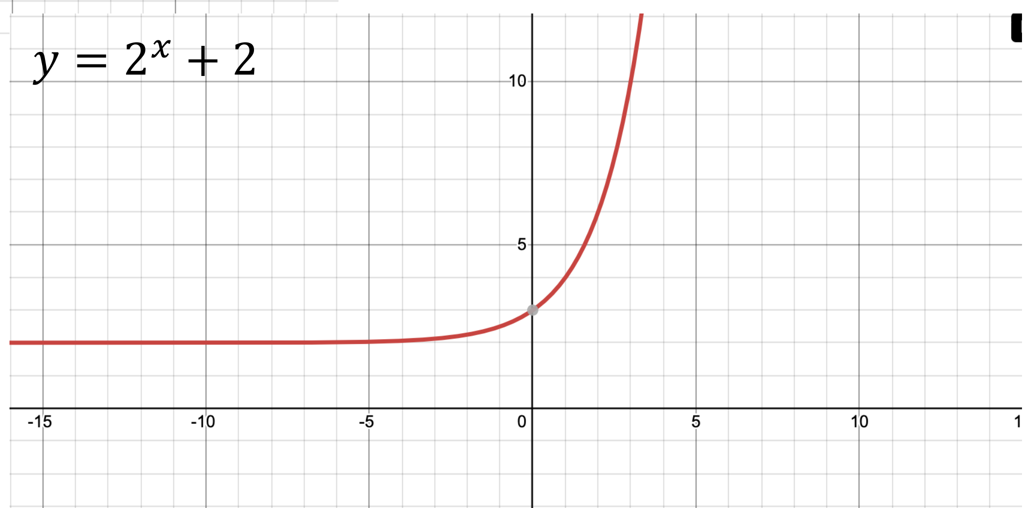
Esercizi

Utilizzando opportune trasformazioni geometriche, traccia il grafico delle seguenti funzioni.

a. $y = 2^x + 2$



Trasliamo verticalmente di due unita



Equazioni riconducibili a equazioni elementari mediante sostituzioni:

149 ESERCIZIO SVOLTO

Risolviamo l'equazione $3^{2x+1} - 8 \cdot 3^x - 3 = 0$.

Poniamo $3^x = t$. Osserviamo che il primo termine dell'equazione, 3^{2x+1}, si può riscrivere in funzione di t nel seguent modo:

$$3^{2x+1} = 3^{2x} \cdot 3 = (3^x)^2 \cdot 3 = t^2 \cdot 3 = 3t^2$$

Quindi l'equazione data diventa: $3t^2 - 8t - 3 = 0$.

$$t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 3 \cdot (-3)}}{3} = \frac{4 \pm \sqrt{25}}{3} = \frac{4 \pm 5}{3} \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \ \vee \ t = 3$$

Ora rimpiazziamo 3^x al posto di t e risolviamo le equazioni ottenute:

- $3^x = -\frac{1}{3}$ è impossibile
- $3^x = 3 \ \Rightarrow \ x = 1$

Equazioni riconducibili a equazioni elementari mediante sostituzioni:

Risolvi le seguenti equazioni.

152 $2^x + 2^{x+2} = 20$ $[2]$

153 $25 \cdot 5^{x-2} + 5^{x+1} = 6$ $[0]$

154 $2^{x+3} - 2^{x+2} + 2^x = \frac{5}{8}$ $[-3]$

155 $3^{x-1} + 3^x = 12$ $[2]$

156 $3^{x+2} - 3^{x+1} = 2$ $[-1]$

157 $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ $[3]$

158 $5^{2x} + 4 \cdot 5^{x-1} - \frac{1}{5} = 0$ $[-1]$

159 $9^x - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1$ $[-1,\ 1]$

160 $4^{x+1} + 2^{x+2} - 2^x - 1 = 0$ $[-2]$

161 $5 - 4 \cdot 2^{-x} - 2^x = 0$ $[0,\ 2]$

162 $5^{2x} - 5^{x+2} + 5^{x+1} - 125 = 0$ $[2]$

163 $3^{-x} + 3^x = \frac{10}{3}$ $[-1,\ 1]$

164 $10^x - 10^{x+1} = 10$ [Impossibile]

165 $3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+\frac{1}{2}} - 9 = 0$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

166 $2^{2x+2} - 33 \cdot 2^x = -8$ $[-2, 3]$

167 $e^{2x} - e^{x+1} + e^x - e = 0$ $[1]$

168 $10^{2x} - 110 \cdot 10^x + 1000 = 0$ $[1,\ 2]$

169 $(2^x - 4)^2 = 16$ $[3]$

170 $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} - 4\right]^2 = 16$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

171 $(0{,}2)^x + (0{,}04)^x = 2$ $[0]$

172 $\left(\frac{9}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^{x+2} - \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{9}{4} = 0$ $[0, 2]$

173 $\frac{1}{2^x} = 2^x - \frac{3}{2}$ $[1]$

174 $\frac{1}{2^x + 1} + \frac{1}{2^{2x} - 1} = -\frac{2}{3}$ $[-1]$

175 $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^{2x} + 2^x} = \frac{2}{3}$ $[1]$

Mathematica ML Esercizi

Equazioni riconducibili a equazioni elementari mediante sostituzioni: