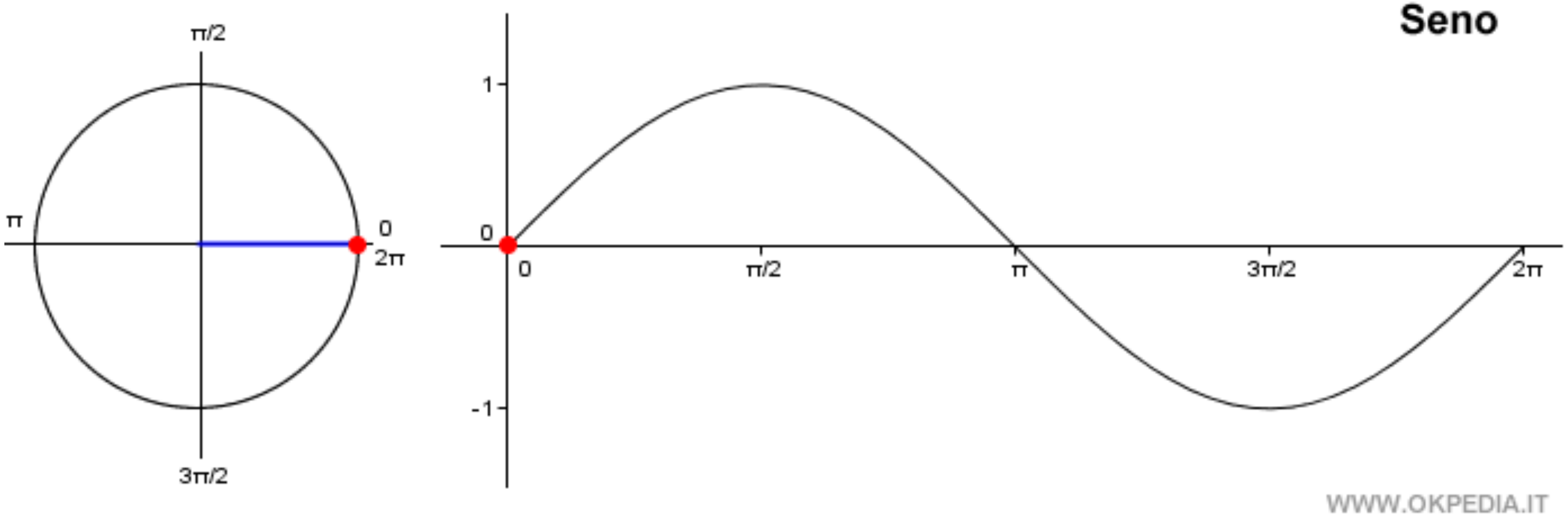
Mathematica
ML

Elementi di

GONIOMETRIA

e

TRIGONOMETRIA



Prof. Domenico Lo Iacono

Mathematica ML

Indice

L'angolo è la parte di piano individuata da due semirette **a** e **b** che hanno la stessa origine.

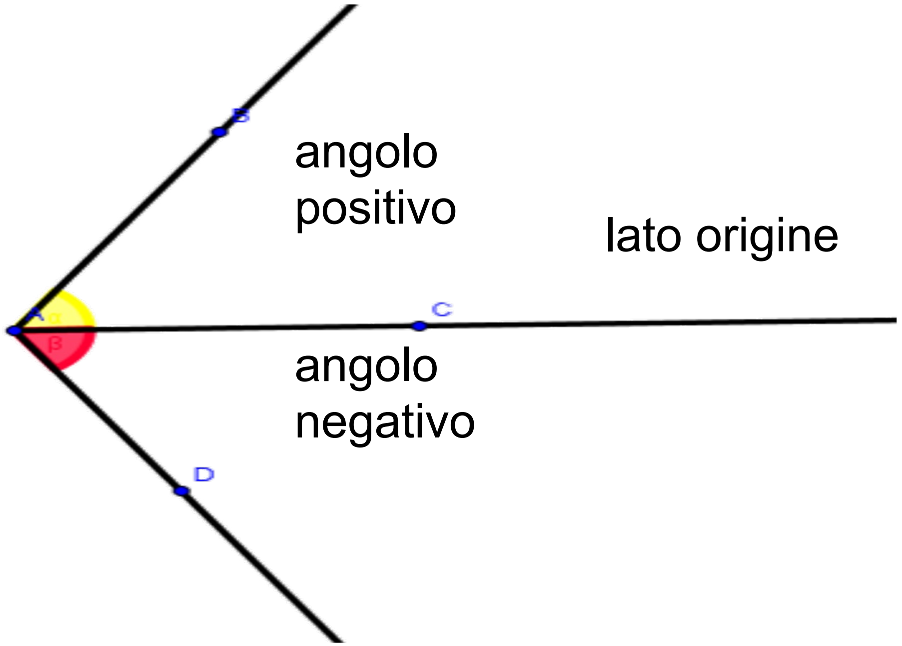
La goniometria si occupa della misura degli angoli e delle relative funzioni.

La trigonometria studia i procedimenti di calcolo che permettono di determinare la misura degli elementi di un triangolo, noti alcuni di essi.

Angoli orientati 1^ parte

Un angolo si dice orientato quando è stato scelto uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione.

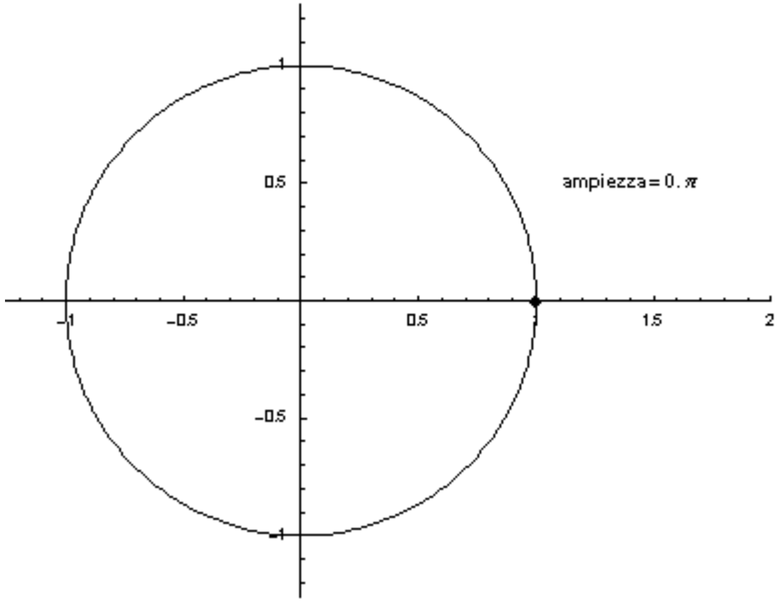
Un angolo orientato si dice positivo quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario; si dice negativo quando la rotazione è in senso orario.

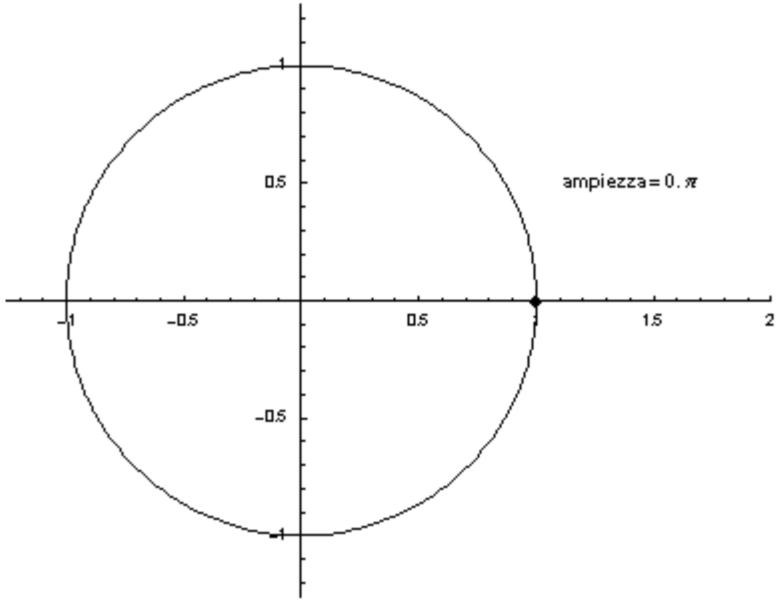


Angoli orientati 2^ parte

Un angolo orientato varia da -∞ a +∞

Applet da http://www.lorenzoroi.net/mathematica/funzGonio/intro/index.html





La misura degli angoli

Sistema sessagesmale

Nel sistema sessagesimale, l'unità di misura degli angoli è il grado sessagesimale, definito come la 360ª parte dell'angolo giro.

Ricordando che:

$$1° = 60'$$
$$1' = 60''$$

Esempio :

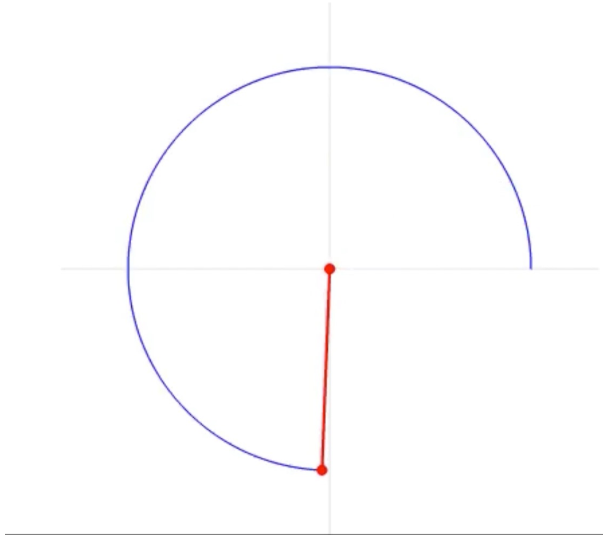
30° 20' 54" + 2° 45' 24" = 32° 65' 78" = 33° 6' 18"

Sistema sessagesimale ➡ l'unità di misura degli angoli è ➡ grado sessagesimale ➡ Equivale a 360ª parte dell'angolo giro.

La misura degli angoli: Graficamente

- Data una circonferenza,
- Consideriamo un arco di lunghezza **uguale** al raggio.

Si chiama radiante l'angolo al centro che sottende un arco



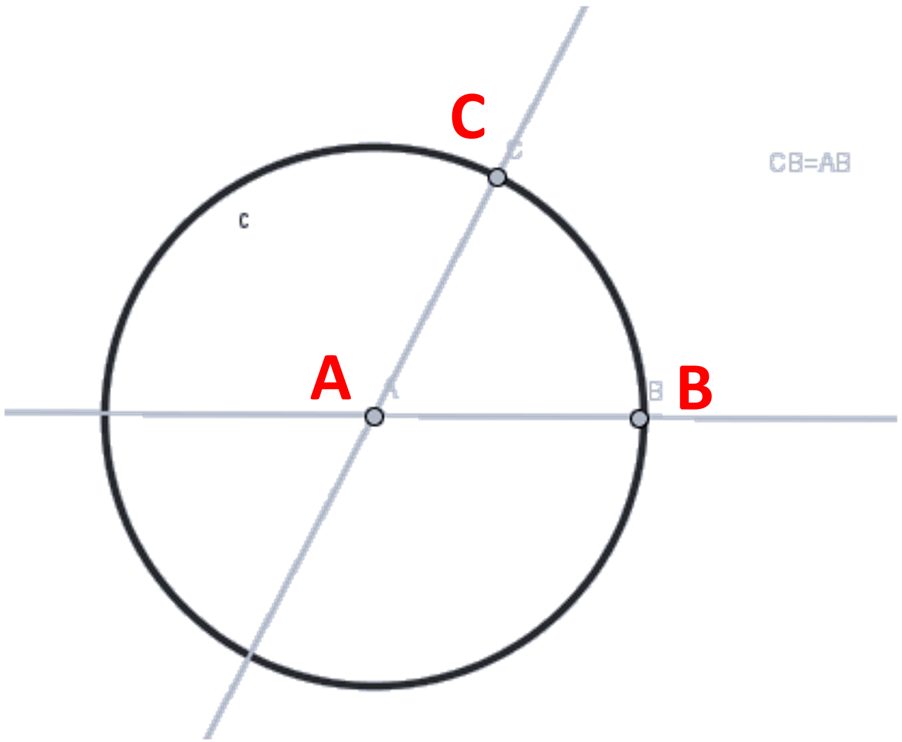
Per semplificare i calcoli si usa il sistema che ha per unità di misura **il radiante**:

La misura degli angoli

Radianti

Data una circonferenza,

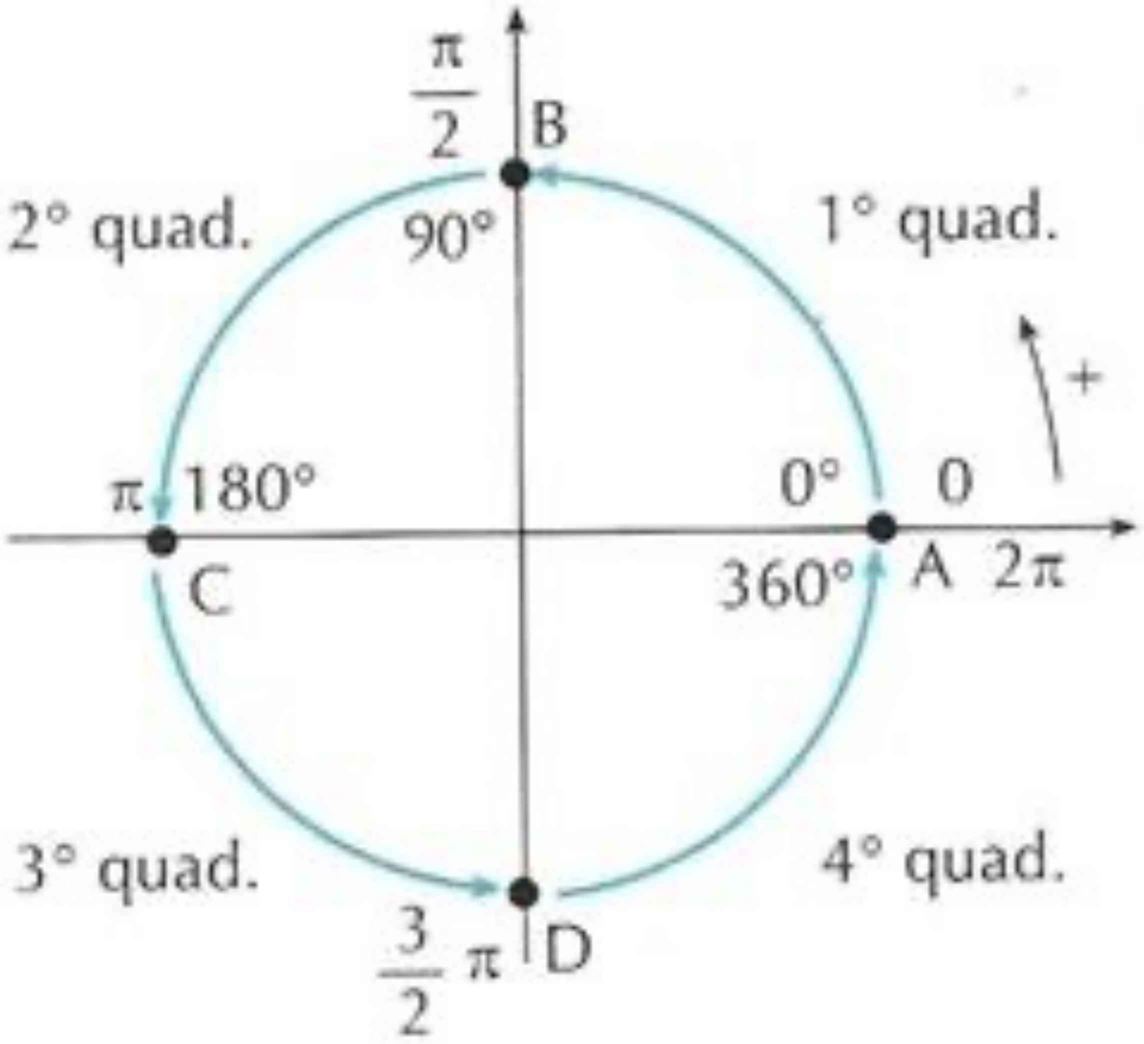
Consideriamo un arco **CB** di lunghezza **uguale** al raggio **AB** .



Quindi la misura in radianti di un angolo al centro è :

il rapporto tra la misura dell'arco sotteso dall'angolo **CB** e la misura del raggio **AB**

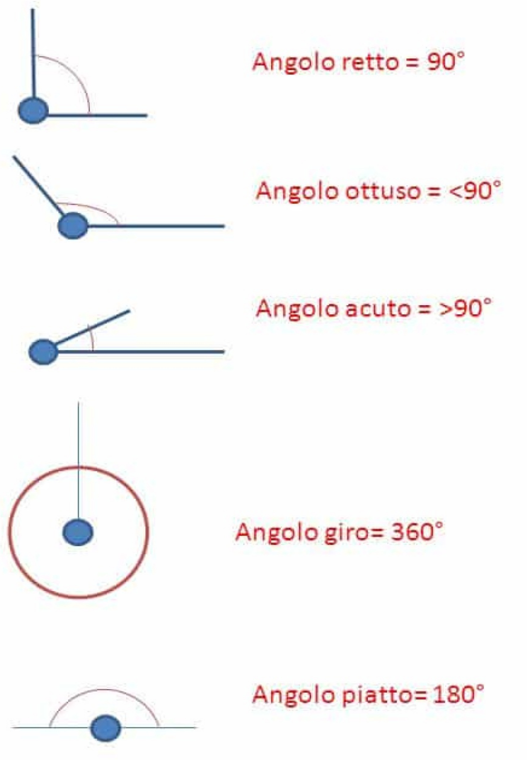
Equivalenza angoli in gradi e radianti



Mathematica

La misura degli angoli in radianti

	Radianti	Gradi
angolo giro	$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$	360°
angolo piatto	π	180°
angolo retto	$\frac{\pi}{2}$	90°



Relazione tra gradi e radianti

$$\alpha^\circ : \alpha_{rad} = 360^\circ : 2\pi$$

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha_{rad} \cdot 360^\circ}{2\pi}$$

$$\alpha_{rad} = \frac{\alpha^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ}$$

Esercizi

1) Da gradi sessagesimale → a decimale

$108°6'28'' =$

$108°6'28'' = 108° + 6/60° + 28/3600° =$

$108°6'28'' = 108° + 1/10° + 7/900° =$

$108°6'28'' = 108.107777777778° = 108.107°$

$108°6'28'' = 108.107°$

Mathematica

2) Da Gradi decimali. → a sessagesimali

$$21{,}347^\circ = 21^\circ + 0{,}347^\circ =$$

$$= 21^\circ + \mathbf{03247 \cdot 60'} =$$

$$= 21^\circ + 20{,}82' =$$

$$= 21^\circ + 20' + 0{,}82' =$$

$$= 21^\circ + 20' + \mathbf{0{,}82 \cdot 60''} =$$

$$= 21^\circ + 20' + 49{,}2''$$

Esercizi

Da gradi, primi e secondi → a forma decimale.

(Arrotonda il risultato alla seconda cifra decimale)

Converti:

3	$13° 25' 12''$	[13,42°]	**7**	$70° 17' 17''$	[70,29°]
4	$56° 44' 30''$	[56,74°]	**8**	$55° 20' 5''$	[55,33°]
5	$-15° 45' 30''$	[–15,76°]	**9**	$40° 10' 45''$	[40,18°]
6	$26° 5' 18''$	[26,09°]	**10**	$30° 55' 15''$	[30,92°]

Mathematica ML **Esercizi**

Da forma decimale → a gradi, primi e secondi.
(Arrotonda il numero che esprime i secondi a un numero intero)

Converti:

13	$85{,}5°$	[$85°\ 30'$]	**17**	$20{,}123°$	[$20°\ 7'\ 23''$]
14	$25{,}4°$	[$25°\ 24'$]	**18**	$55{,}25°$	[$55°\ 15'$]
15	$-50{,}8°$	[$-50°\ 48'$]	**19**	$45{,}27°$	[$20°\ 16'\ 12''$]
16	$20{,}6°$	[$20°\ 36'$]	**20**	$51{,}246°$	[$51°\ 14'\ 46''$]

Relazione da gradi ←→ a radianti

Relazione tra gradi e radianti

$$\alpha^\circ : \alpha_{rad} = 360^\circ : 2\pi$$

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha_{rad} \cdot 360^\circ}{2\pi}$$

$$\alpha_{rad} = \frac{\alpha^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ}$$

Mathematica ML

Da gradi → a radianti

Ricordando

$$\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\,\pi$$

$$\boldsymbol{\alpha_{rad} = \frac{\alpha^{\circ} \cdot 2\pi}{360^{\circ}}}$$

3) Esprimere in radianti l'angolo di 24°.

Dalla proporzione:

$$24° : x = 360° : 2\,\pi$$

segue che:

$$\boldsymbol{x = \frac{24 \cdot 2\pi}{360} =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{24}{180} \cdot \pi = \frac{2}{15} \cdot \pi}$$

Mathematica ML

Da gradi → a radianti

Ricordando

$$\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$$

$$\boldsymbol{\alpha_{rad} = \frac{\alpha^{\circ} \cdot 2\pi}{360^{\circ}}}$$

4) Esprimere in radianti l'angolo di 144°.

Dalla proporzione:

$$144° : x = 360° : 2\pi$$

segue che:

$$\boldsymbol{x = \frac{144 \cdot 2\pi}{360} =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{144}{180} \cdot \pi = \frac{4}{5} \cdot \pi}$$

Mathematica ML

Da radianti → a gradi sessagesimali

Ricordando

$$\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$$

$$\boldsymbol{\alpha^{\circ} = \frac{\alpha_{rad} \cdot 360^{\circ}}{2\pi}}$$

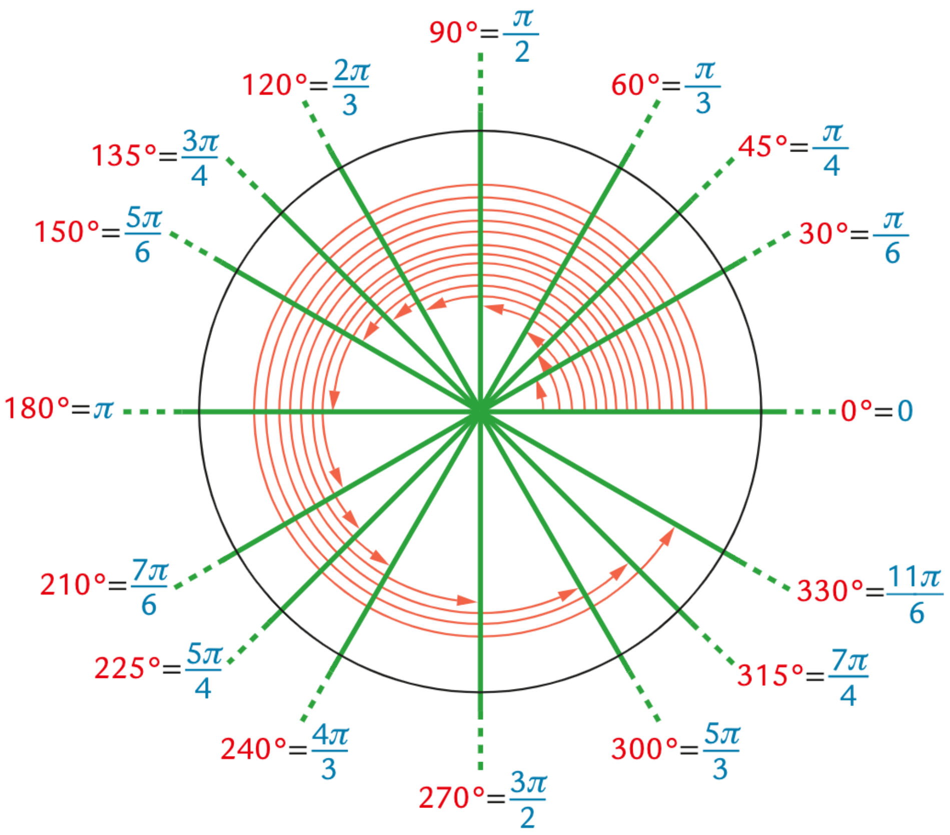
5) Esprimere in gradi sessagesimali l'angolo di $\frac{7}{36}\pi$.

Dalla proporzione:

$$x^{\circ} : \frac{7}{36}\pi = 360° : 2\pi$$

segue che:

$$x^{\circ} = \frac{360 \cdot \frac{7}{36}\pi}{2\pi} = 35^{\circ}$$



Misure di angoli notevoli.

Nella figura sono visualizzate le misure, in gradi e radianti, degli angoli più comuni

Mathematica ML

Esercizi

$\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$

$$\alpha_{rad} = \frac{\alpha^{\circ} \cdot 2\pi}{360^{\circ}}$$

Converti:

Da Gradi → a Radianti

26 $30°;\ 45°;\ 60°$ $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}\right]$

27 $15°;\ 135°;\ 300°$ $\left[\frac{\pi}{12};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{3}\right]$

28 $75°;\ 150°;\ 225°$ $\left[\frac{5\pi}{12};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{5\pi}{4}\right]$

29 $20°;\ 50°;\ 200°$ $\left[\frac{\pi}{9};\ \frac{5\pi}{18};\ \frac{10\pi}{9}\right]$

30 $210°;\ 220°;\ 315°$ $\left[\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{9};\ \frac{7\pi}{4}\right]$

31 $10°;\ 100°;\ 270°$ $\left[\frac{\pi}{18};\ \frac{5\pi}{9};\ \frac{3\pi}{2}\right]$

32 $180°;\ 330°;\ 105°$ $\left[\pi;\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{7\pi}{12}\right]$

33 $18°;\ 40°;\ 405°$ $\left[\frac{\pi}{10};\ \frac{2\pi}{9};\ \frac{9\pi}{4}\right]$

Mathematica ML

Esercizi

$\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$

$$\alpha° = \frac{\alpha_{rad} \cdot 360}{2\pi}$$

Converti:

Da Radianti → . a Gradi

36 $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$ [30°; 60°; 45°]

37 $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{3}$ [630°; 225°; 660°]

38 $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{11\pi}{6}$ [150°; 22° 30′; 330°]

39 $\frac{2\pi}{3}$; 4π; $\frac{\pi}{9}$ [120°; 720°; 20°]

40 6π; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{12}$ [1080°; 135°; 15°]

41 $\frac{11\pi}{12}$; $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$ [165°; 600°; 210°]

42 $\frac{13\pi}{8}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{9}$ [292° 30′; 405°; 40°]

43 $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{6\pi}{5}$; $\frac{3\pi}{10}$ [420°; 216°; 54°]

GONIOMETRICA E TRIGONOMETRIA

La **Goniometria** studia gli angoli in relazione agli archi associati ad essi, le funzioni angolari e le proprietà algebriche che le caratterizzano;

La **Trigonometria** ha per oggetto le relazioni che intercorrono tra gli angoli e i lati di un triangolo qualsiasi.

Mathematica ML

CHE COS'è LA TRIGONOMETRIA

TRIGONO + METRIA

TRIGONO → TRIGON → TRIANGOLO

METRIA → METRON → MISURA

PARTE DELLA MATEMATICA CHE STUDIA I TRIANGOLI A PARTIRE DAI LORO ANGOLI

LO SCOPO è CALCOLARE LE MISURE CHE CARATTERIZZANO GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO (LATI, ANGOLI, MEDIANE, ECC)

REALIZZARE UNA ASTRONOMIA PER:

- PREVEDERE MOTI E POSIZIONI DI CORPI CELESTI.
- DETERMINARE L'ORA
- COMPILARE I CALENDARI
- ESSERE DI AIUTO ALLA NAVIGAZIONE
- LO STUDIO DELLA GEOGRAFIA
- LA COSTRUZIONE DI IMPONENTI STRUTTURE

Mathematica

IN EGITTO

IMPORTANTE PER

- PREVEDERE FENOMENI CELESTI PER LA PIENA DEL NILO
- PER LA COSTRUZION E DELLE PIRAMIDI.
  - NELLA COSTRUZIONE DELLE PIRAMIDI ERA IMPORTANTE DARE UNA INCLINAZIONE UNIFORME ALLE FACCE.

PAPIRO DI RHIND DEL 1650 A.C

- PRIMI RUDIMENTI DI TRIGONOMETRIA
- PRIMA TEORIA SUI TRIANGOLI SIMILI.

Mathematica ML

BABILONESI

A LORO SI DEVE IL SISTEMA SESSAGESIMALE COME COMBINAZIONE DEL SISTEMA NATURALE

A BASE 10 E DEL SISTEMA A BASE SEI

Si tratta invece della straordinaria prova che i Babilonesi già conoscessero la ***Trigonometria*** e quindi almeno alcuni casi particolari del celebre teorema di pitagora

Tavoletta Plimpton 322 del 1900-1600 A.C.

Gli Egiziani, per verificare la perpendicolarità delle loro costruzioni, usavano l'espediente di tendere una corda con i nodi posti alla distanza di semplici intervalli regolari (**3**, **4** e **5**),
cioè la più piccola ***terna pitagorica primitiva***,

GRECIA

IPPARCO:

- PADRE DELLA TRIGONOMETRIA
- DIVISE LA CIRCONFERENZA IN 360°
- IL DIAMETRO IN 120 PARTI E CIASCUNA PARTE IN 60 PARTI

MENELAO:

- INTRIODUCE LA TRIGONOMETRIA SFERICA

TOLOMEO (EGIZIANO):

- CON L'INTRODUZIONE DELLA TRIGONOMETRIA SFERICA CONTINUA IL LAVORO INIZIATO DA IPPARCO

Mathematica

INDIA

- CREAZIONE DI TAVOLE CON I VALORI DA ZERO A 90°

- ARYABHATA DEFINÌ PER LA PRIMA VOLTA IL SENO COME RELAZIONE FRA LA METÀ DI UN ANGOLO E LA METÀ DELLA CORDA.

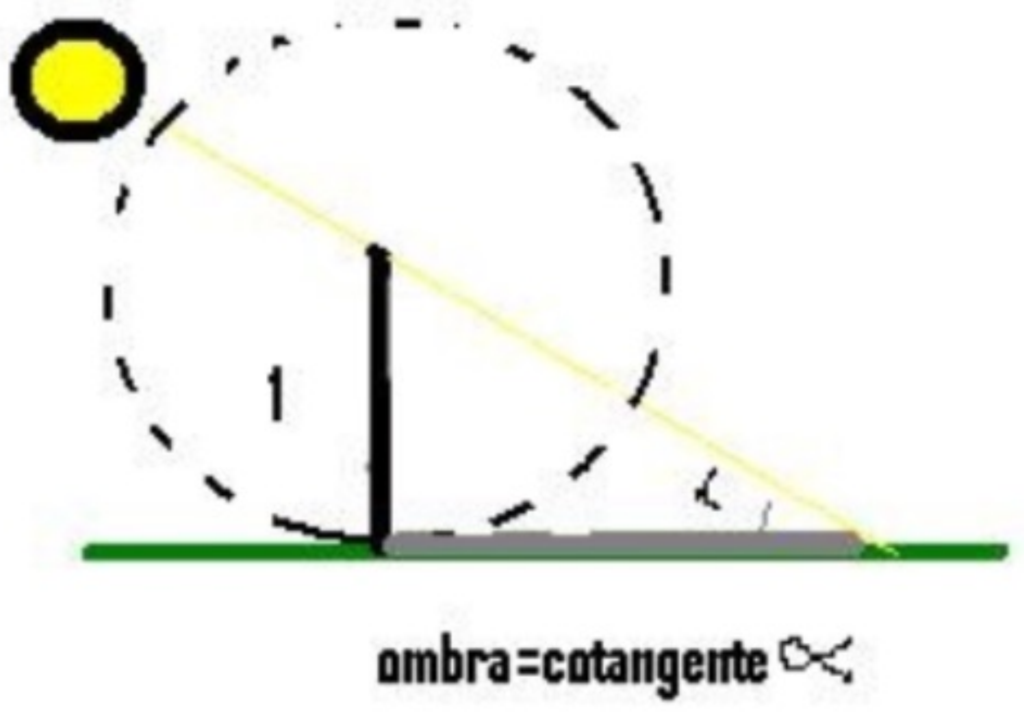
- DEFINI' IL COSENO COME L'INVERSO DEL SENO O SENO CAPOVOLTO

ARABI-PERSIANI

- STUDIANO LA TRIGONOMETRIA PER MOTIVI ASTRONOMICI E RELIGIOSI
- STUDIANO LE FUNZIONI CIRCOLARI
- LA TRIGONOMETRIA ARABO PERSIANA RISENTE DELLA TRIGONOMETRIA GRECA E DI QUELLA INDIANA

- TANGENTE E COTANGENTE SONO LEGATE ALLA

  GNOMONICA (scienza degli orologi solari) MERIDIANA



LA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

La circonferenza goniometrica è una circonferenza che viene rappresentata in un piano cartesiano con il centro nell'origine degli assi e il raggio di lunghezza uguale a 1

$$x^2 + y^2 = 1$$

Il punto A (1, 0) si dice origine degli archi

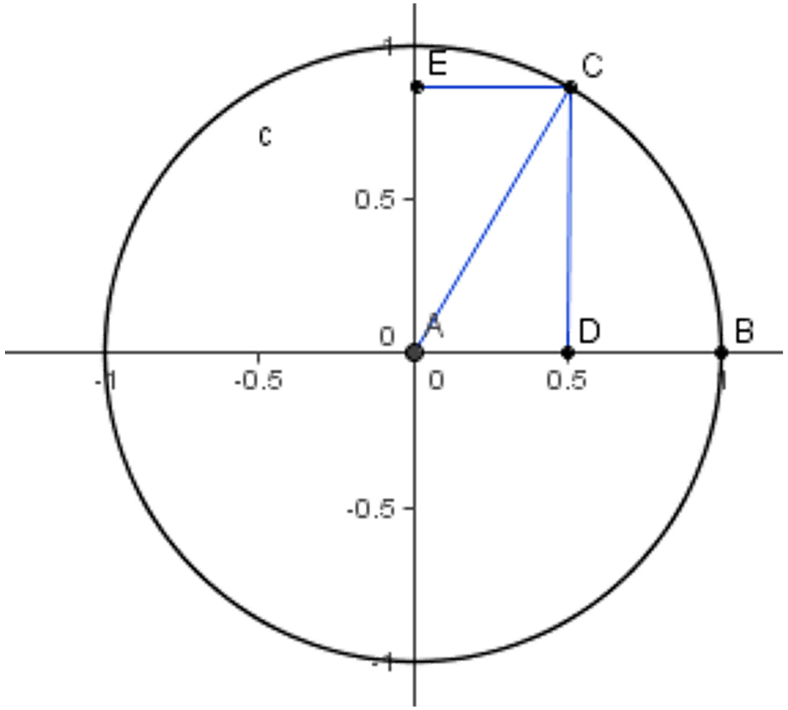
Mathematica

DEFINIZIONE

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α.

Definiamo seno

dell'angolo α le funzioni che ad α associano il valore dell'ordinata del punto di intersezione tra il raggio vettore e la circonferenza stessa



Definiamo coseno

dell'angolo α le funzioni che ad α associano il valore dell'ascissa del punto di intersezione tra il raggio vettore e la circonferenza stessa

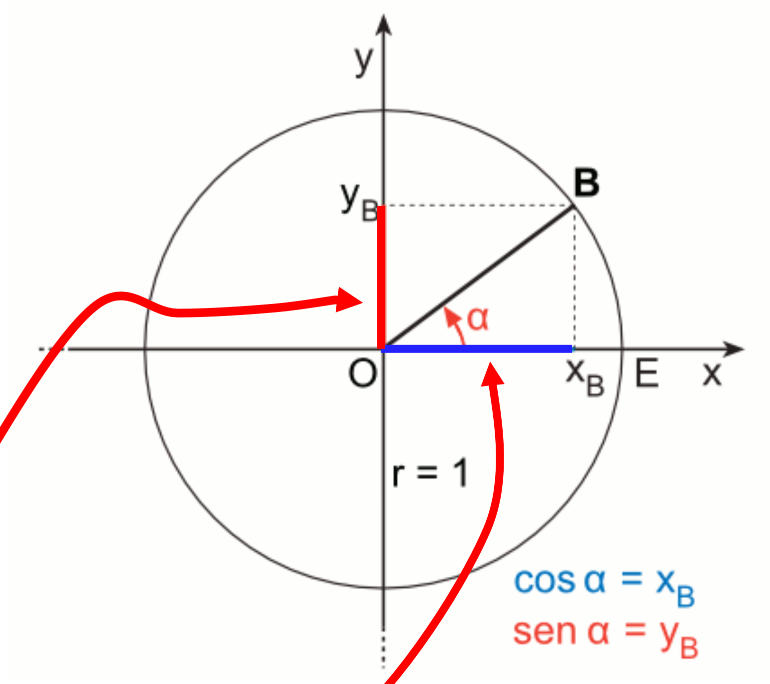
DEFINIZIONE. Seno – coseno

Seno di $\alpha = y_B$

Coseno di $\alpha = x_B$

Dato un angolo $\boldsymbol{\alpha}$ e sia **B** il punto di intersezione del raggio con la circonferenza goniometrica

Chiamiamo:

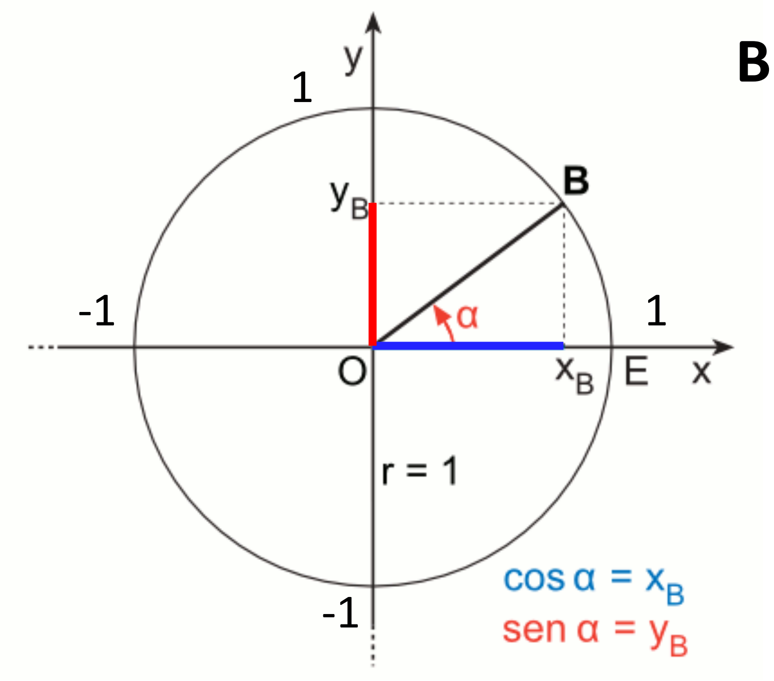


Seno di $\boldsymbol{\alpha}$ l'ordinata di **B**;

Coseno di $\boldsymbol{\alpha}$ l'ascissa di **B**;

Mathematica

IL punto **B** viene detto **punto associato** all'angolo.



B appartiene alla circonferenza goniometrica (di raggio 1)

l'ordinata di **B** (seno di α)
e
l'ascissa di **B** (coseno di α) → variano tra -1 e 1

Dunque per ogni angolo si ha:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

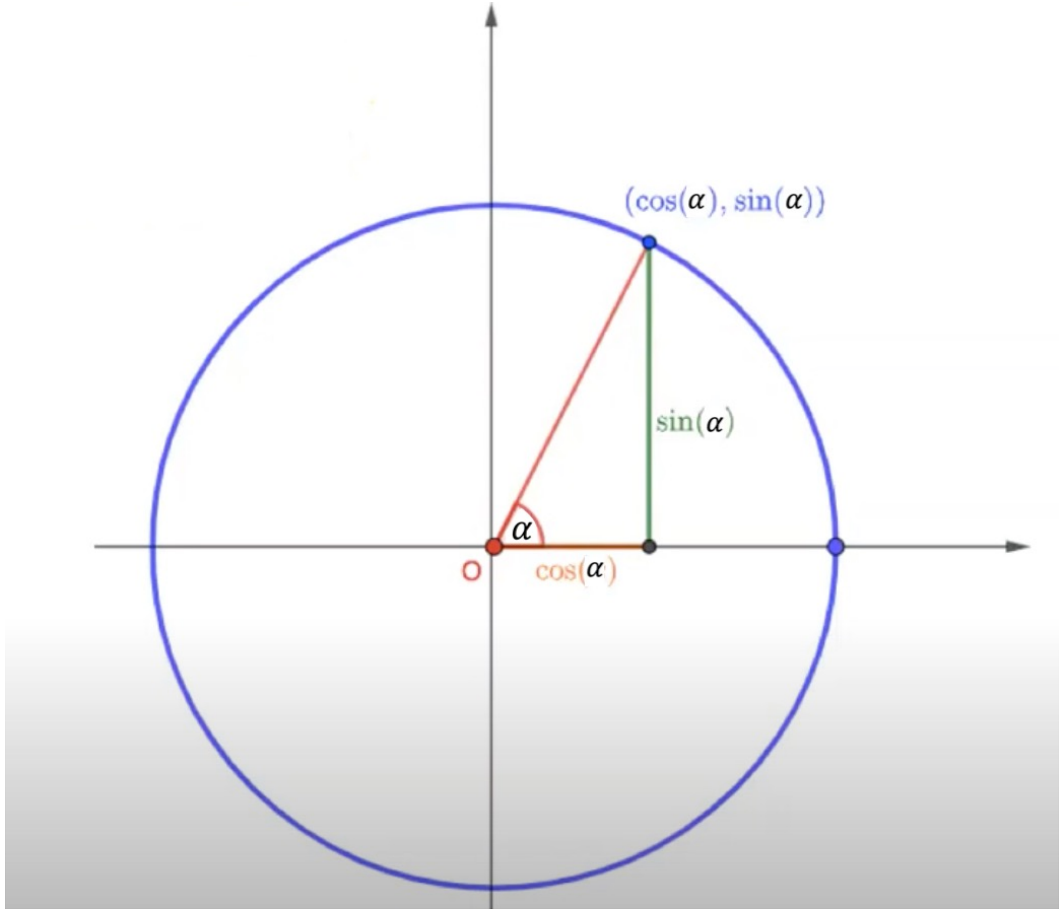
$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

Mathematica ML **DEFINIZIONE** Seno e coseno

$Caso\ 0 \leq x \leq 2\pi$. Sulla circonferenza trigonometrica

Equazione della Circonferenza

$$x^2 + y^2 = 1$$



$$\boldsymbol{Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) = 1}$$

Legge fondamentale della trigonometria

Mathematica

DEFINIZIONE Seno e coseno

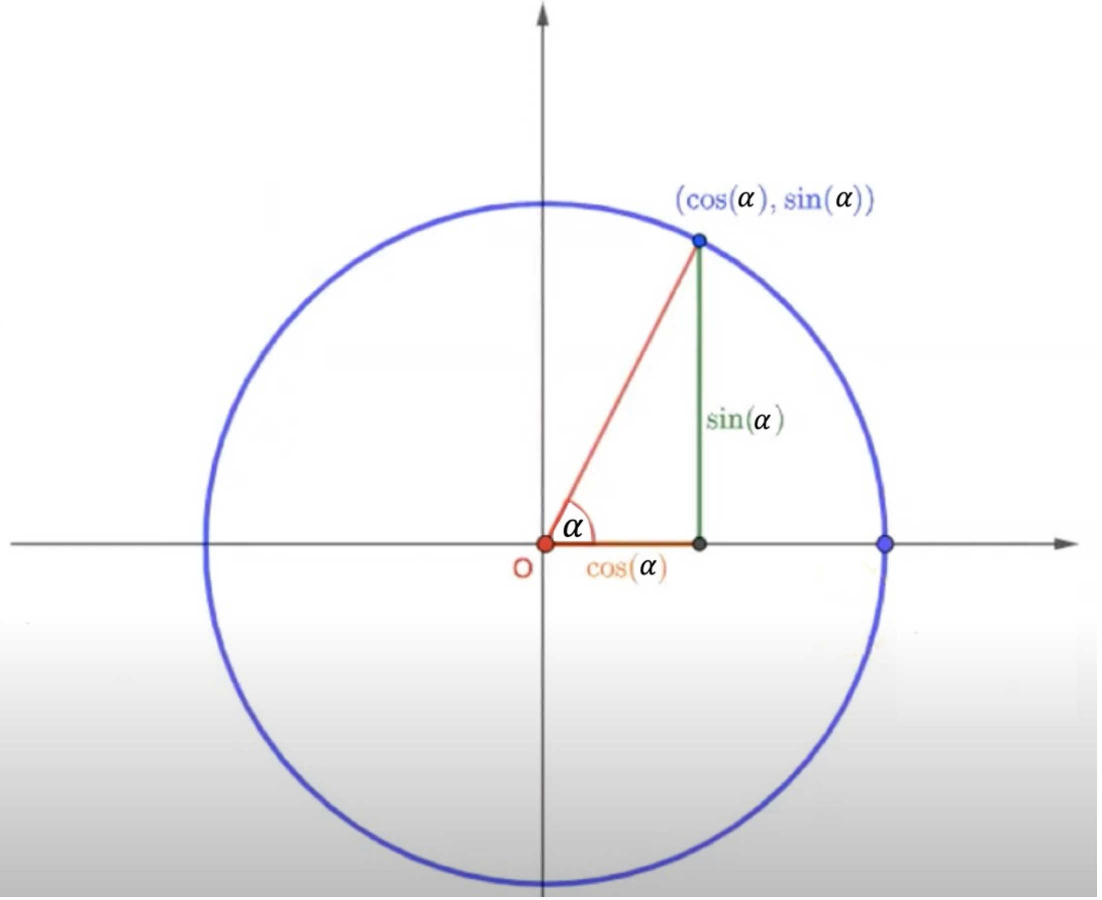
I° quadrante

Caso $0 \leq x \leq 2\pi$. Sulla circonferenza trigonometrica

SE $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

positivo $\cos(\alpha) > 0$

positivo $\sin(\alpha) > 0$



DEFINIZIONE Seno e coseno

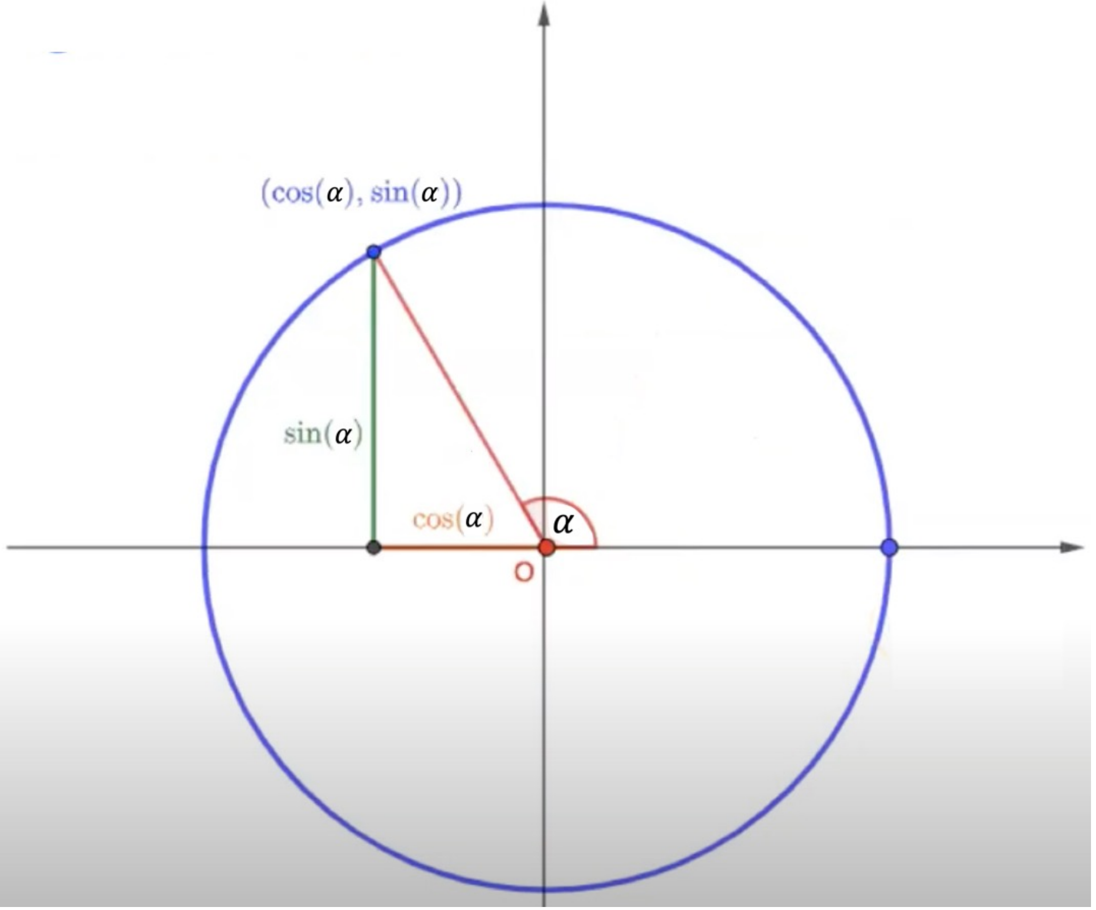
II° quadrante

$Caso\ 0 \leq x \leq 2\pi.$ **Sulla circonferenza trigonometrica**

SE $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

negativo $\cos(\alpha) < 0$

positivo $\sin(\alpha) > 0$



DEFINIZIONE Seno e coseno

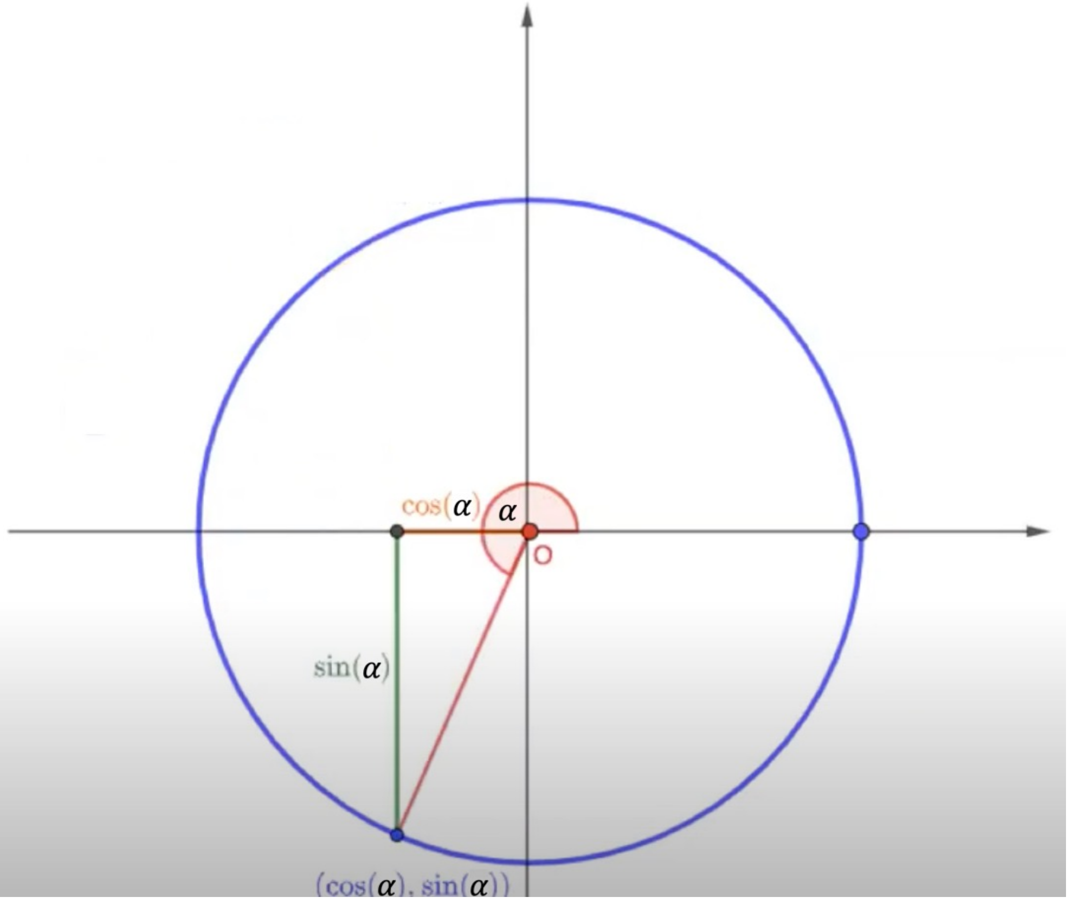
III° quadrante

Caso $0 \leq x \leq 2\pi$. **Sulla circonferenza trigonometrica**

SE $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$

negativo $\cos(\alpha) < 0$

negativo $\sin(\alpha) < 0$



DEFINIZIONE Seno e coseno

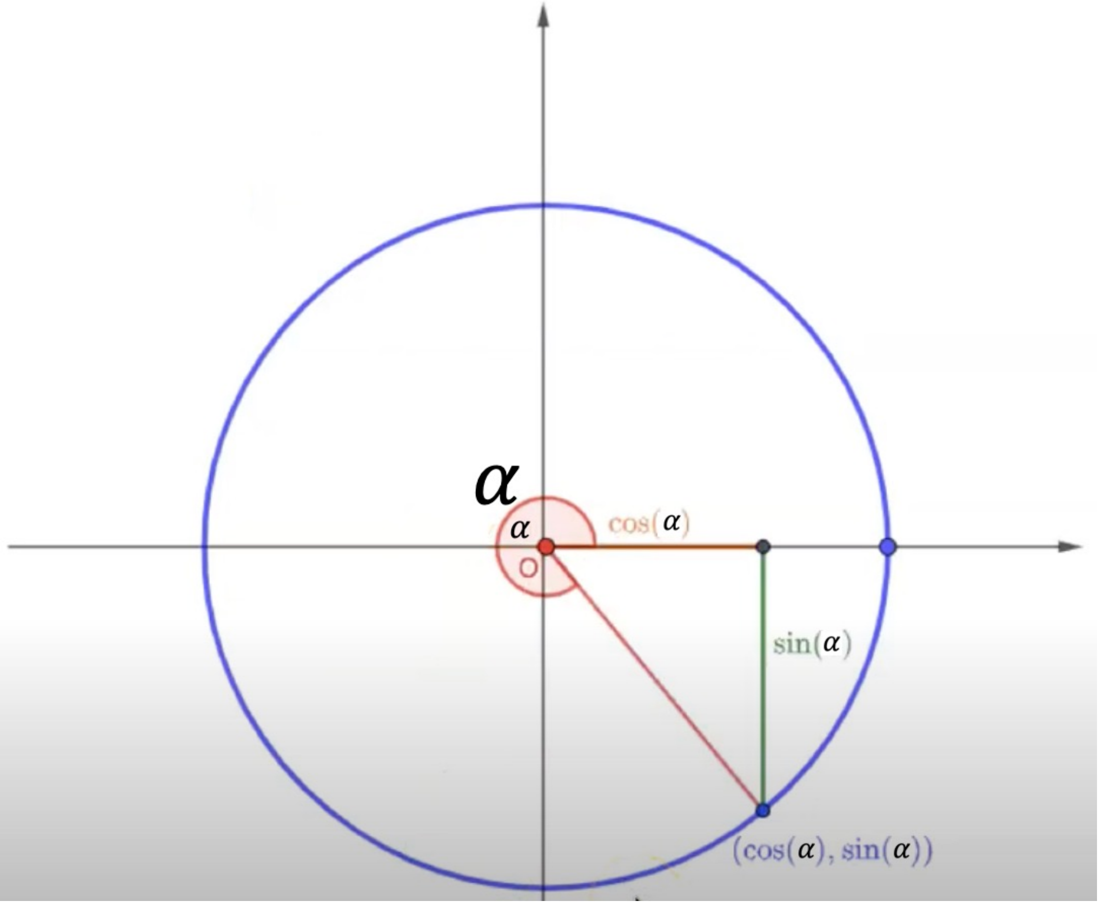
IV° quadrante

$Caso\ 0 \leq x \leq 2\pi.$ Sulla circonferenza trigonometrica

SE $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

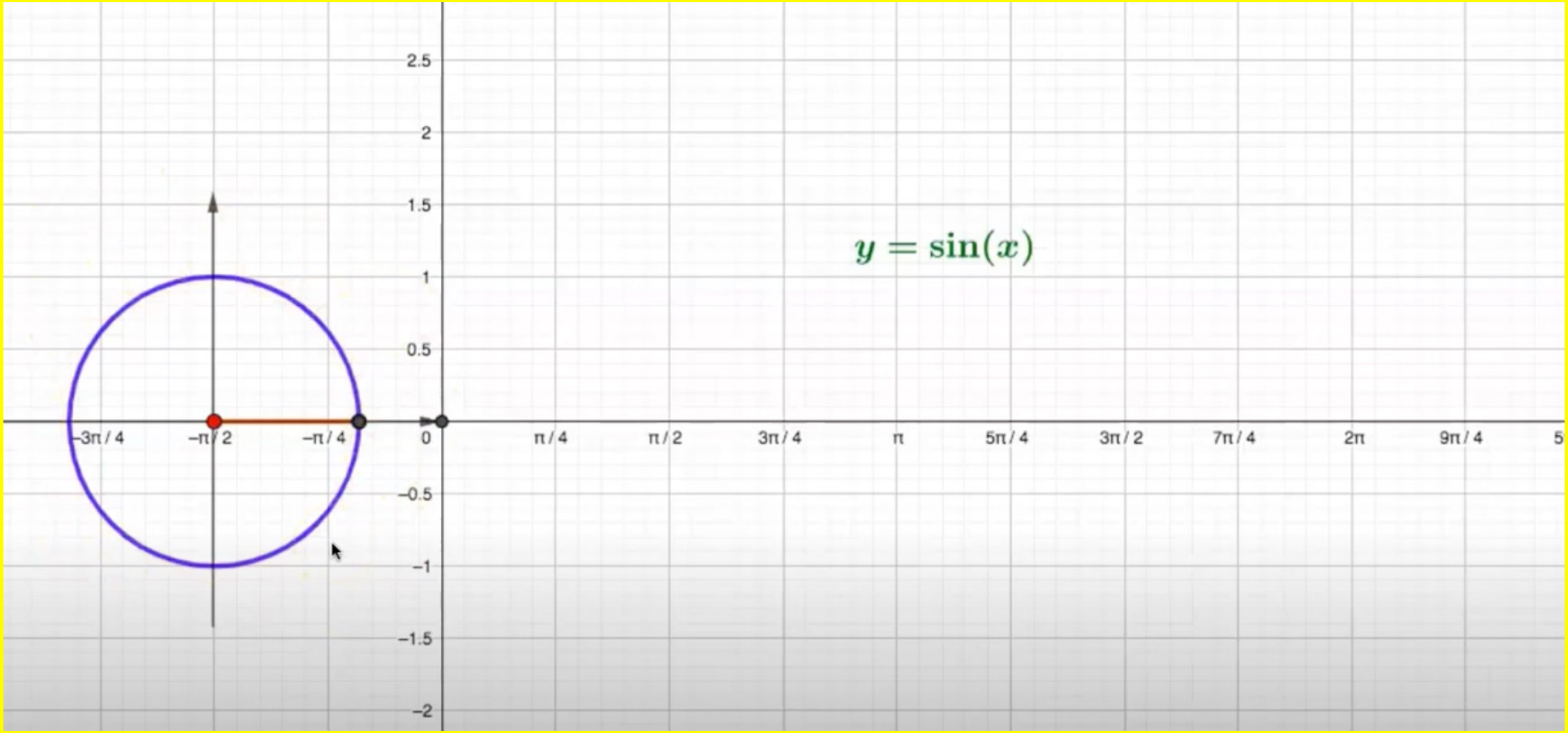
positivo + $\cos(\alpha) > 0$

negativo - $\sin(\alpha) < 0$

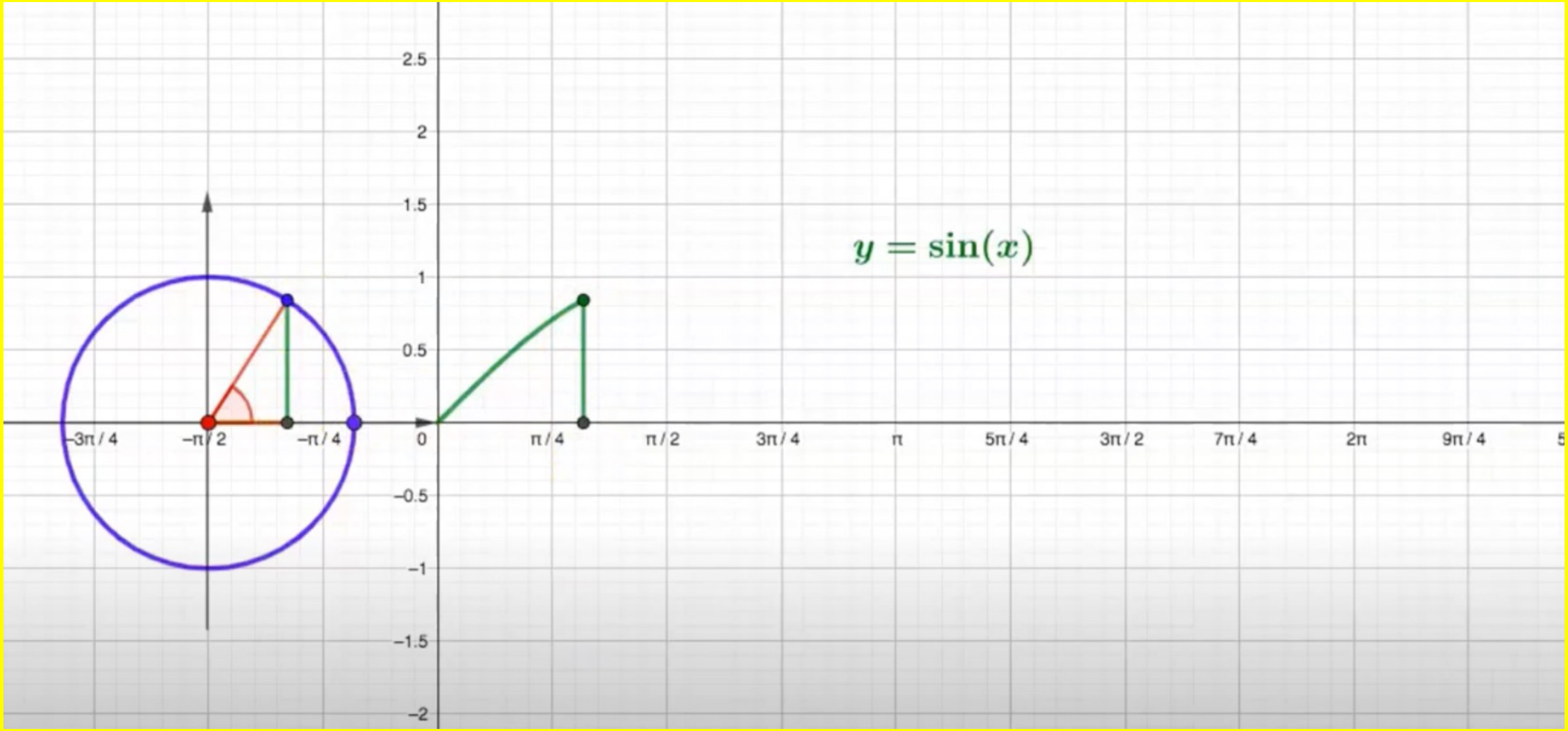


Andamento grafico del Seno

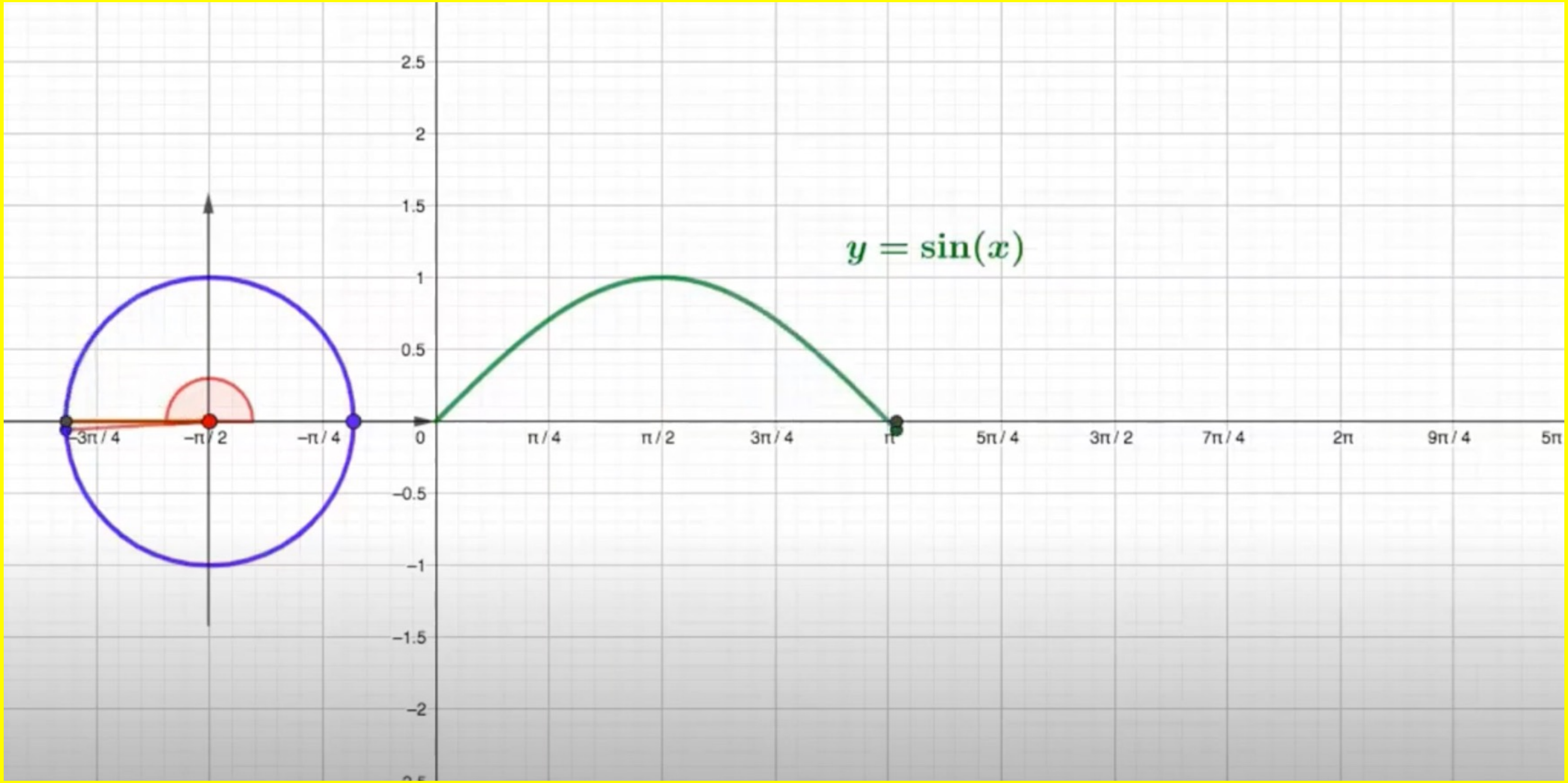
Andamento della funzione Seno



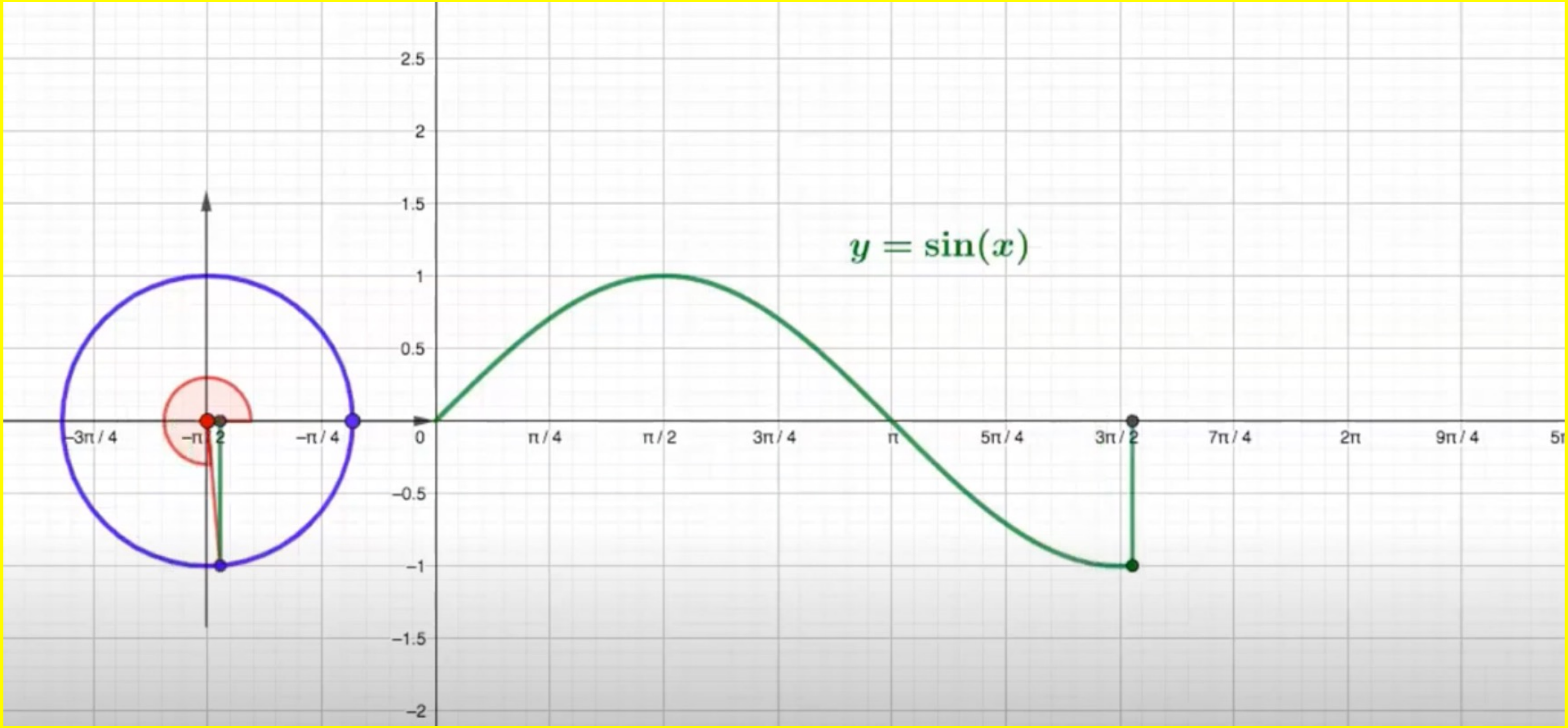
Andamento della funzione Seno



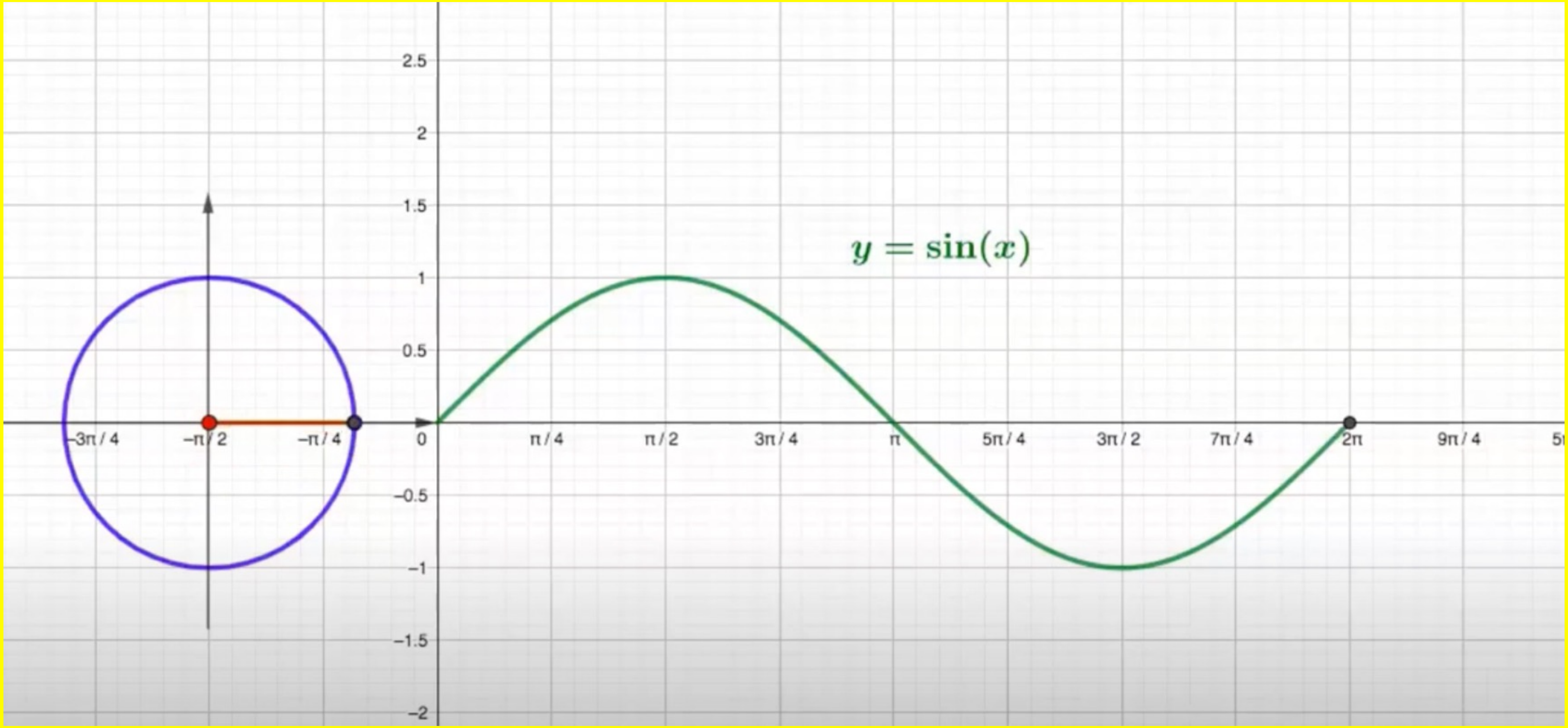
Andamento della funzione Seno



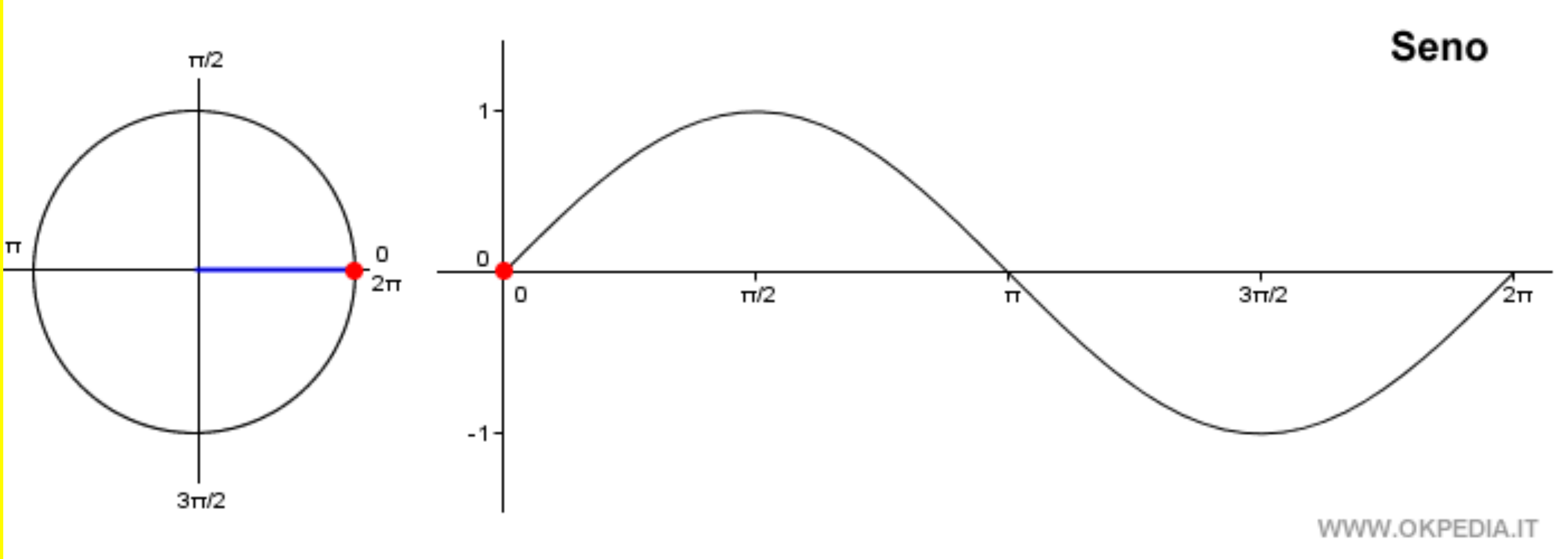
Andamento della funzione Seno



Andamento della funzione Seno



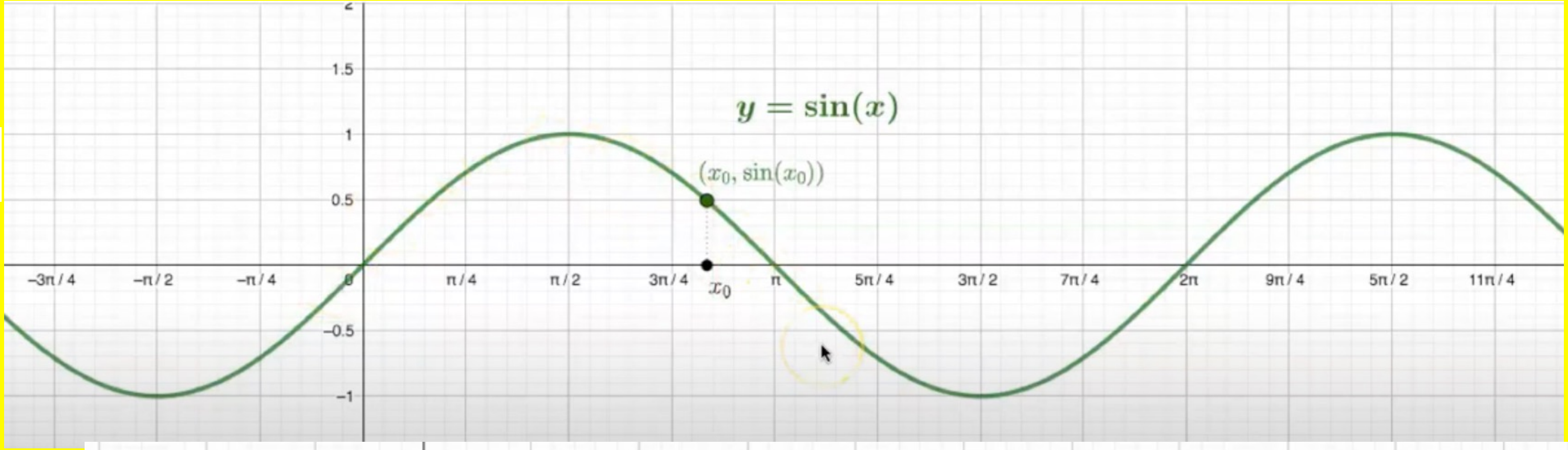
Andamento della funzione Seno



Proprietà della funzione Seno

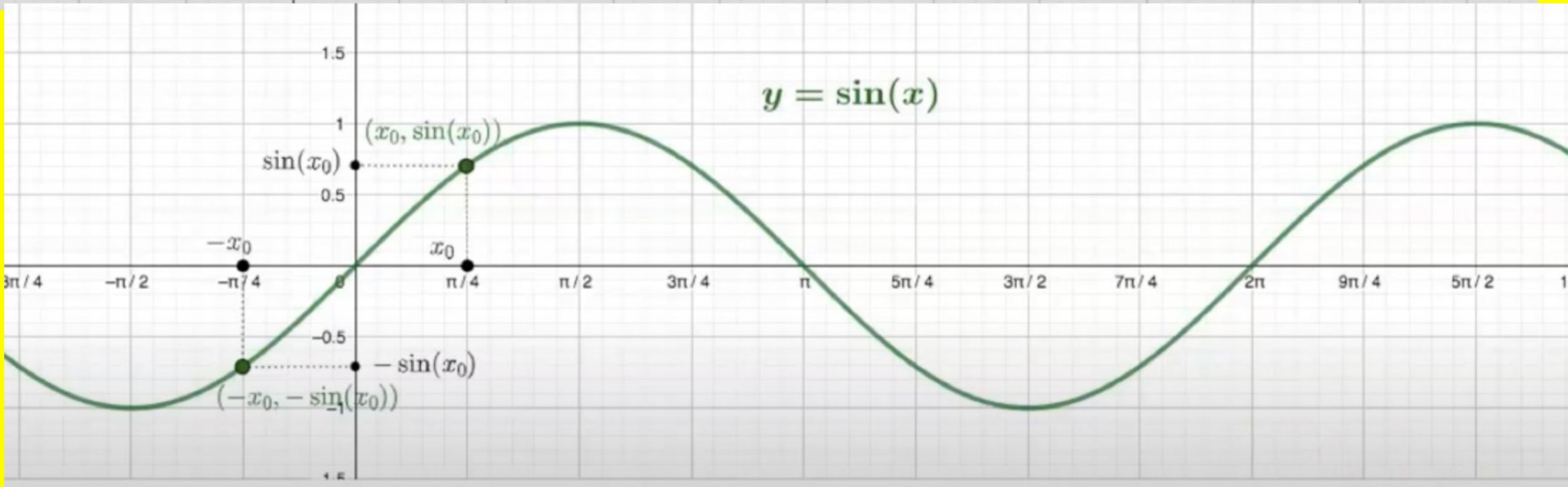
1) La funzione è continua

CONTINUA



2) La funzioni è Dispari, ossia simmetrica rispetto all'Origine

DISPARI

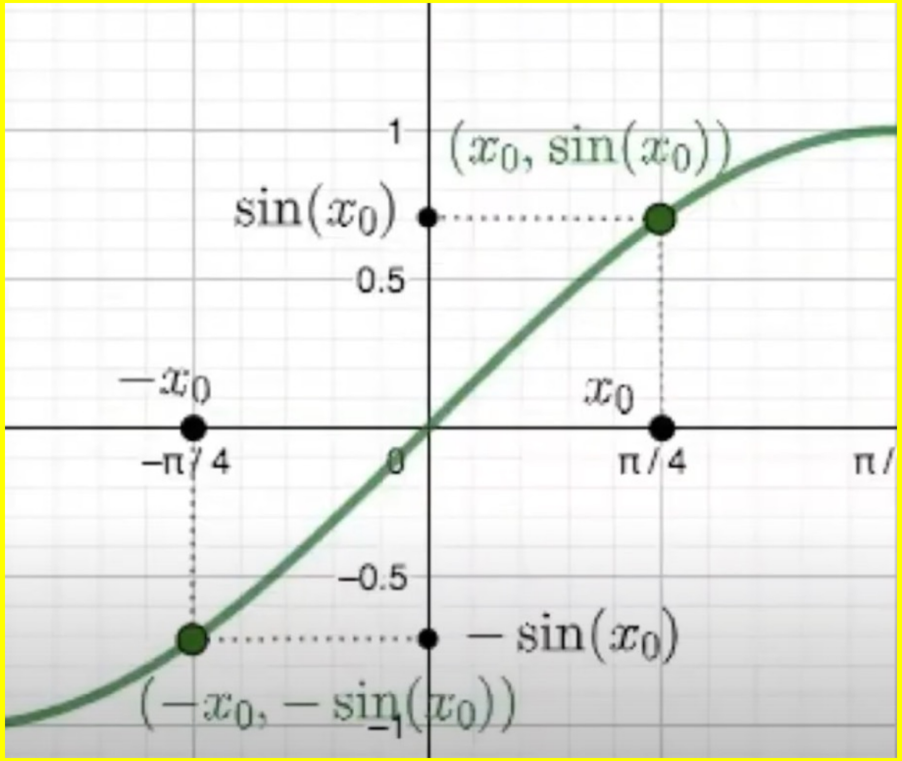


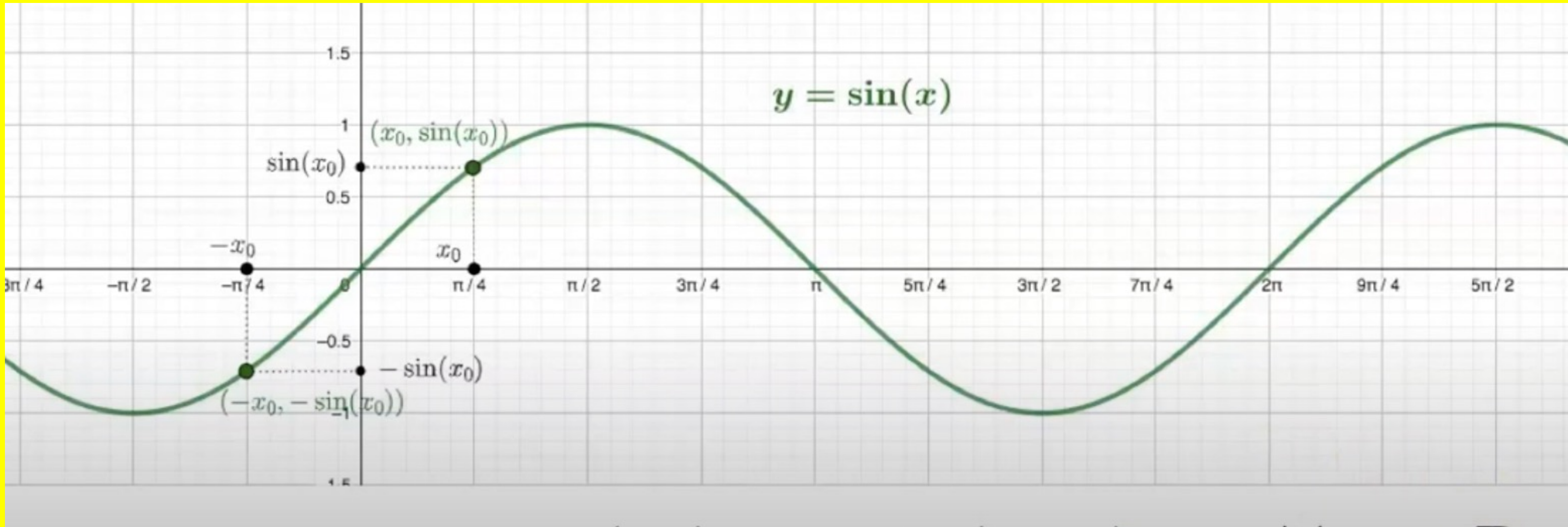
$$\sin(x_0) = -\sin(-x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Proprietà della funzione Seno

Simmetrica rispetto all'Origine

DISPARI



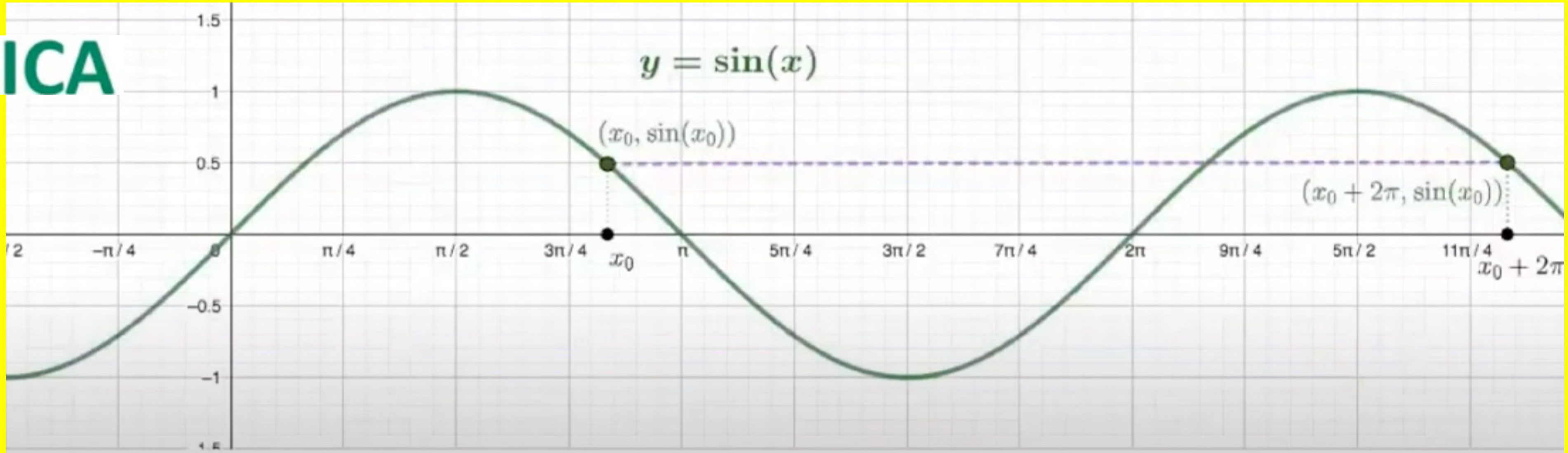


$$\sin(x_0) = -\sin(-x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Priprietà della funzione Seno

3) La funzione è periodica

PERIODICA



$$\sin(x_0) = \sin(x_0 + 2\pi) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

4) Limitata

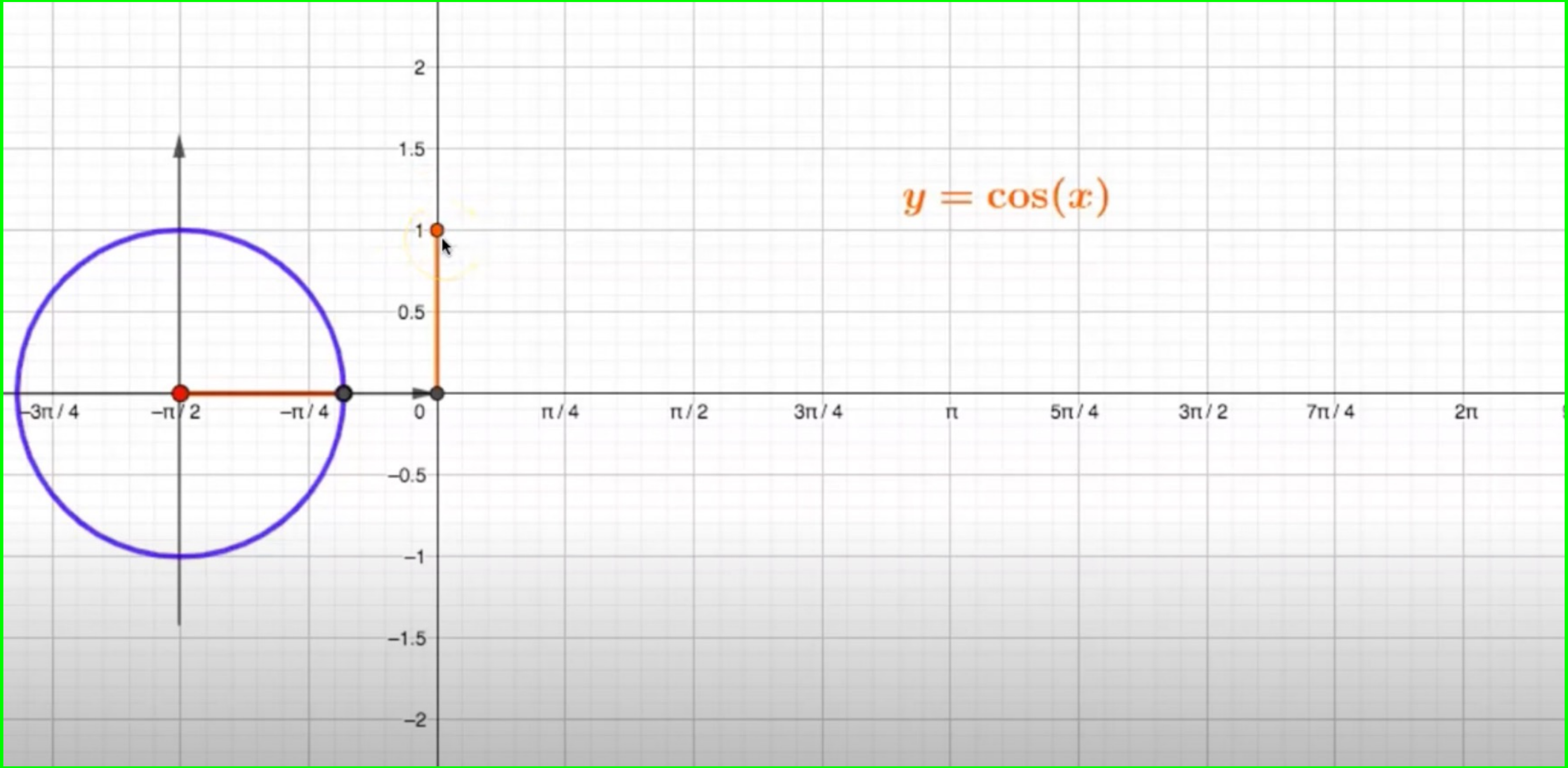
LIMITATA

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

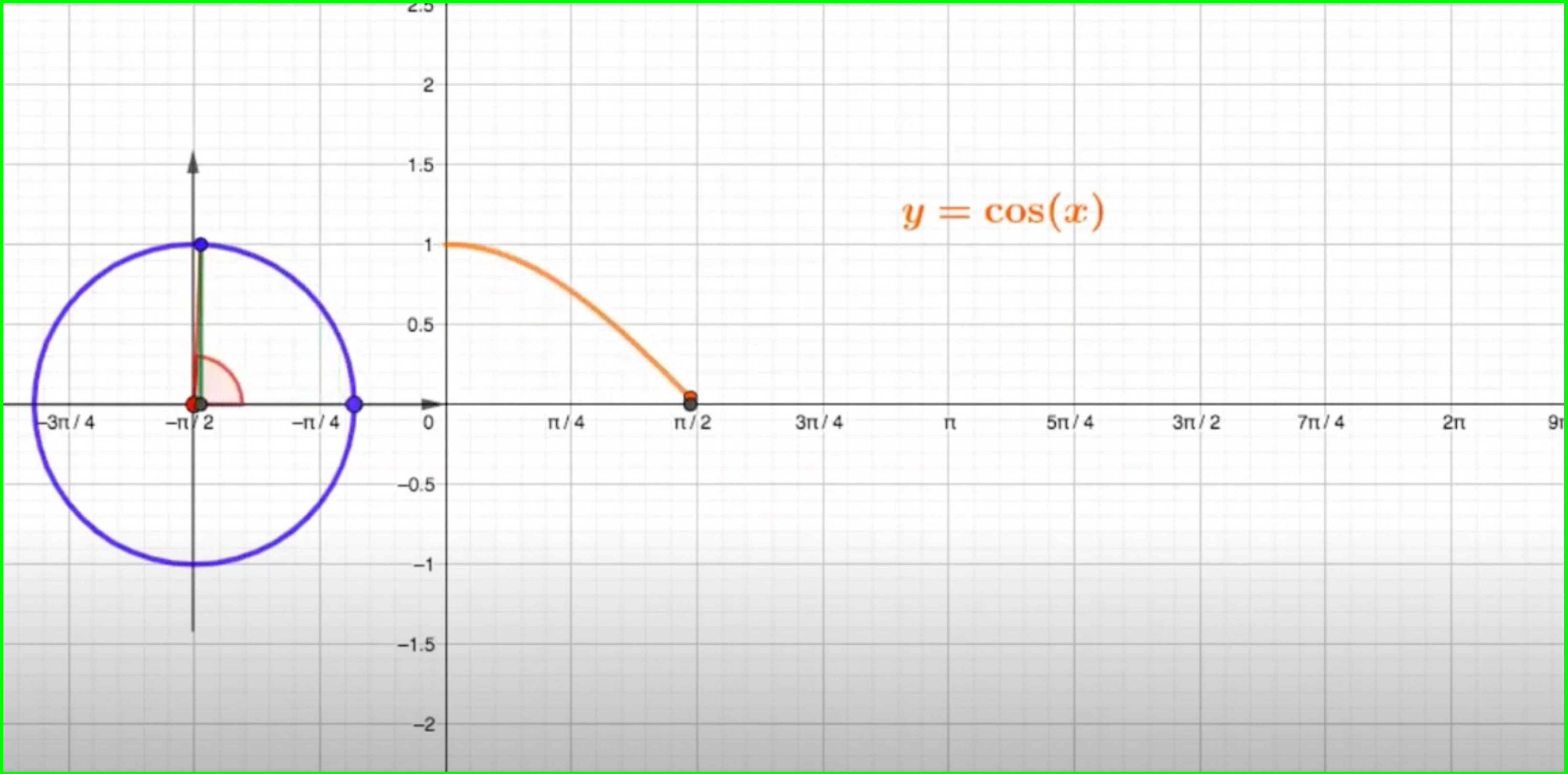
Il grafico è compreso e non esce mai da questi due valori

Andamento grafico del Coseno

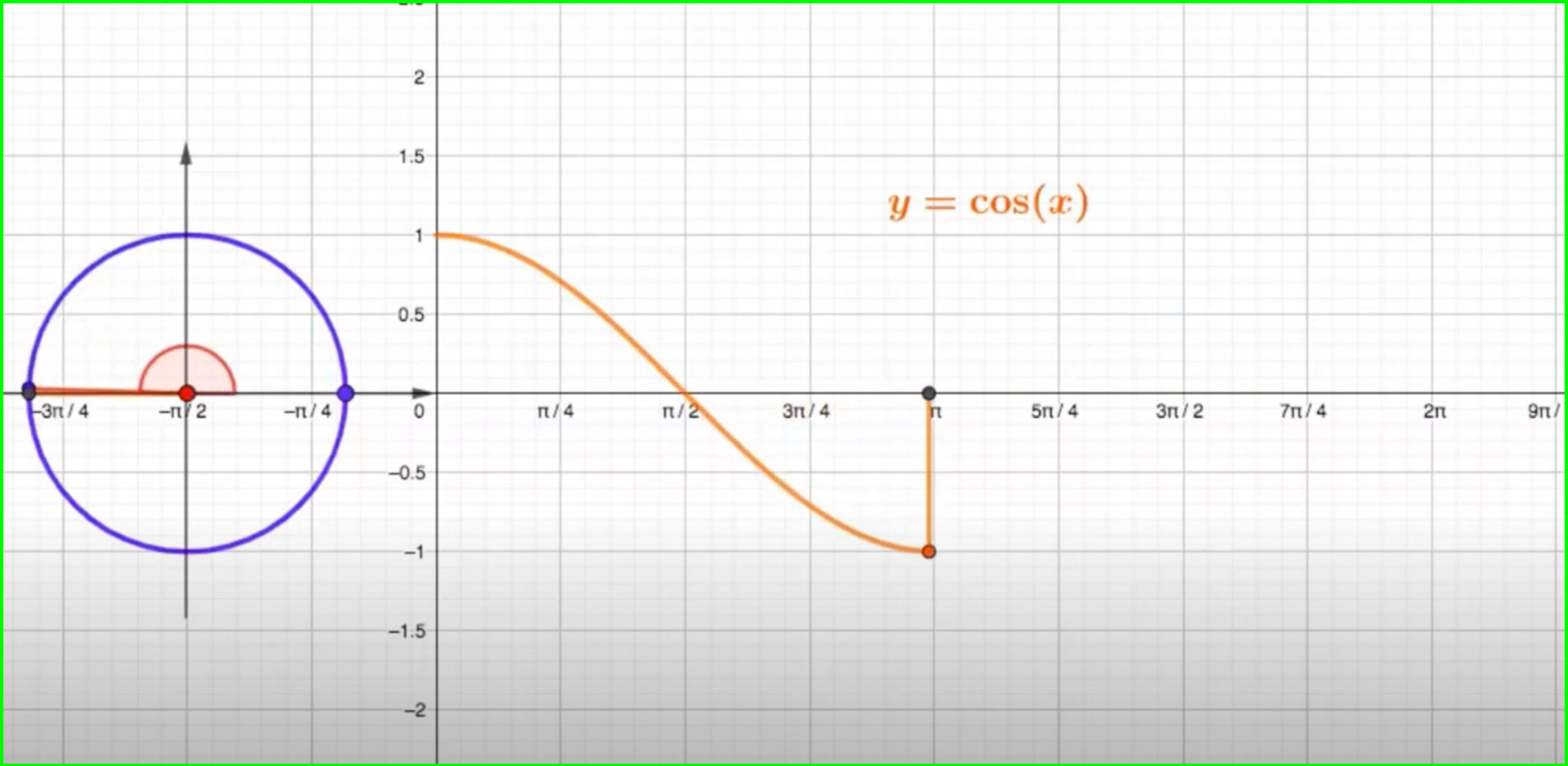
Andamento della funzione Coseno



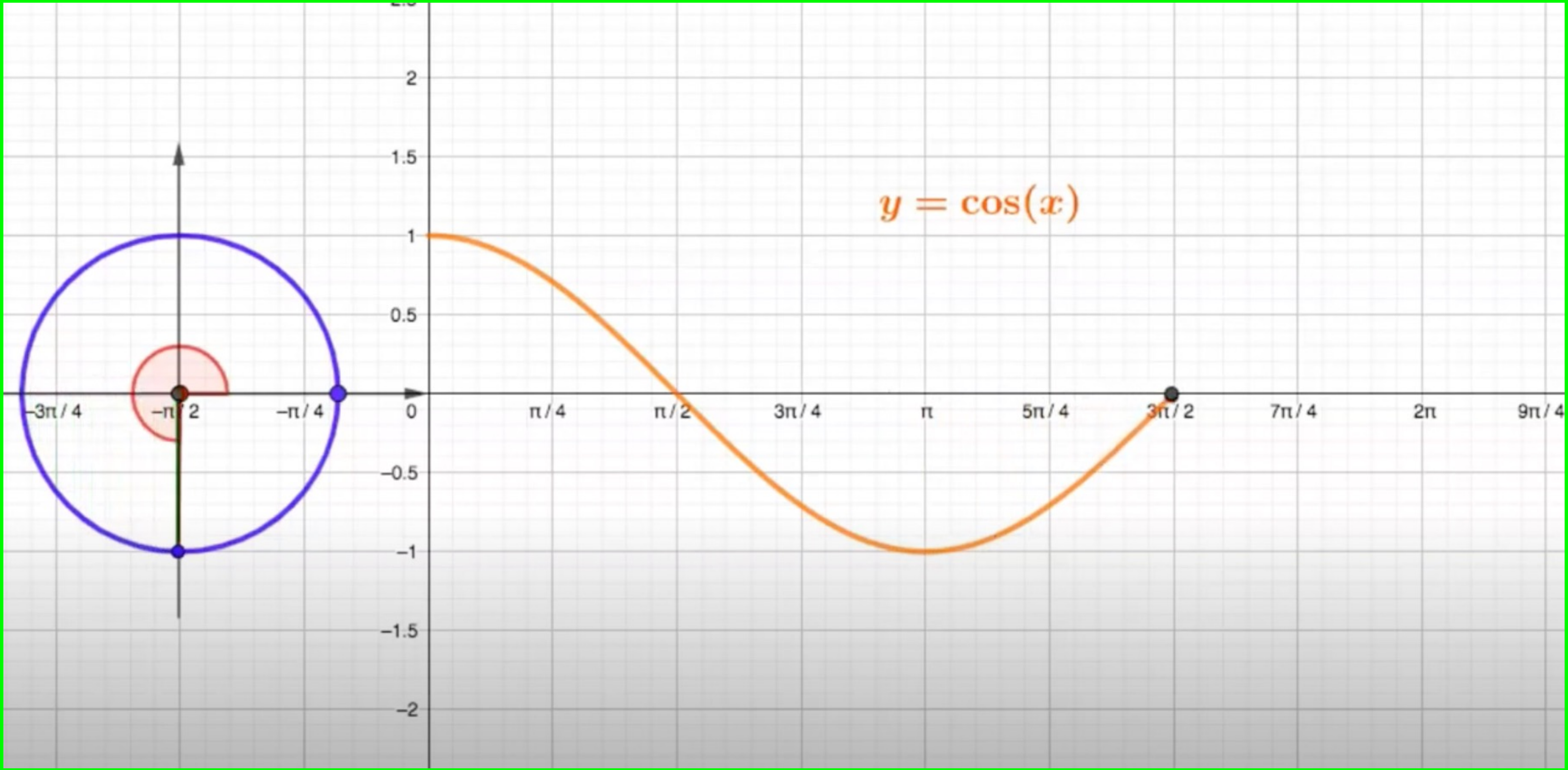
Andamento della funzione Coseno



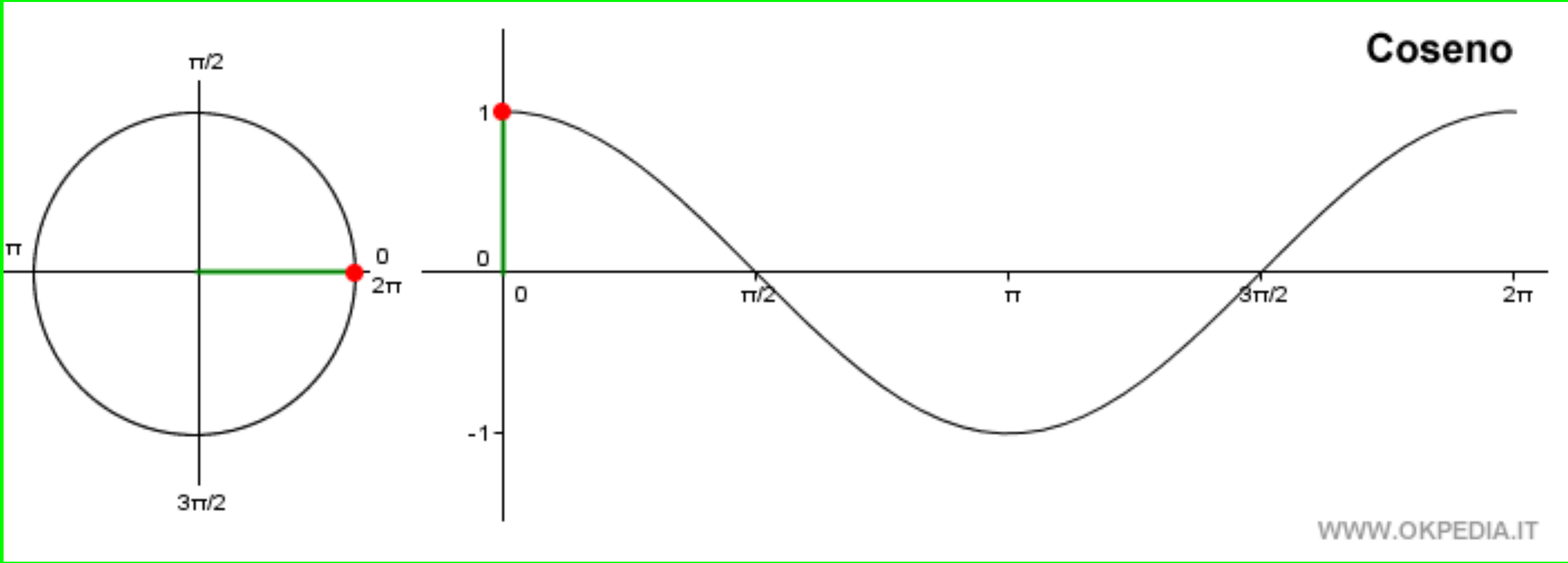
Andamento della funzione Coseno



Andamento della funzione Coseno



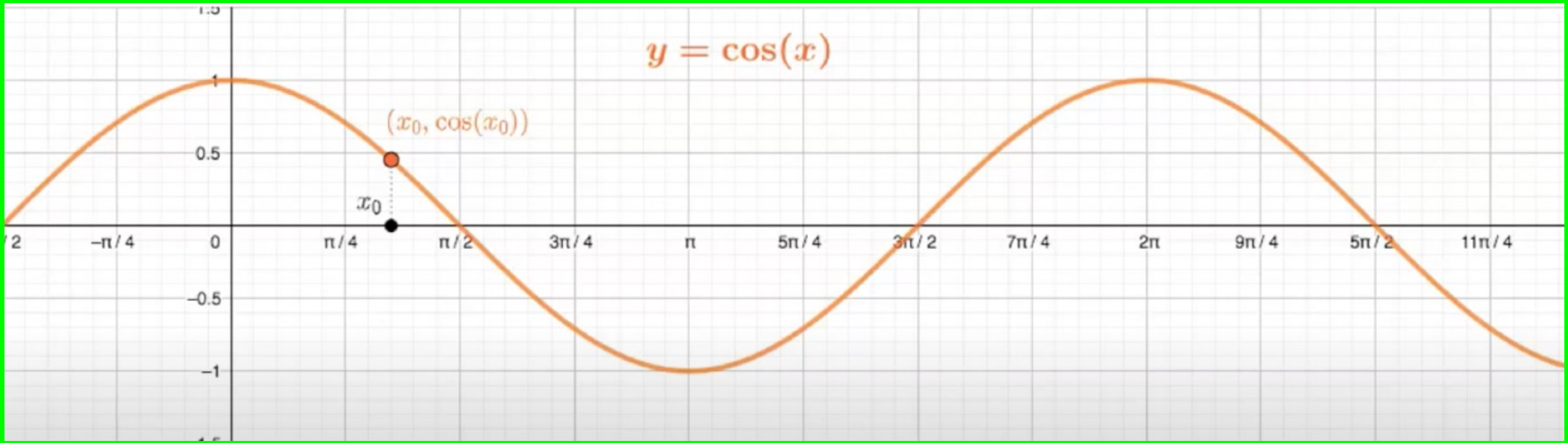
Andamento della funzione Coseno



Proprietà della funzione Coseno

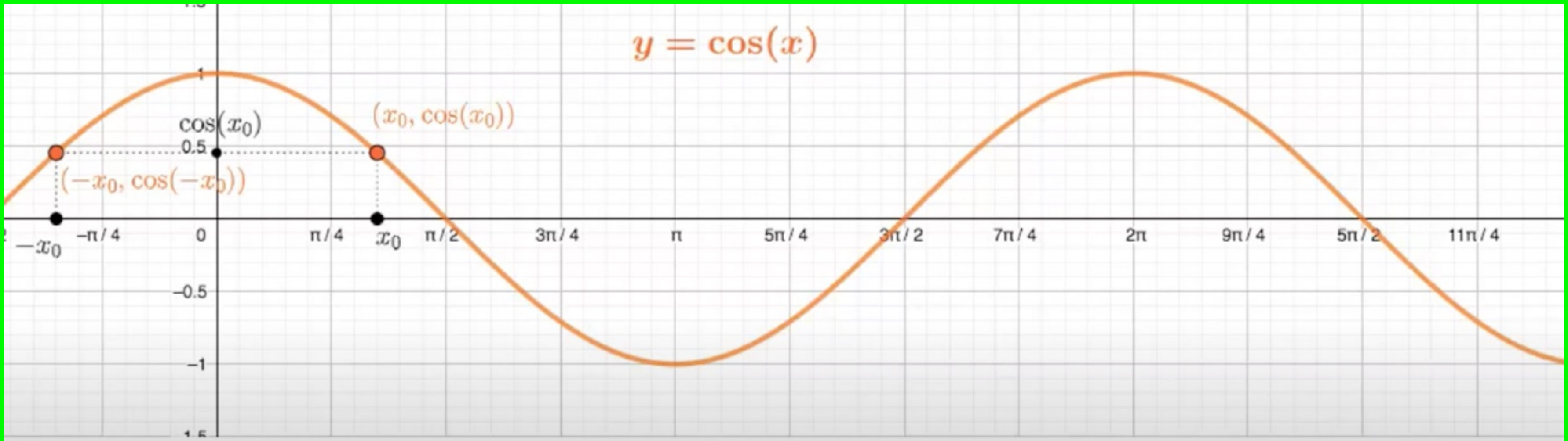
1) La funzione è continua

CONTINUA



2) La funzioni è pari, ossia simmetrica rispetto all'asse delle y

PARI

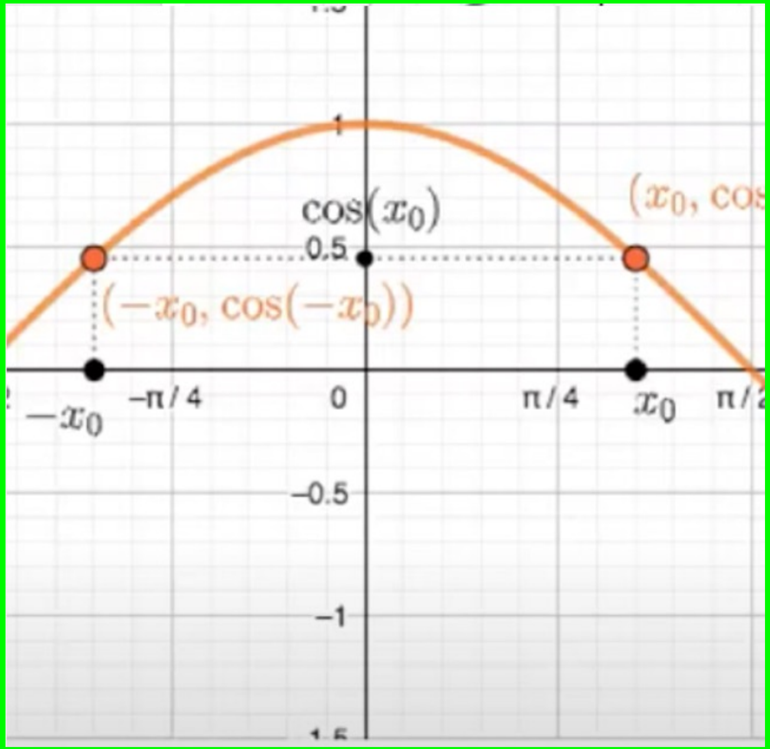


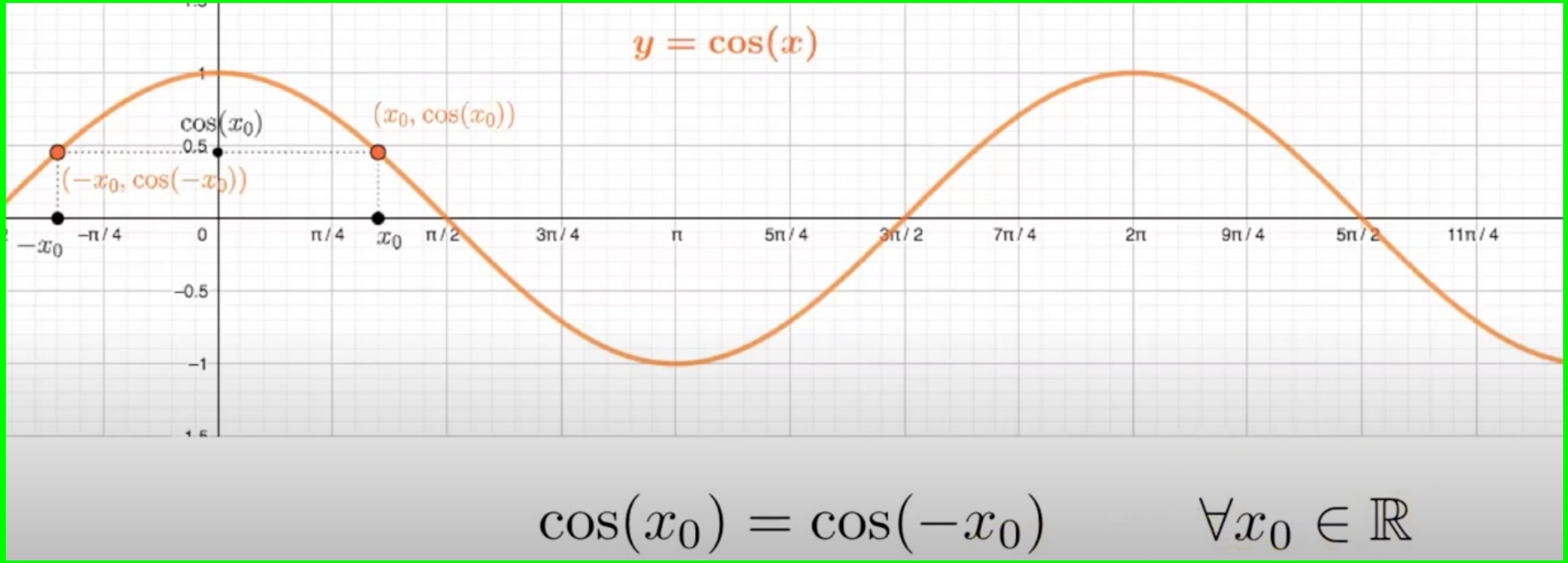
$$\cos(x_0) = \cos(-x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Proprietà della funzione Seno

Simmetrica rispetto all'asse y

PARI

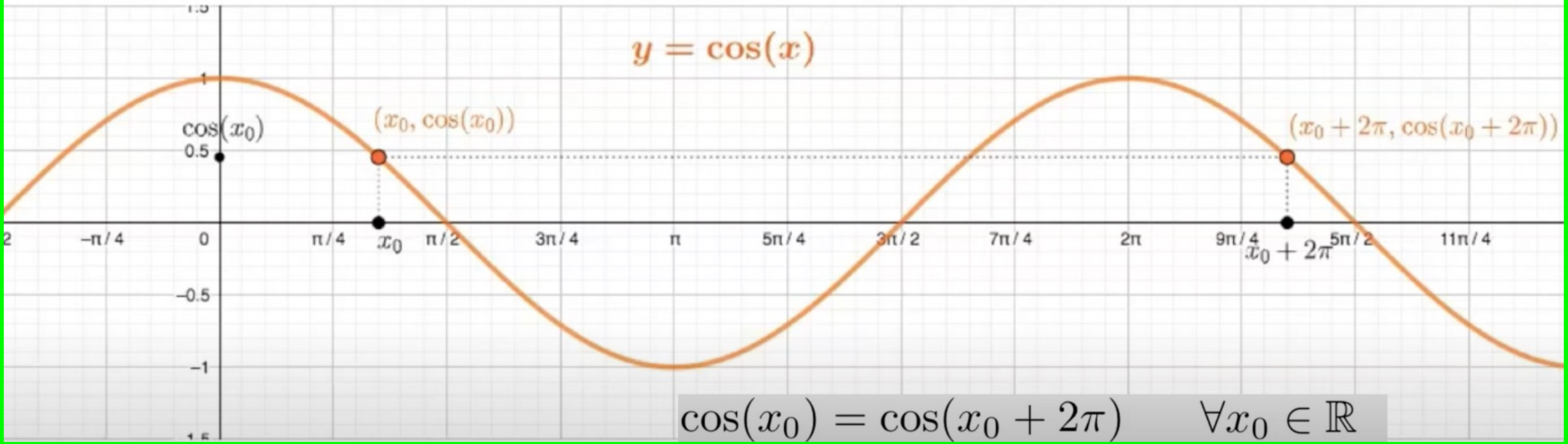




Proprietà della funzione Coseno

3) La funzione è periodica

PERIODICA



4) Limitata

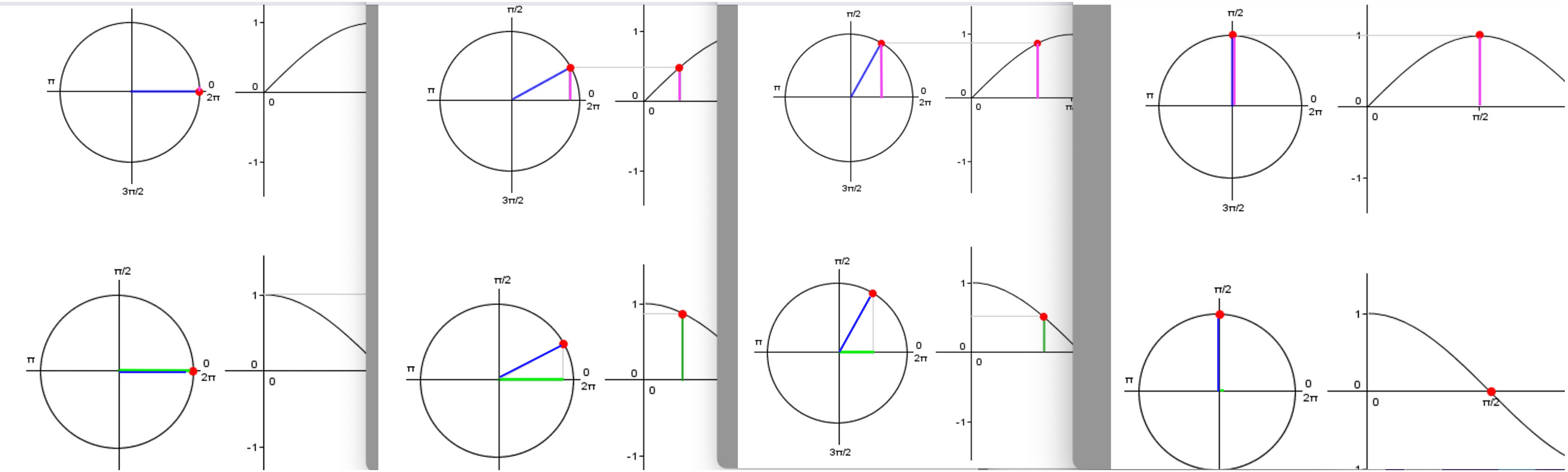
LIMITATA

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

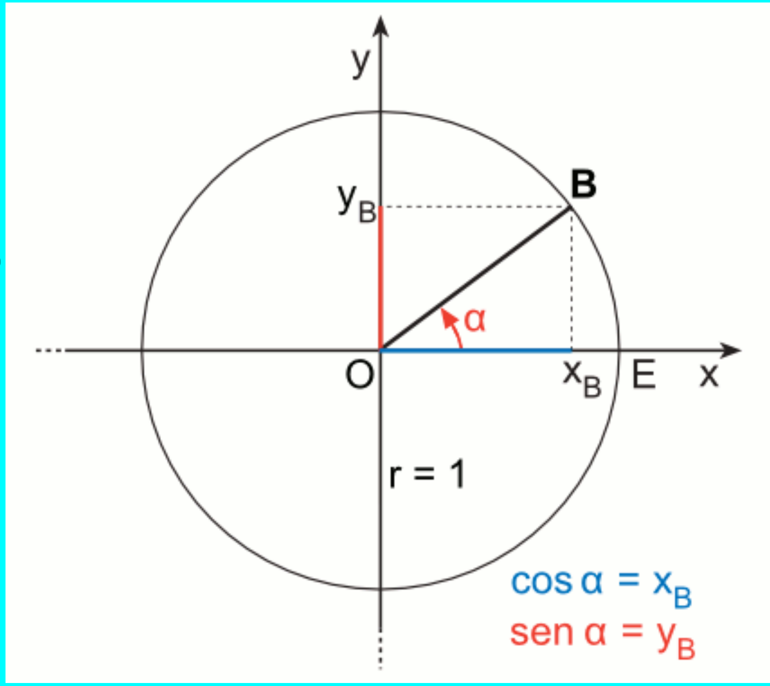
Il grafico è compreso e non esce mai da questi due valor

Mathematica

Seno e Coseno



DEFINIZIONE



Tangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α,

sia ***B*** il punto della circonferenza associato all'angolo α,

Definiamo **Tangente** di α, e lo indichiamo con:

$$\textbf{Tan}\ \alpha = \frac{\textbf{sen}\ \alpha}{\textbf{cos}\ \alpha}$$

Rapporto tra **sen** α e **cos** α

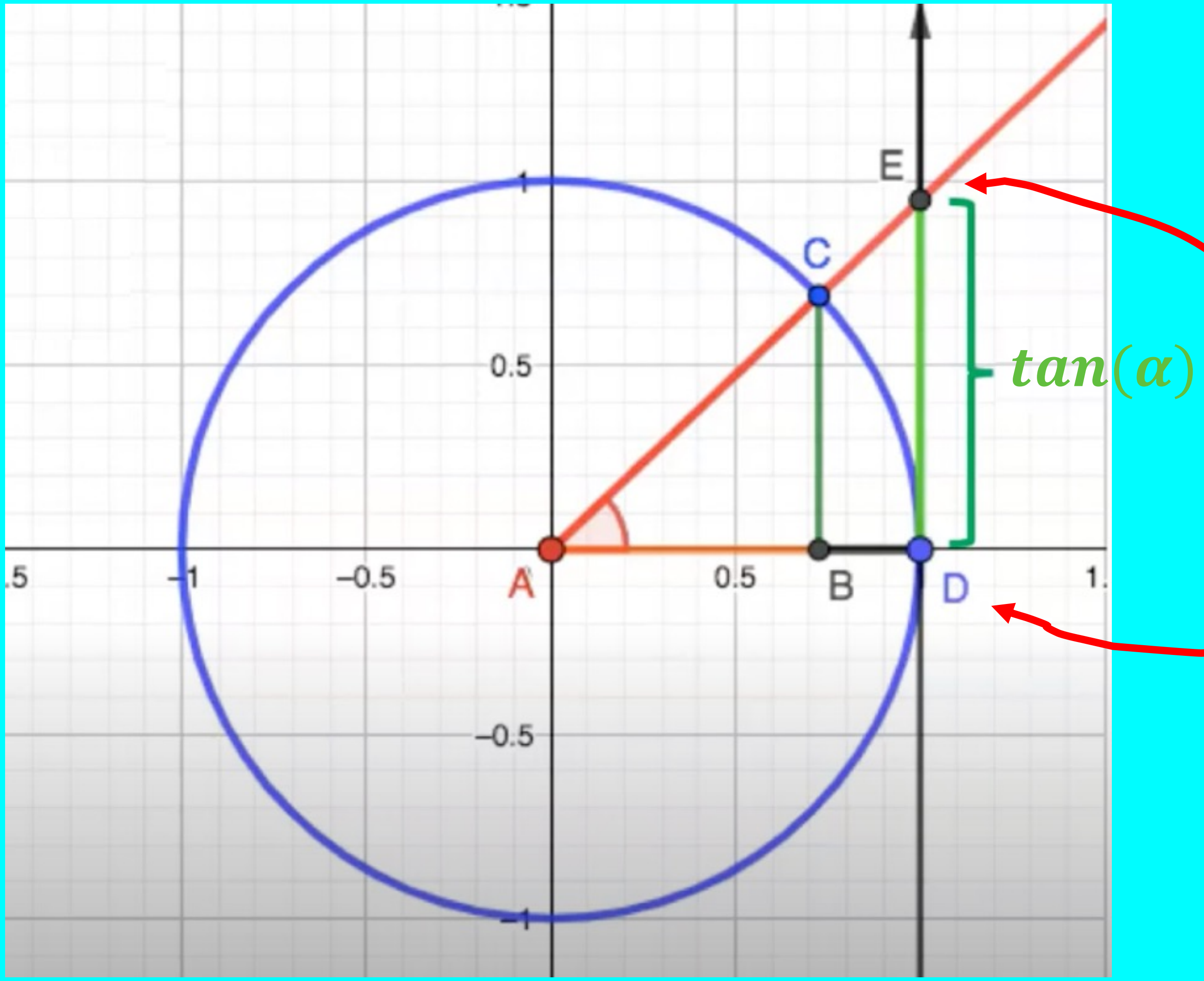
Definita per a con cos $\propto \neq 0$

Mathematica ML

DEFINIZIONE Tangente

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Esiste solo se $\cos(\alpha) \neq 0$



$\cos(\alpha) = 0$

$per\ \alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad e\ \alpha = \frac{3\pi}{2}$

Quindi poniamo

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Intersezione tra retta tangente alla circonferenza e del prolungamento del raggio

Punto (1,0)

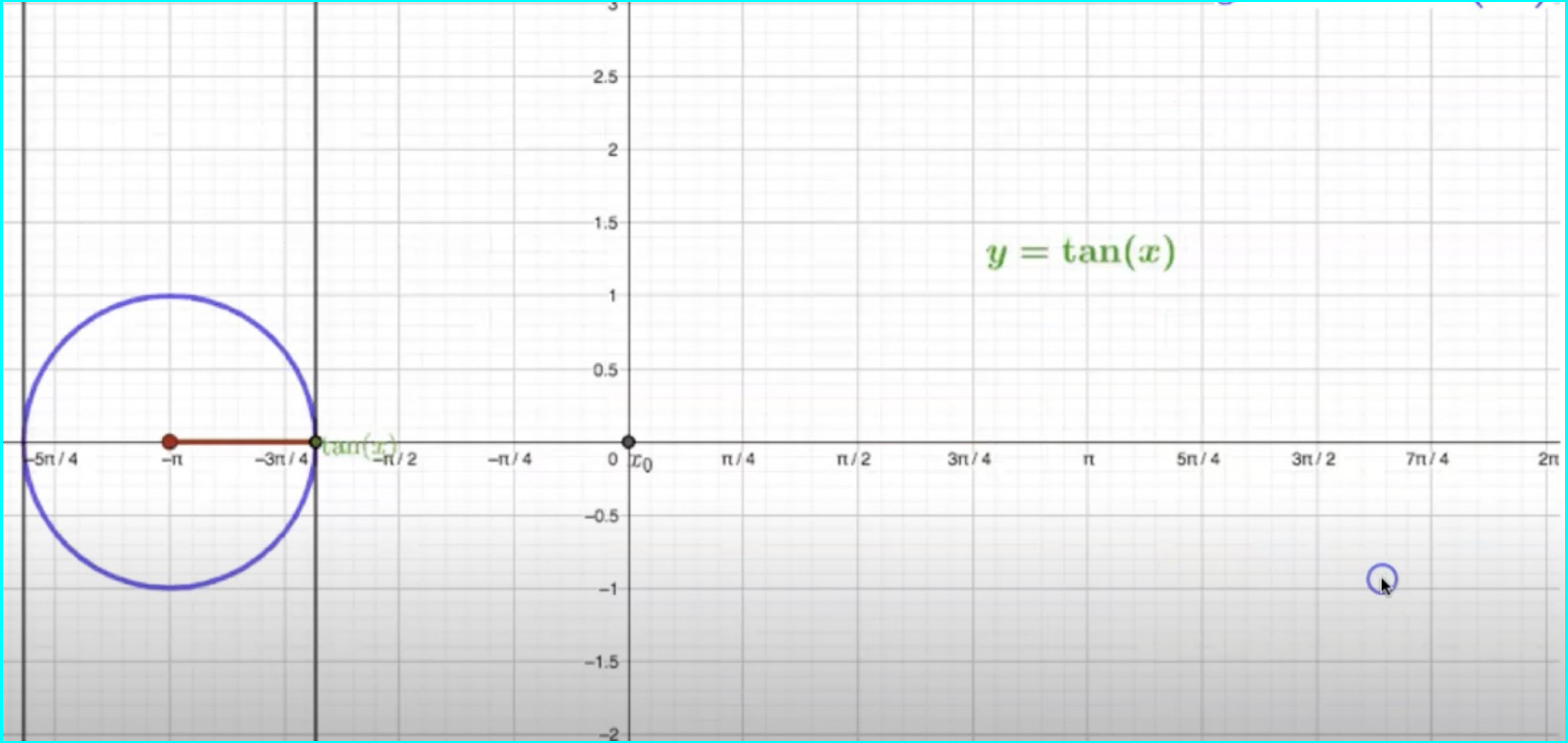
Tangente:

Positiva I e III quadrante

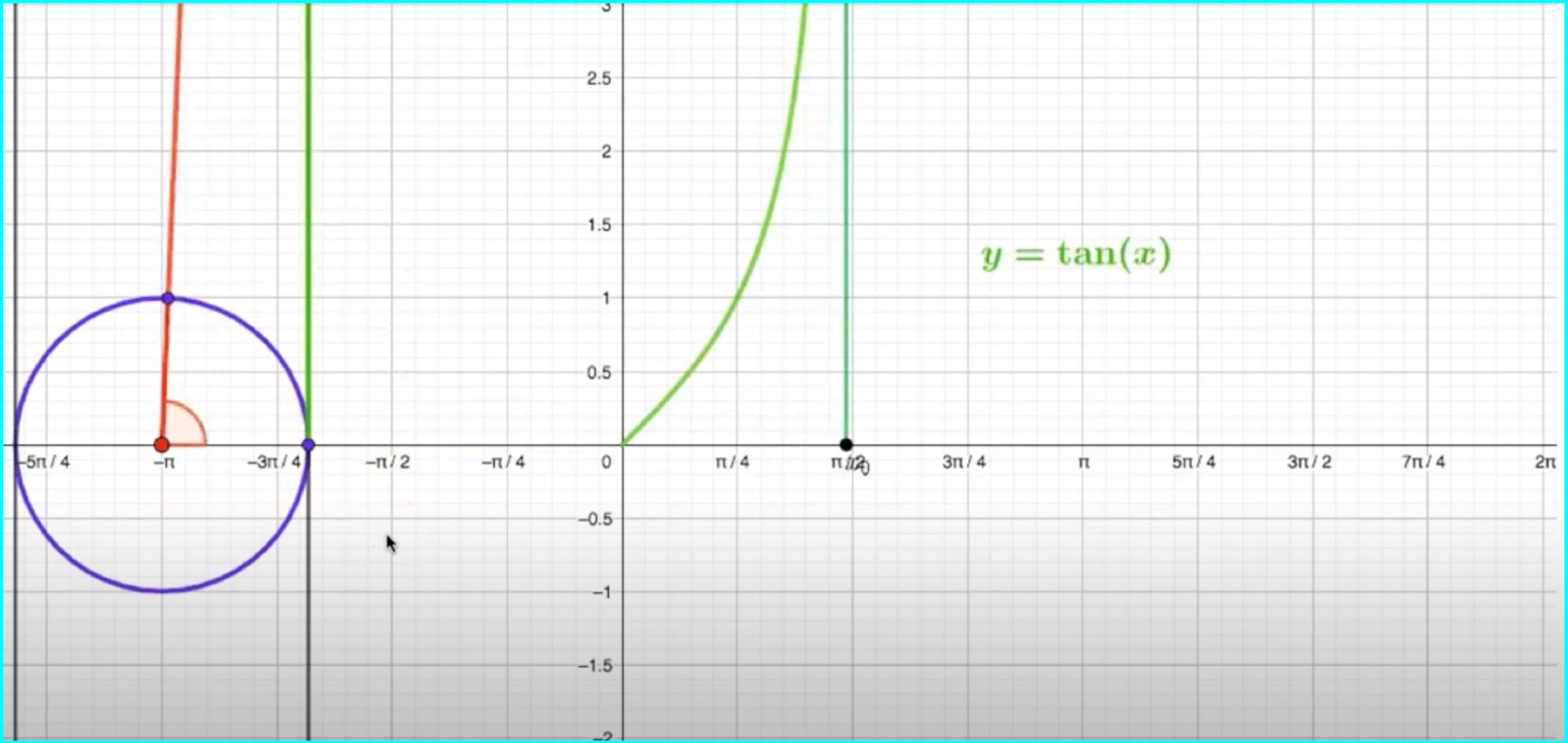
Negativa II e IV quadrante

Andamento grafico della Tangente

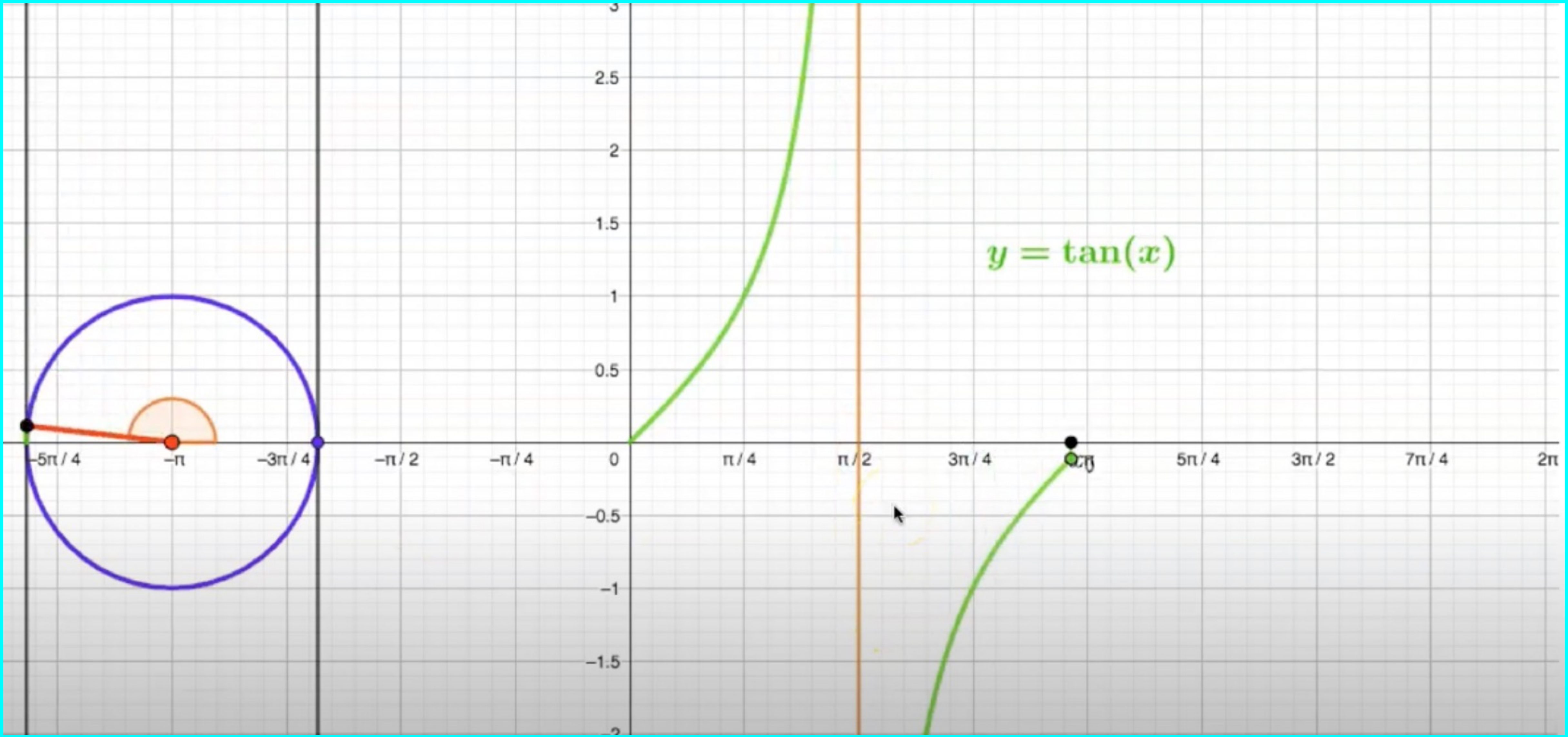
Andamento della funzione Tangente



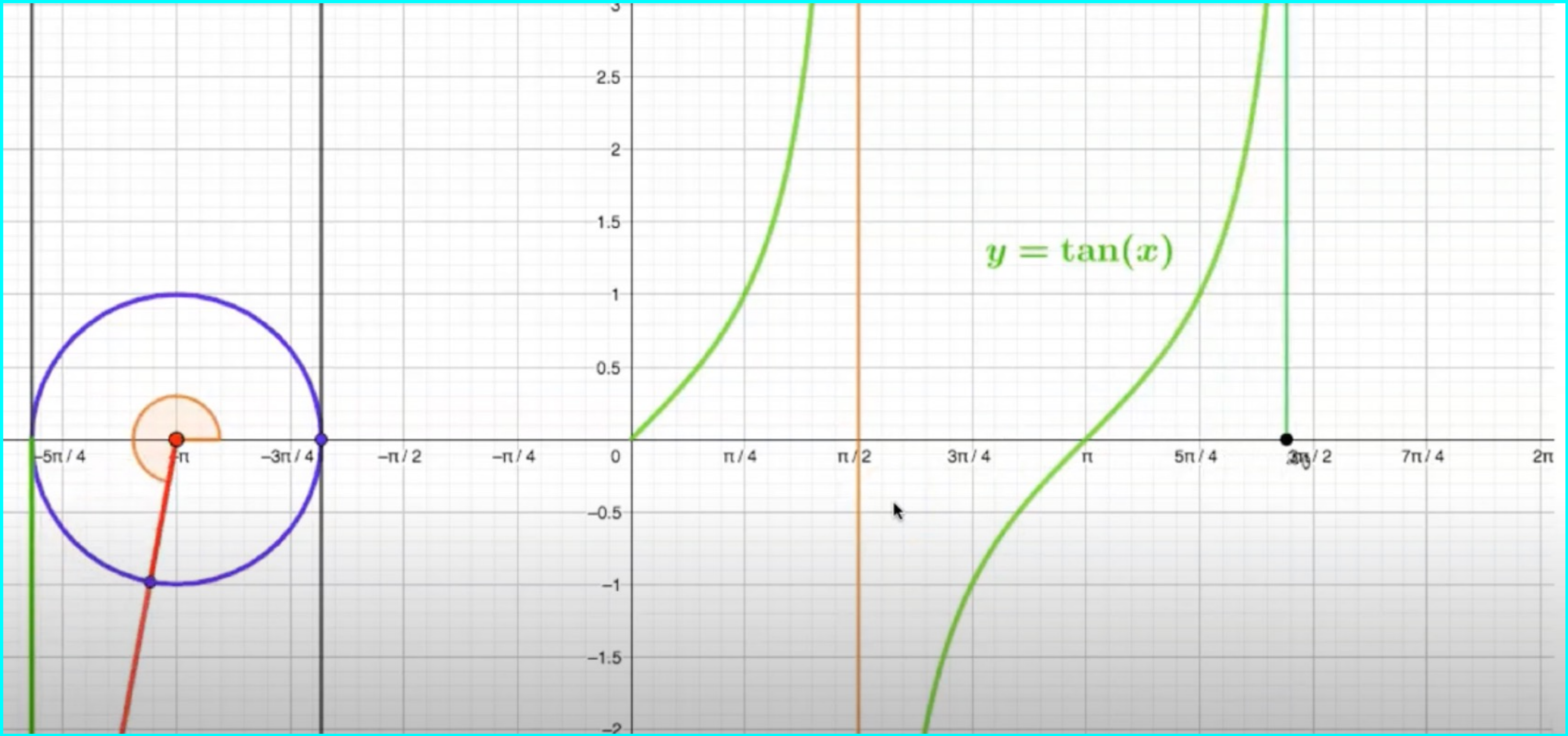
Andamento della funzione Tangente



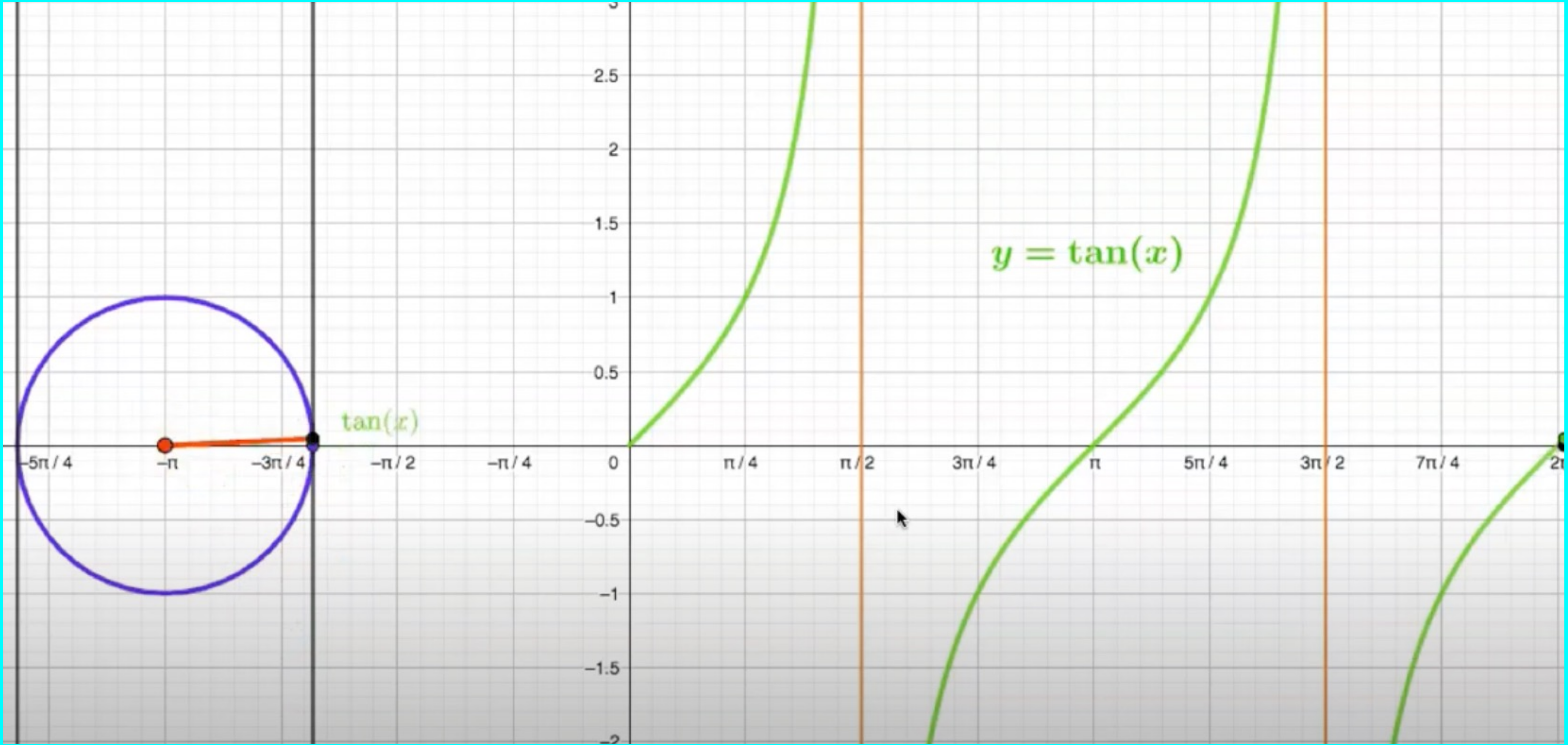
Andamento della funzione Tangente



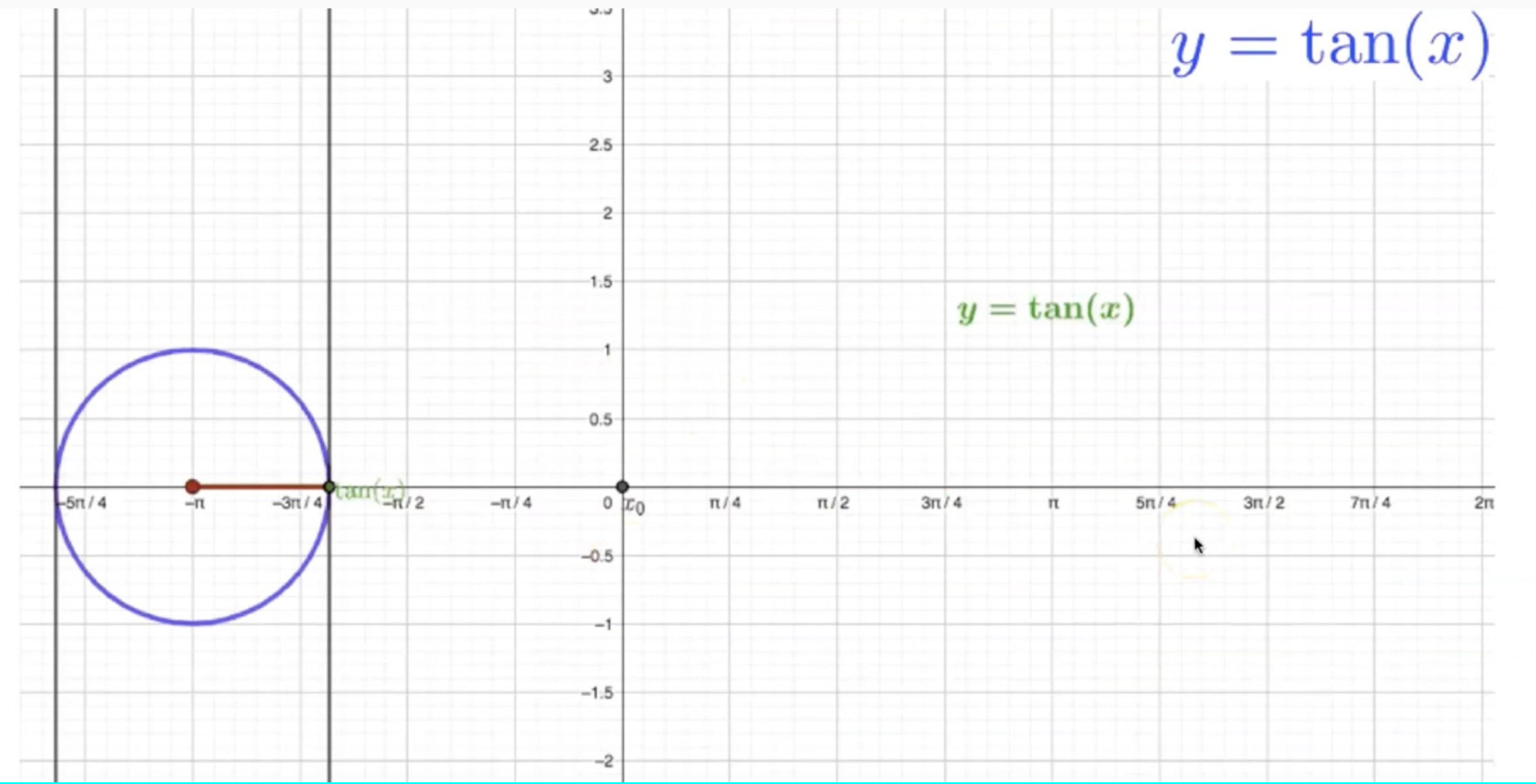
Andamento della funzione Tangente



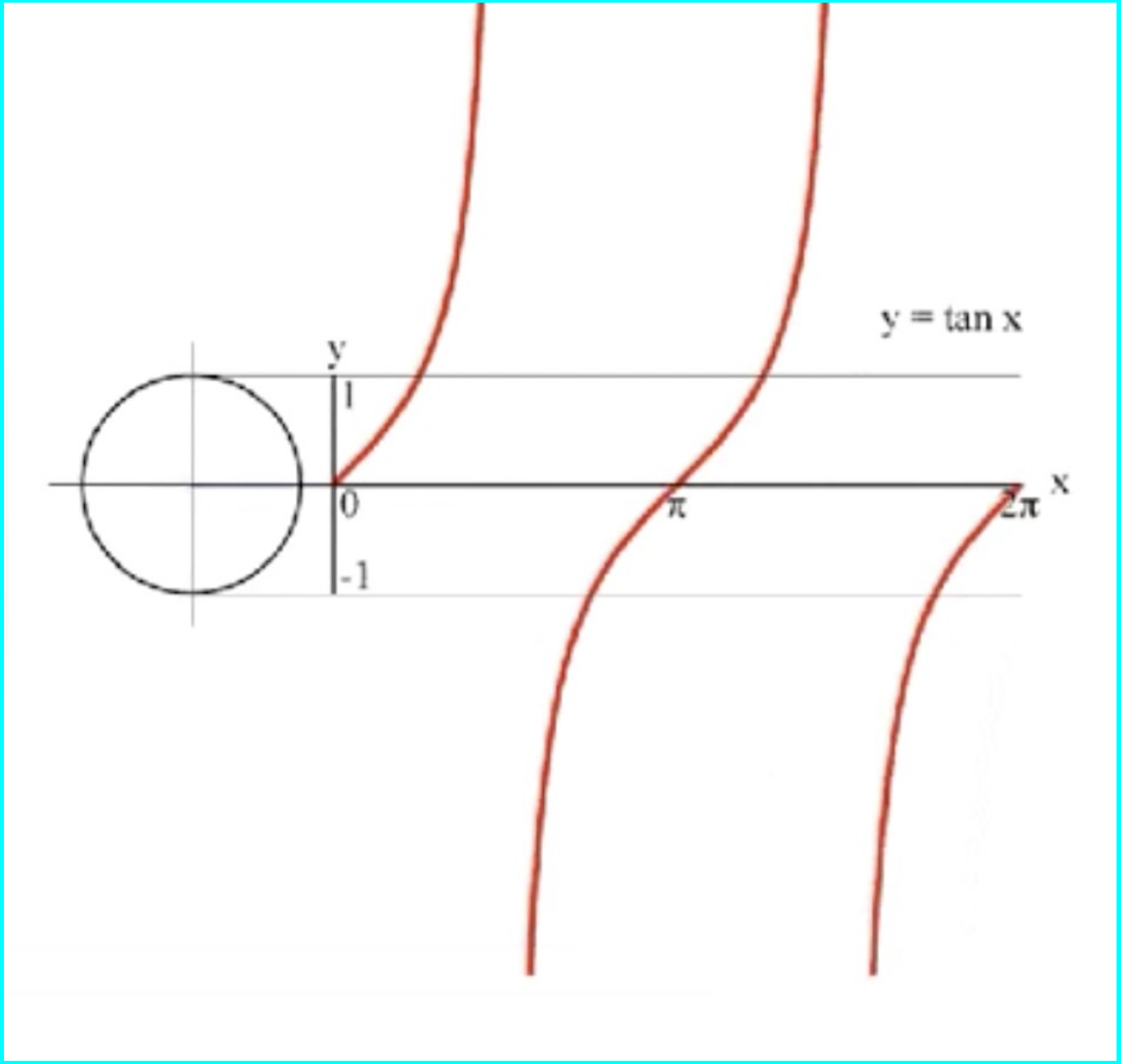
Andamento della funzione Tangente



Andamento della funzione Tangente



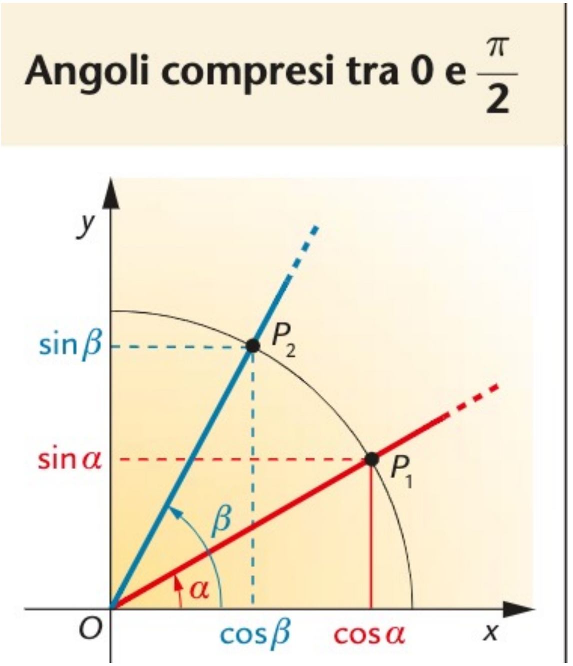
Andamento della funzione Tangente



Proprietà `delle funzioni goniometriche

Come variano il seno e il coseno di un angolo quando la misura dell'angolo cresce da 0 a 2π.

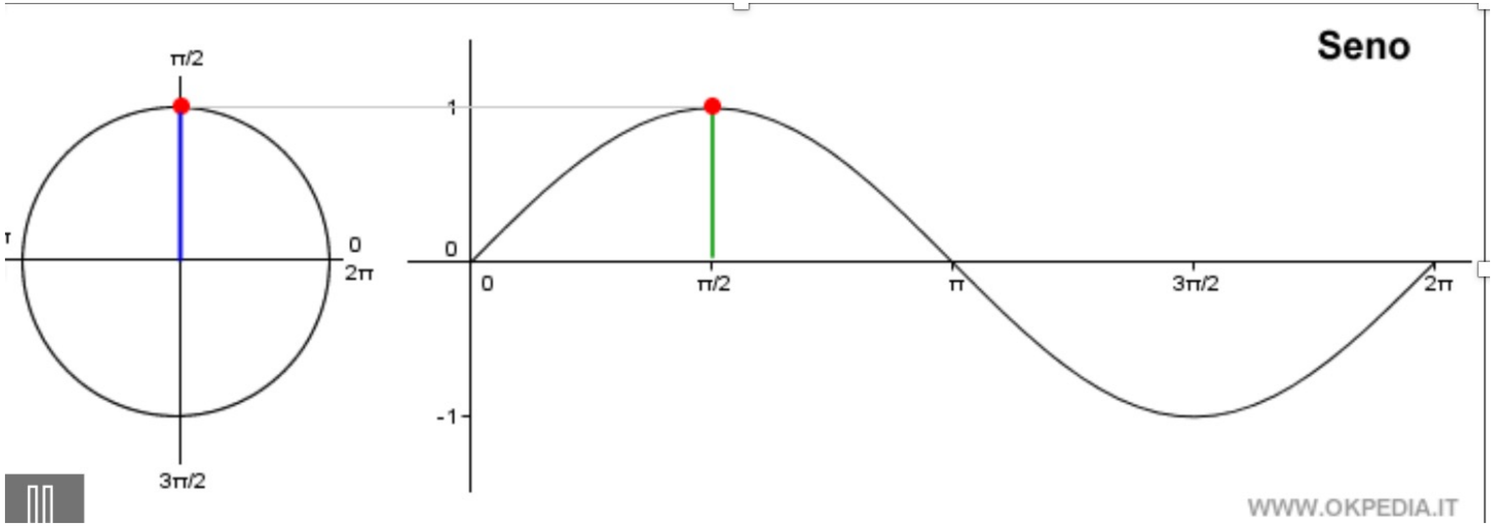
Ossia, come variano ordinata e ascissa del punto P.

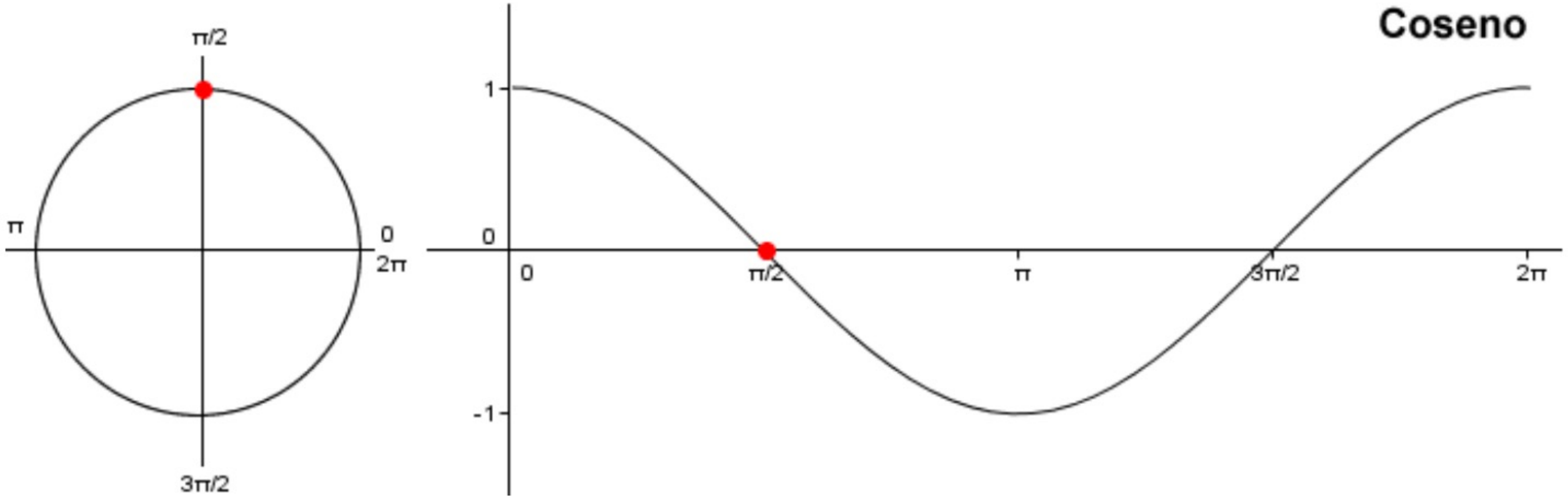


Quando la misura di un angolo cresce da 0 a $\frac{\pi}{2}$

- l'ascissa **decresce** da 1 a 0 → **coseno decresce, Positiva**
- l'ordinata **cresce** da 0 a 1 → **seno cresce, Positiva**

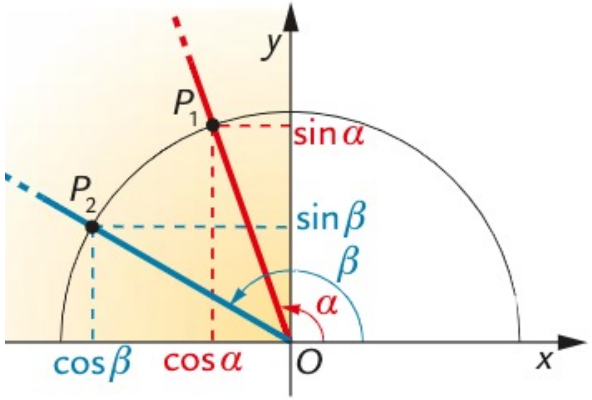
$0 \text{ a } \frac{\pi}{2}$





$\frac{\pi}{2}$ a π

Angoli compresi tra $\frac{\pi}{2}$ e π

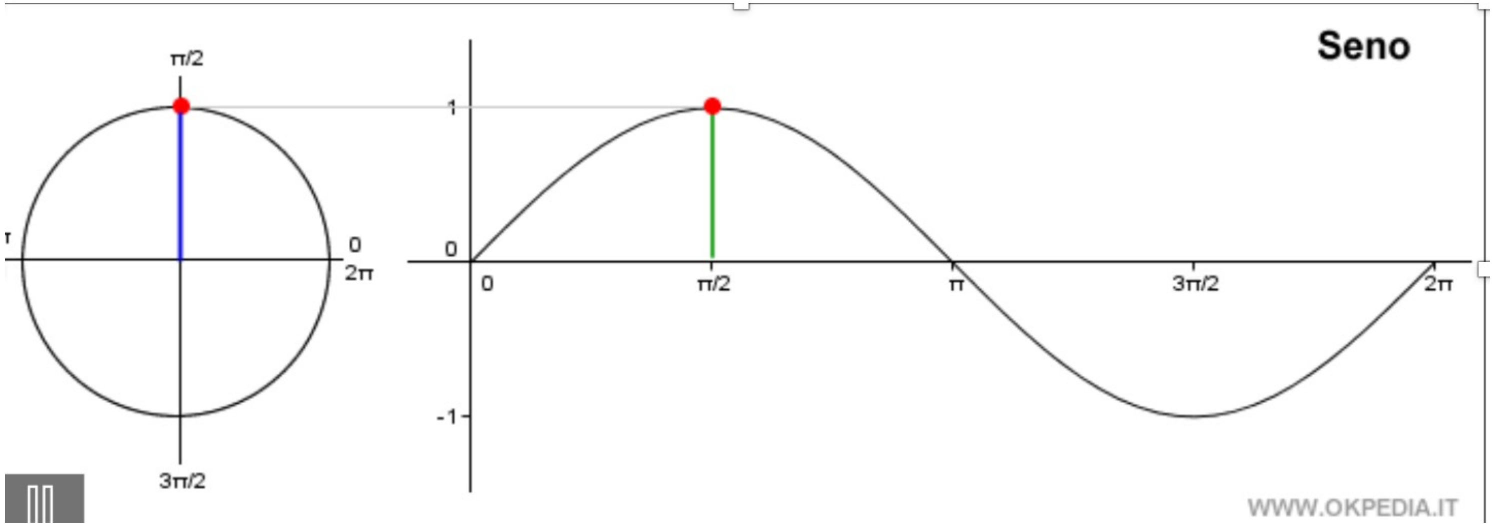


Quando la misura di un angolo cresce da $\frac{\pi}{2}$ a π

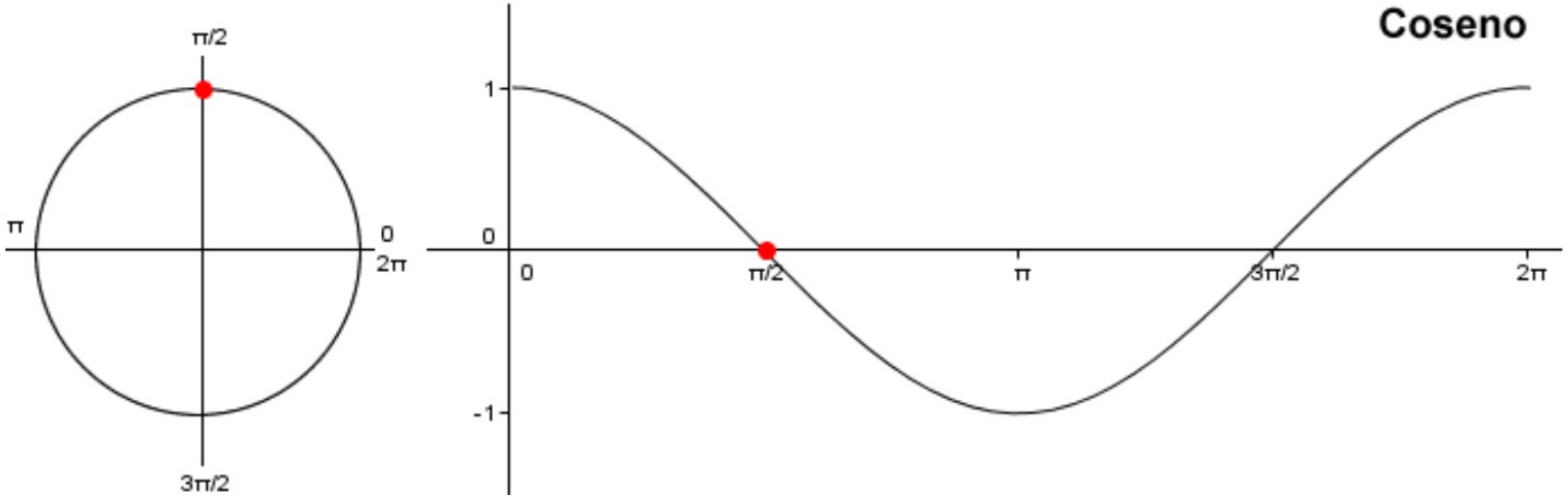
l'ascissa **decresce** da 0 a -1 → **coseno decresce.** **Negativa**

l'ordinata de**cresce** da 1 a0. → **seno cresce .** **Positiva**

$\frac{\pi}{2}$ a π



Seno
π/2
0
2π
3π/2
1
0
-1
0
π/2
π
3π/2
2π
WWW.OKPEDIA.IT

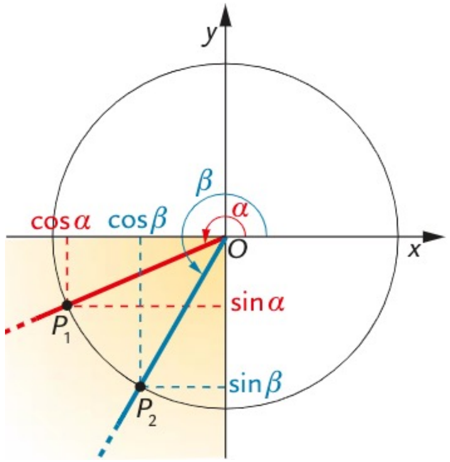


Coseno
π/2
π
0
2π
3π/2
1
0
-1
0
π/2
π
3π/2
2π

Mathematica ML

$$\frac{\pi}{2}\ a\ \frac{3\pi}{2}$$

Angoli compresi tra π e $\frac{3\pi}{2}$

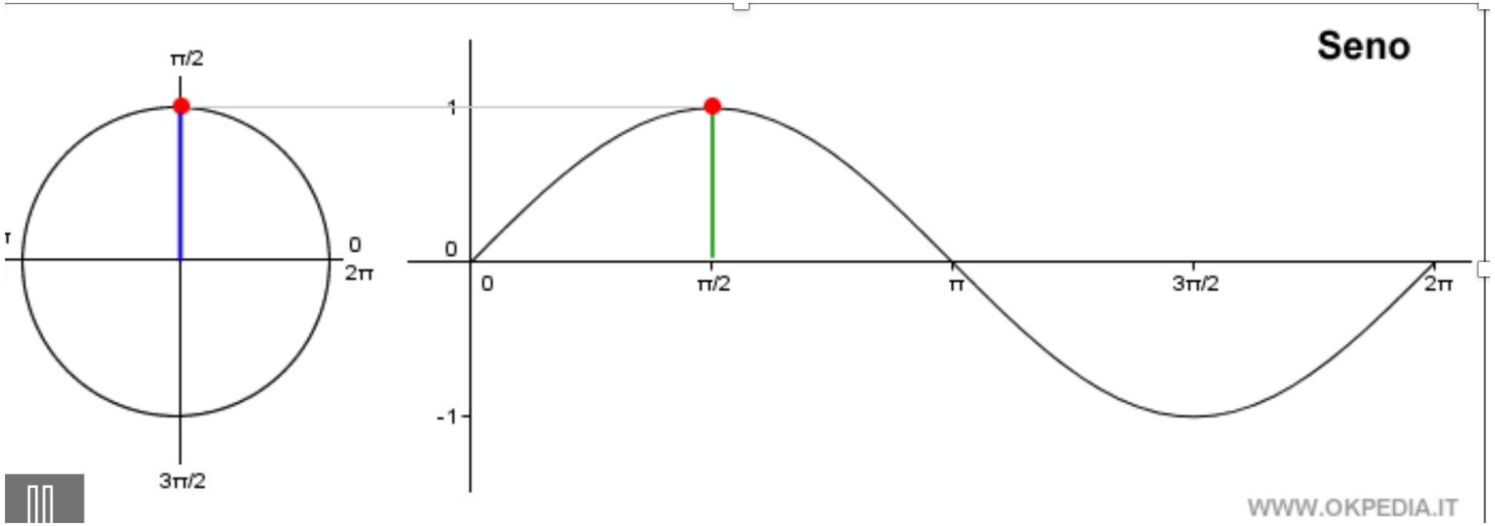


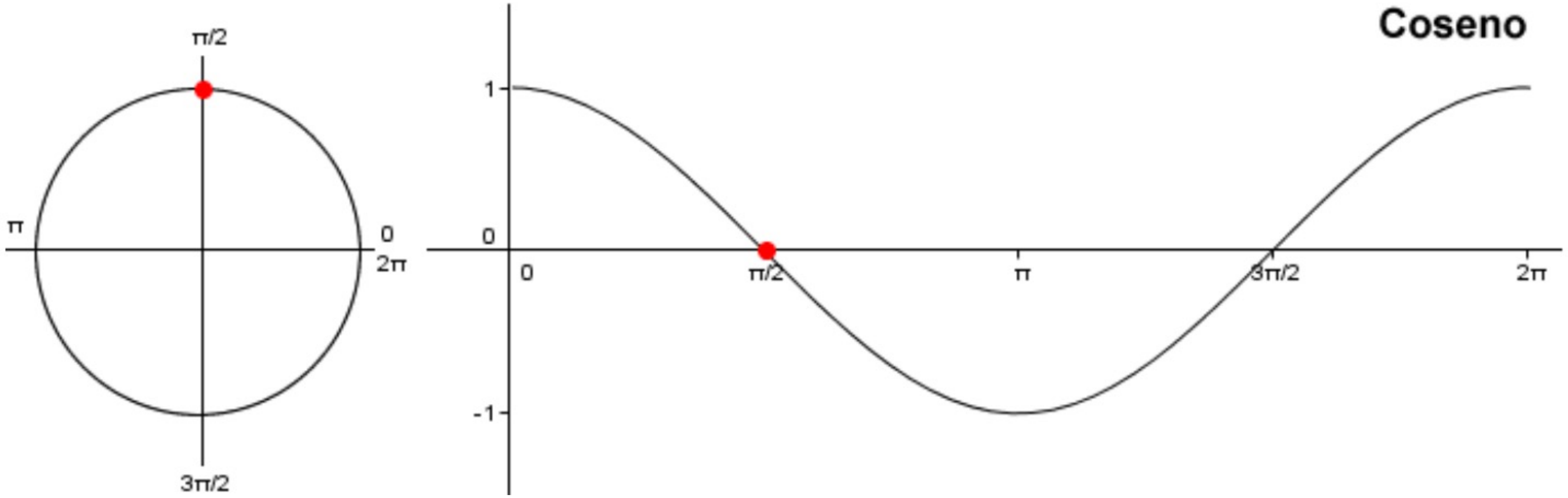
Quando la misura di un angolo cresce da $\pi\ a\ \frac{3\pi}{2}$

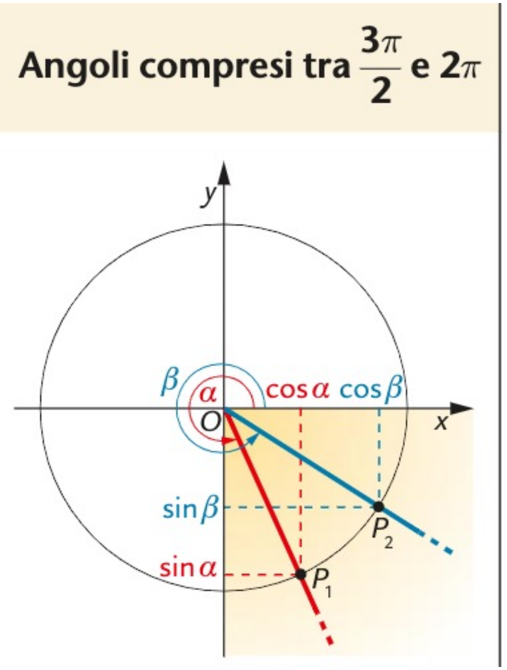
l’ascissa **cresce** da -1 a 0 → **coseno cresce** **Negativa**

l’ordinata de**cresce** da 0 a -1. → **seno decresce** **Negativa**

$$\frac{\pi}{2} \; a \; \frac{3\pi}{2}$$







$\frac{3\pi}{2}$ a 2π

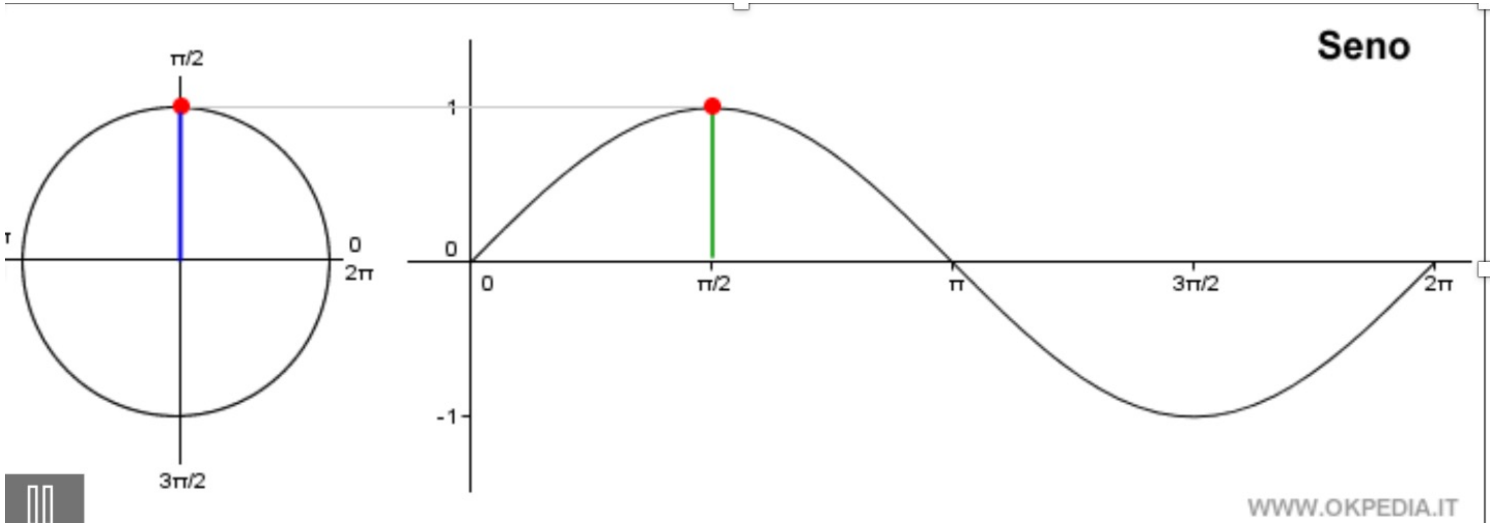
Quando la misura di un angolo cresce da $\frac{3\pi}{2}$ a 2π

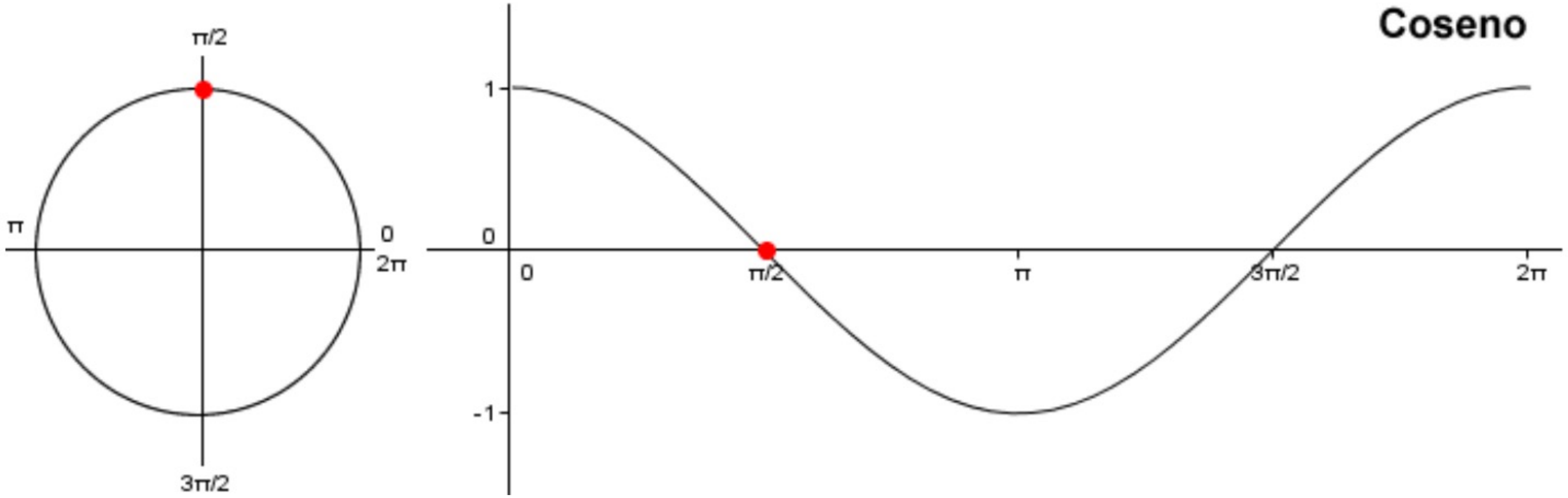
l'ascissa **cresce** da 0 a 1 → **coseno cresce** **Negativa**

l'ordinata **cresce** da -1 a 0. → **seno cresce** **Negativa**

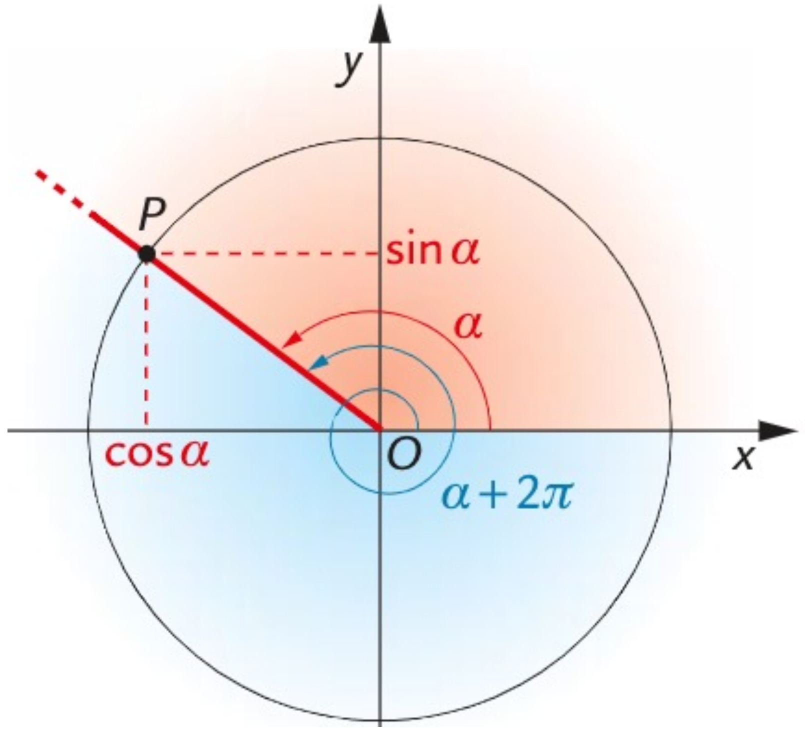
Mathematica ML

$$\frac{3\pi}{2}\ a\ 2\pi$$





Periodicità delle funzioni trigonometriche



cosa accade se la misura dell'angolo è maggiore di 2π.?

Le funzioni trigonometriche sono PERIODICHE.
Cosa significa ???

Consideriamo un angolo α,
Questo per $\alpha = 0$ $il\ punto\ P$ è $fermo$
Per $\alpha = 2\pi$ $il\ punto\ P\ avrà\ fatto\ un\ giro\ completo\ della\ circonferenza$

Per valori superiori a 2π Es. $2\pi + \alpha$ si considera il solo angolo α

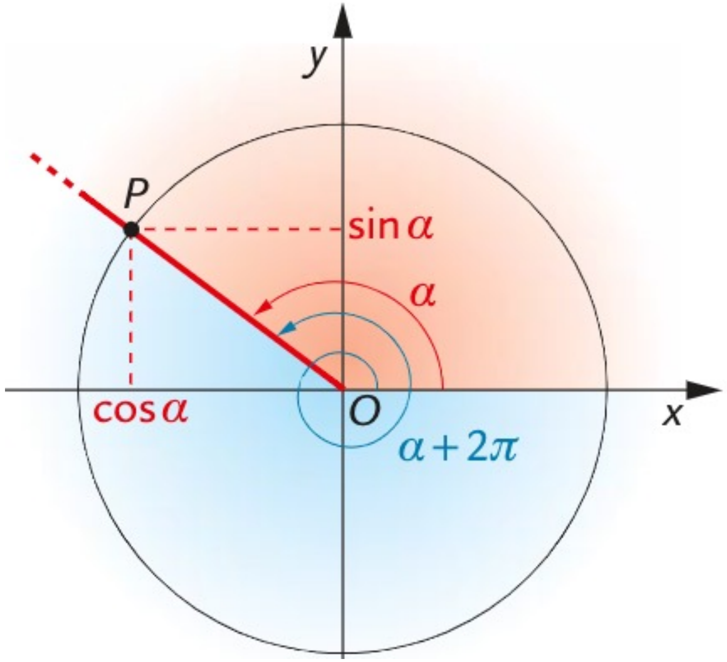
il seno e il coseno riprendono, per angoli maggiore di 2π, gli stessi valori assunti fra 0 e 2 π,

si dice che il seno e il coseno sono funzioni periodiche di periodo 2 π

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}$$

Periodicità delle funzioni trigonometriche



$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z}$$

Sintesi: Seno Coseno

Dominio

Seno e coseno definiti per qualsiasi angolo

Segno:

Seno I e II quadrante POSITIVO
III e IV quadrante NEGATIVO

Coseno I e IV quadrante POSITIVO
II e IV terzo NEGATIVO

Crescenza e decrescenza:

Seno I e IV quadrante CRESCE
II e III quadrante DECRESCE

Coseno III e IV quadrante CRESCE
I e II terzo DECRESCE

Valori assunti:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

Periodicità:

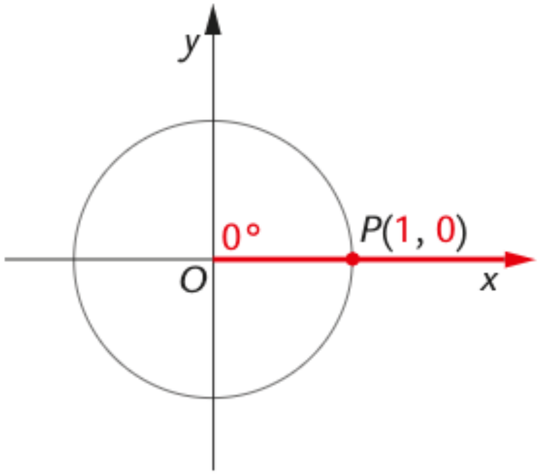
$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z}$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{Z}$$

Funzioni goniometriche di angoli notevoli

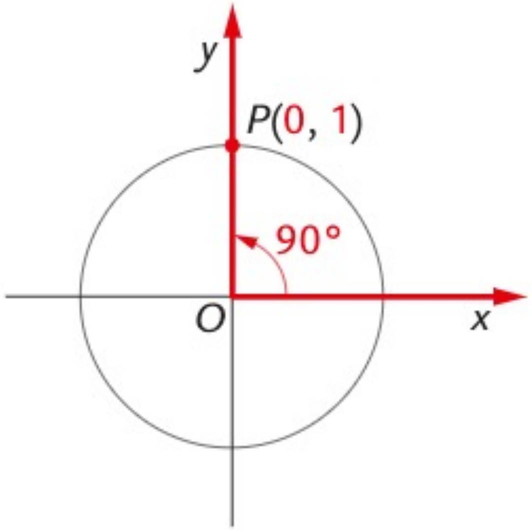
$\alpha = 0° = 0$

- $\sin 0° = \sin 0 = 0$
- $\cos 0° = \cos 0 = 1$
- $\tan 0° = \tan 0 = \frac{0}{1} = 0$



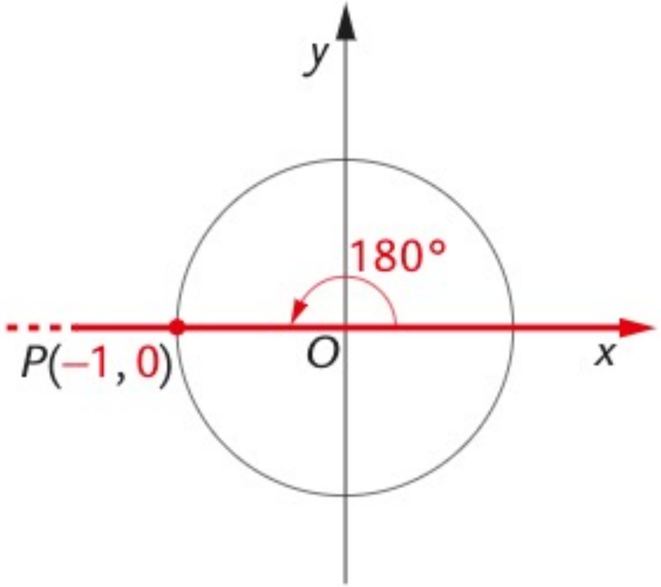
$\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$

- $\sin 90° = \sin \frac{\pi}{2} = 1$
- $\cos 90° = \cos \frac{\pi}{2} = 0$
- $\tan 90° = \tan \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ non esiste!



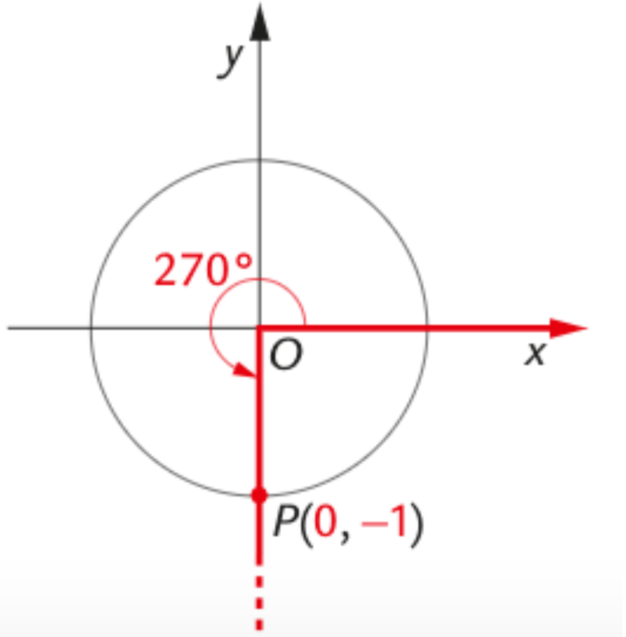
$$\alpha = 180° = \pi$$

- $\sin 180° = \sin \pi = 0$
- $\cos 180° = \cos \pi = -1$
- $\tan 180° = \tan \pi = \dfrac{0}{-1} = 0$



$$\alpha = 270° = \frac{3\pi}{2}$$

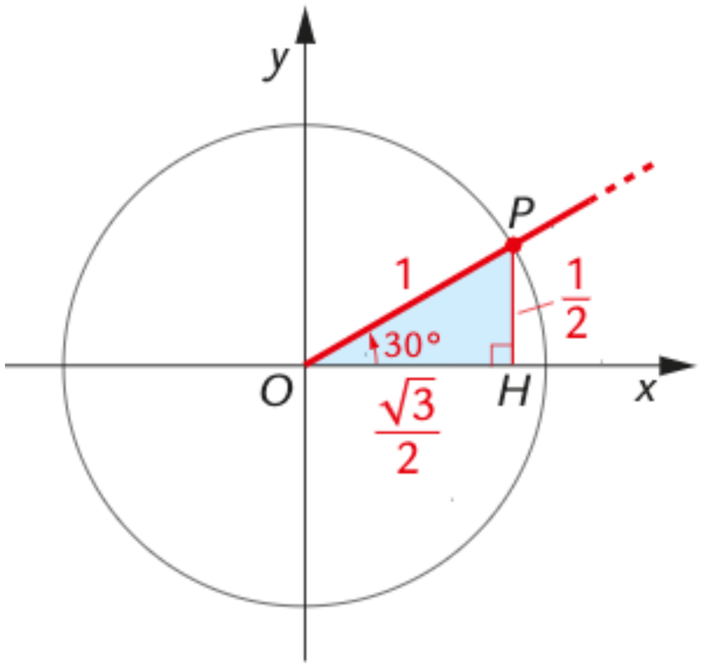
- $\sin 270° = \sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$
- $\cos 270° = \cos \dfrac{3\pi}{2} = 0$
- $\tan 270° = \tan \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{-1}{0}$ non esiste!



$$\alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$$

Dunque $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quindi:

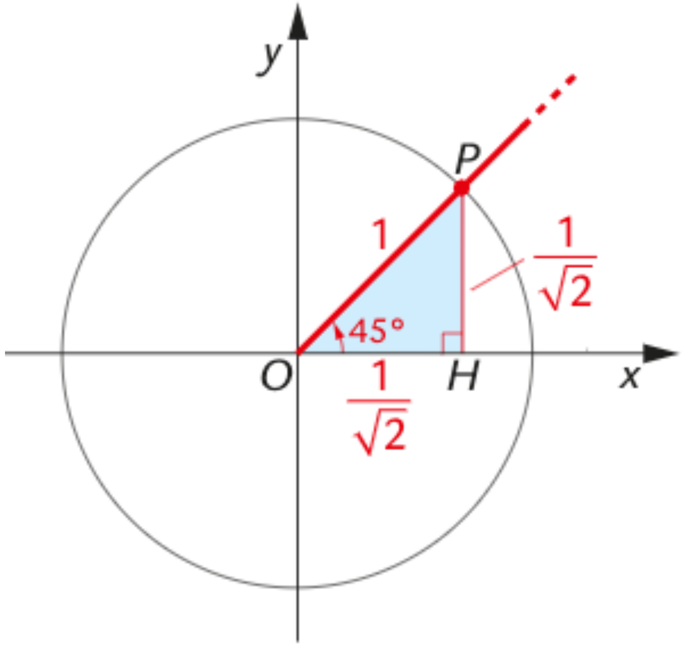
- $\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 30° = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



$$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

Dunque $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, quindi:

- $\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$



Funzioni goniometriche di angoli notevoli

• Angoli con i lati sugli assi cartesiani

α	sin α	cos α	tan α
0°	0	1	0
90°	1	0	Non definita
180°	0	−1	0
270°	−1	0	Non definita
360°	0	1	0

• Angoli di 30°, 45°, 60°

α	sin α	cos α	tan α
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Esercizi. (206)

63 **Vero o falso?**

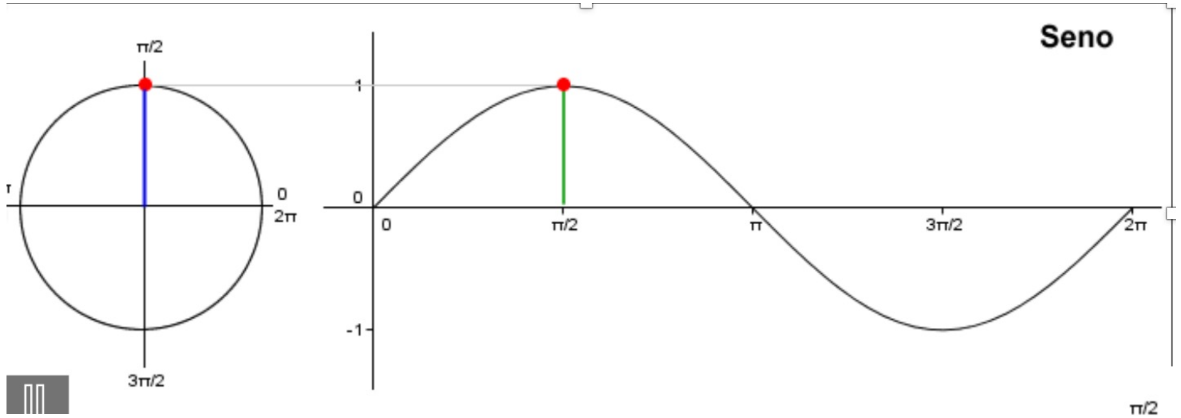
a. $\sin 30° + \sin 60° = \sin 90°$ — [ ] V [X] F

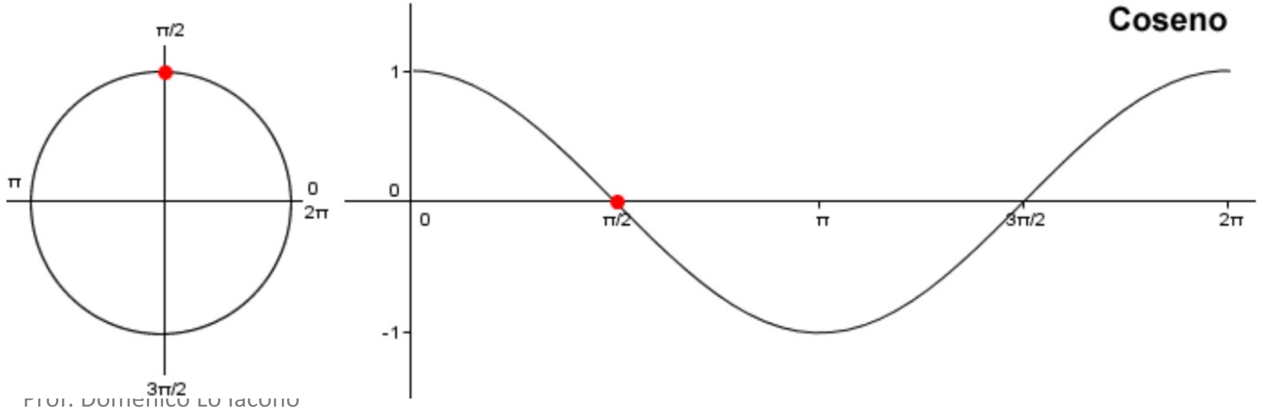
b. $\sin 60° = 2\sin 30°$ — [ ] V [X] F

c. $\cos(180° + 90°) = \cos 180° \cos 90° - \sin 180° \sin 90°$ — [X] V [ ] F

d. $\sin 180° = \sin 90° + \sin 90°$ — [ ] V [X] F

e. $\sin 90° = \cos 360°$ — [X] V [ ] F





Esercizi. (206)

64 Con l'aiuto di una calcolatrice, determina le funzioni goniometriche degli angoli indicati. Arrotonda i risultati a meno di un centesimo.

a. $\sin 70°$ **b.** $\tan 25°$ **c.** $\cos 52°$

65 Con l'aiuto di una calcolatrice, determina le funzioni goniometriche degli angoli indicati. Arrotonda i risultati a meno di un centesimo.

a. $\cos \frac{\pi}{7}$ **b.** $\tan \frac{2\pi}{5}$ **c.** $\sin \frac{7\pi}{36}$

Esercizi. (206)

Completa.

67 $(2\cos\pi)\left(3\sin\frac{\pi}{2}\right)-\tan\pi+5\cos 0-4\sin\frac{3\pi}{2}=(-2)\cdot \text{.........}-0+5\cdot\text{.........}-4(-\text{.........})=\text{..................}=3$

68 $(\tan 0+\sin 0+\cos 0)\left(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=(0+\text{.....}+1)(1-\text{.........})=\text{.........}=1$

69 $(\cos 270°-\sin 90°)(\sin 270°)-\cos 180°=(0-\text{.........})(-\text{.........})-(-\text{.....})=\text{.........}=2$

70 $(\sin 180°-\cos 180°)(\sin 90°-\cos 90°)-\tan 180°=[0-(\text{.....})](1-\text{.....})-0=\text{..................}=1$

Esercizi. (207)

Semplifica le seguenti espressioni, ricordando i valori delle funzioni goniometriche degli angoli che hanno il secondo lato su uno degli assi cartesiani.

71 $\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)$ [1]

72 $\sin 90°\ \cos 90° + \sin 180°\ \cos 180°$ [0]

73 $\sin\pi\,(\cos\pi-\sin\pi)+\cos\pi$ [−1]

74 $(\sin 90° - \cos 270°)(\sin 180° - \cos 90°) + \cos 180°$ [−1]

75 $\sin 270°\cdot(\cos 90° - \sin 90°) + \cos 0°(\sin 90° - \cos 270°)$ [2]

76 $(\sin\pi+\cos\pi)^3+\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)^3$ [0]

77 $\sin 180°\ \cos 90° + \cos 180°\ \sin 270°$ [1]

78 $\dfrac{\sin\pi+\tan\pi}{\cos\pi+\sin 2\pi}$ [0]

79 $\left(\sin^7\frac{\pi}{2}\ \cos^8\frac{3}{2}\pi+\sin^6\frac{3\pi}{2}\ \cos^5\frac{\pi}{2}\right)^3$ [0]

80 $(\sin 180° - \cos 180°)(\cos 90° - \sin 90°)(\sin 270° + \cos 270°)$ [1]

Esercizi. (207)

Semplifica le seguenti espressioni, ricordando anche i valori della funzioni goniometriche degli angoli di 30°, 45° e 60°.

89 $\sin 30° - \cos 60° + \tan 30° - \tan 60°$ $\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

90 $(\sin 30° - \cos 60°)^2$ $[0]$

91 $\sqrt{2}\sin 45° + \sqrt{3}\sin 60° - \frac{\sqrt{3}}{3}\tan 30°$ $\left[\frac{13}{6}\right]$

92 $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\tan\frac{\pi}{4}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

93 $\left(\sin\pi + \cos\pi + \tan\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$ $[0]$

94 $\left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\right)^2$ $[0]$

95 $\left(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right)^2$ $[4]$

96 $\tan\frac{\pi}{4}\left(\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right)$ $[0]$

97 $\left(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi\right)\left(\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right)$ $[-2\sqrt{2}]$

98 $\tan 30°\ \tan 60° + \sin 30°\ \cos 60° + \sin 60°\ \cos 30°$ $[2]$

Mathematica

DEFINIZIONE Seno e coseno

Equazione della Circonferenza

$Caso\ 0 \leq x \leq 2\pi.$ Sulla circonferenza trigonometrica

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) = 1$$

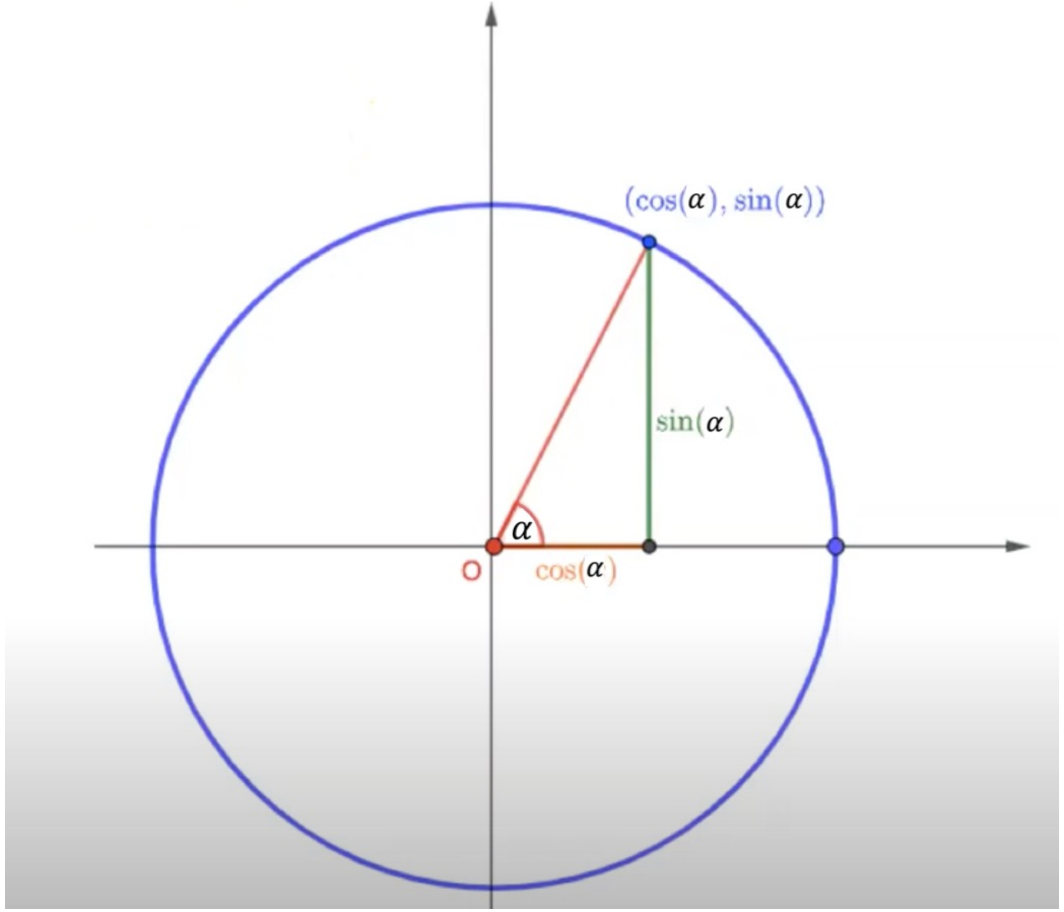
Legge fondamentale della trigonometria

$$Sin^2(\alpha) = 1 - Cos^2(\alpha)$$

$$Sin(\alpha) = \sqrt{1 - Cos^2(\alpha)}$$

$$Cos^2(\alpha) = 1 - Sin^2(\alpha)$$

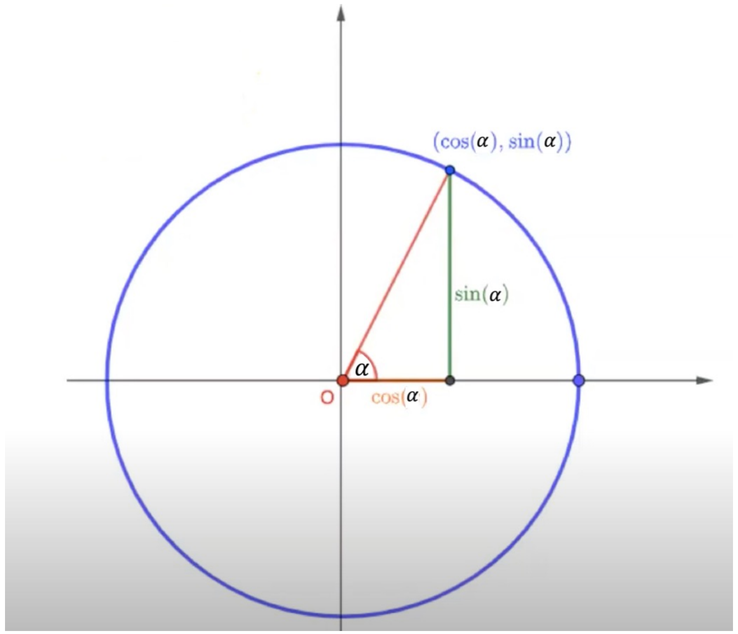
$$Cos(\alpha) = \sqrt{1 - Sin^2(\alpha)}$$



Mathematica

Esercizi. (210)

Trovare: $cos \propto$ $Tg \propto$



$$sin \propto = \frac{1}{3}$$

$$0 < \propto < \frac{\pi}{2}$$

sin >0

cos >0

Da: $\boldsymbol{Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) = 1}$ $\boldsymbol{Cos(\alpha) = \sqrt{1 - Sin^2(\alpha)}}$

$$\boldsymbol{Cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - Sin^2(\alpha)}} \qquad \boldsymbol{Cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} \qquad \boldsymbol{Cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} \qquad \boldsymbol{Cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{9-1}{9}}}$$

$$\boldsymbol{Cos(\alpha) = +\frac{\sqrt{8}}{3}} \qquad \boldsymbol{Cos(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

Perche tra $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Il coseno e positivo

Esercizi. (210)

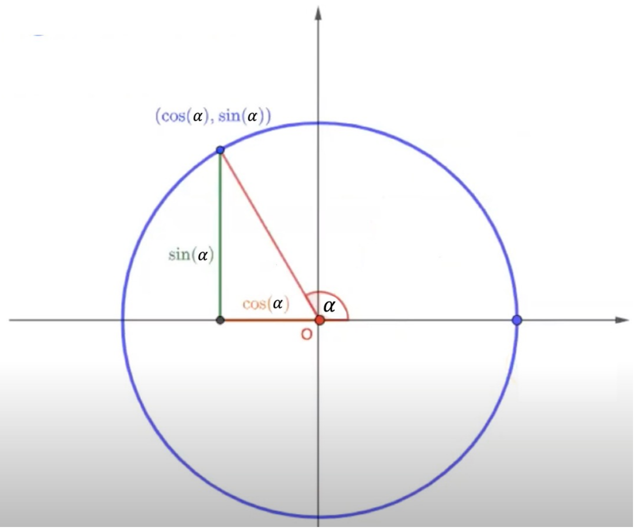
Trovare: $\cos \propto$ $\quad Tg \propto$

$$\sin \propto = \frac{1}{3}$$

SE $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$$\cos(\alpha) < 0$$

$$\sin(\alpha) > 0$$



Da: $\quad \boldsymbol{Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) = 1}$ $\qquad \boldsymbol{Cos(\alpha) = \sqrt{1 - Sin^2(\alpha)}}$

$$\boldsymbol{Cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - Sin^2(\alpha)}} \qquad \boldsymbol{Cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} \qquad \boldsymbol{Cos(\alpha) = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} \qquad \boldsymbol{Cos(\alpha) = -\sqrt{\frac{9-1}{9}}}$$

$$\boldsymbol{Cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{8}}{3}} \qquad \boldsymbol{Cos(\alpha) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

Perche tra $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$. Il coseno e negativo

Esercizi. (210)

134 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

135 $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

136 $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ $\quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

137 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

138 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

139 $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

140 $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ $\quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

141 $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

142 $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

143 $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

144 $\cos\alpha = \frac{7}{8}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

145 $\cos\alpha = \frac{7}{8}$ $\quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

146 $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ $\quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

147 $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ $\quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Mathematica

DEFINIZIONE Tg → Seno e coseno

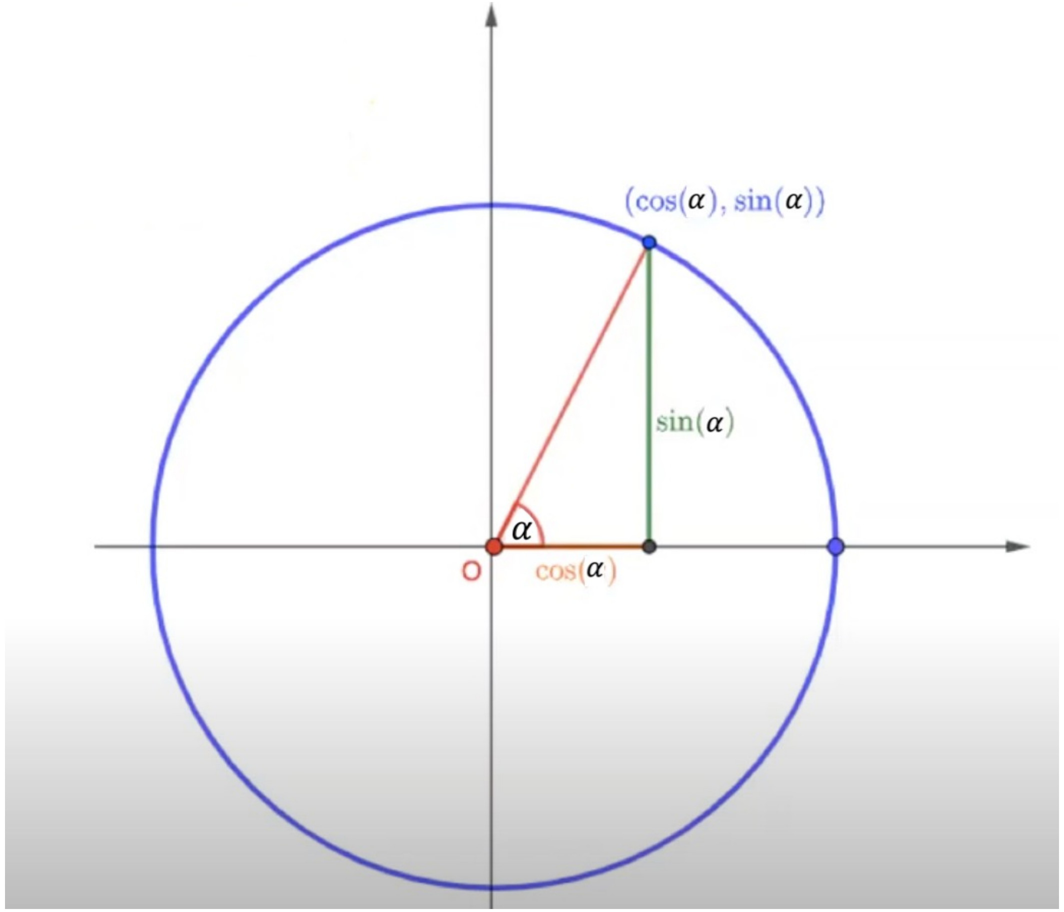
$$Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) = 1$$

Legge fondamentale della trigonometria

Posto: $X = sin\alpha$
$Y = cos\alpha$

$$X^2 + Y^2 = 1$$

$$\frac{Y}{X} = Tg\alpha$$



DEFINIZIONE Seno e coseno

$$Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) = 1$$

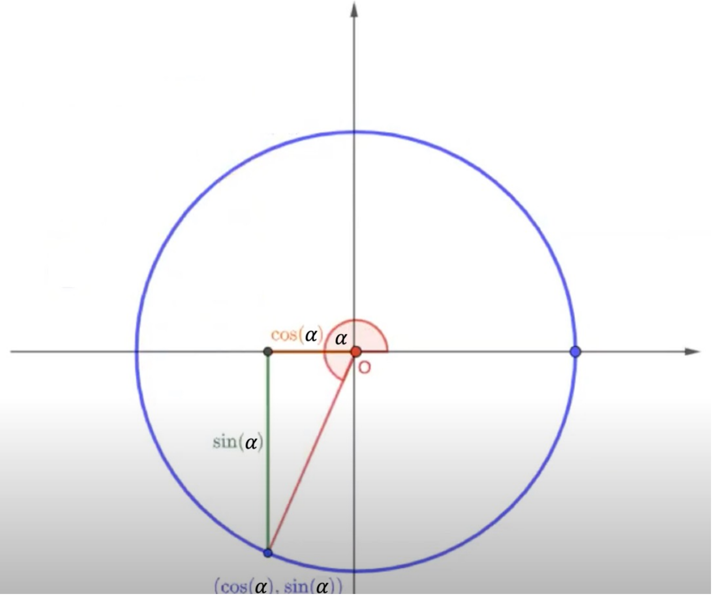
Legge fondamentale della trigonometria

$Tg\alpha = 2\sqrt{2}$ $\qquad \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ $\qquad$ sin < 0 $\quad$ cos < 0

SE $\quad \pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$

$\cos(\alpha) < 0$

$\sin(\alpha) < 0$



Posto: $\quad X = \cos\alpha$

$\qquad\quad Y = \sin\alpha$ $\qquad$ svolgiamo il sistema

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ \dfrac{Y}{X} = Tg\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y = X\,2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} X^2 + \left(X\,2\sqrt{2}\right)^2 = 1 \\ Y = X\,2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} X^2 + (X^2\,8)^2 = 1 \\ Y = X\,2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 9\,X^2 = 1 \\ Y = X\,2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{3} \\ Y = X\,2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{3} \\ Y = \dfrac{1}{3}2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{3} \\ Y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{3} \\ \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{3} & \text{Perché coseno positivo} \\ \sin\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} & \text{Perché seno negativo} \end{cases}$$

Esercizi. (210-211)

Calcola i valori del seno e del coseno di α, note le informazioni assegnate.

149 $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$ $\qquad \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

150 $\tan\alpha = -3$ $\qquad -\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$

151 $\tan\alpha = \sqrt{35}$ $\qquad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

152 $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\qquad \pi < \alpha < \dfrac{3}{2}\pi$

153 $\tan\alpha = -\sqrt{15}$ $\qquad \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

154 $\tan\alpha = -2\sqrt{6}$ $\qquad \dfrac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$

Mathematica

DEFINIZIONE Seno e coseno

Equazione della Circonferenza

$Caso\ 0 \leq x \leq 2\pi.$ Sulla circonferenza trigonometrica

$$x^2 + y^2 = 1$$

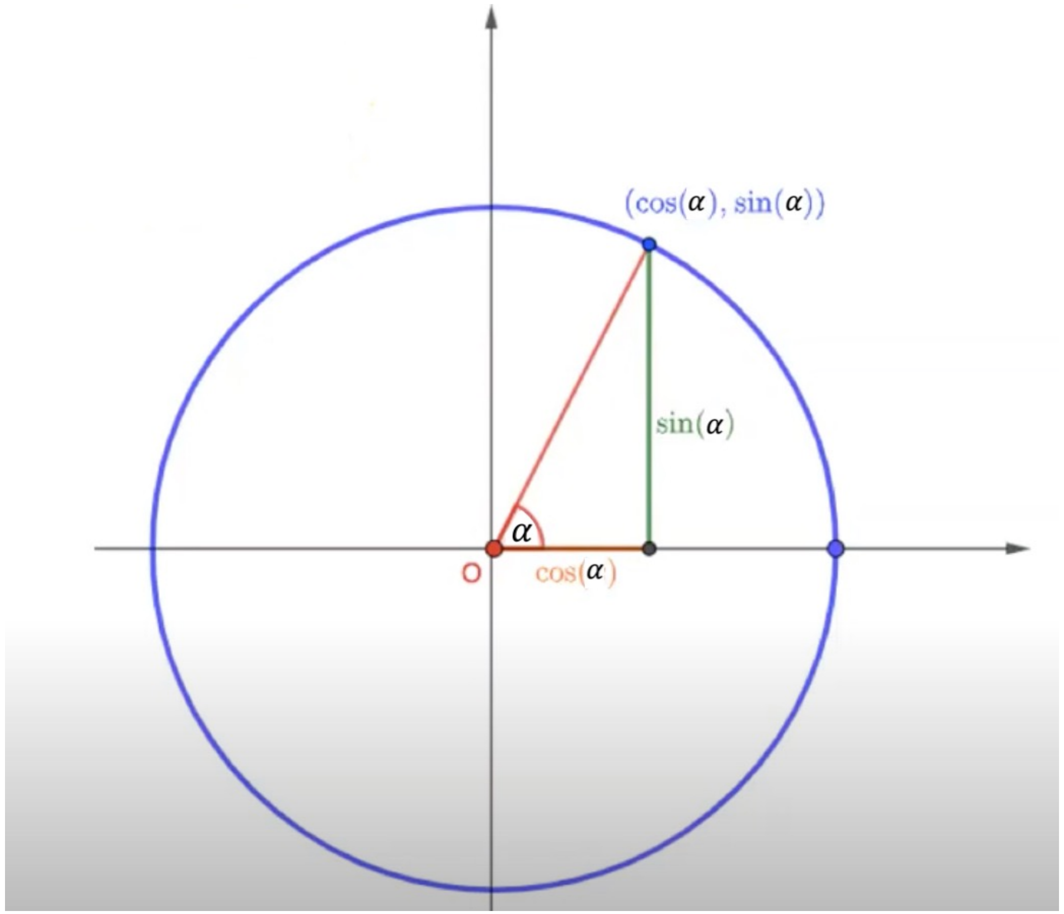
$$Sin^2(\alpha) + Cos^2(\alpha) = 1$$ Legge fondamentale della trigonometria

$$Sin^2(\alpha) = 1 - Cos^2(\alpha)$$

$$Sin(\alpha) = \sqrt{1 - Cos^2(\alpha)}$$

$$Cos^2(\alpha) = 1 - Sin^2(\alpha)$$

$$Cos(\alpha) = \sqrt{1 - Sin^2(\alpha)}$$



Mathematica ML

Esercizi. (211-212)

Trasforma ciascuna delle seguenti espressioni in un'altra equivalente che contenga solo sin α.

160 $1 - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

161 $\dfrac{\tan^2\alpha + 1}{\tan^2\alpha - 1}$

162 $\cos^4\alpha$

163 $\sin^2\alpha - \tan^2\alpha$

164 $\tan^2\alpha$

Mathematica ML

Esercizi. (211-212)

Trasforma ciascuna delle seguenti espressioni in un'altra equivalente che contenga solo cos α.

169 $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\quad [2\cos^2\alpha - 1]$

170 $\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha$ $\quad [\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha + 1]$

171 $\sin^4\alpha$ $\quad [\cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha + 1]$

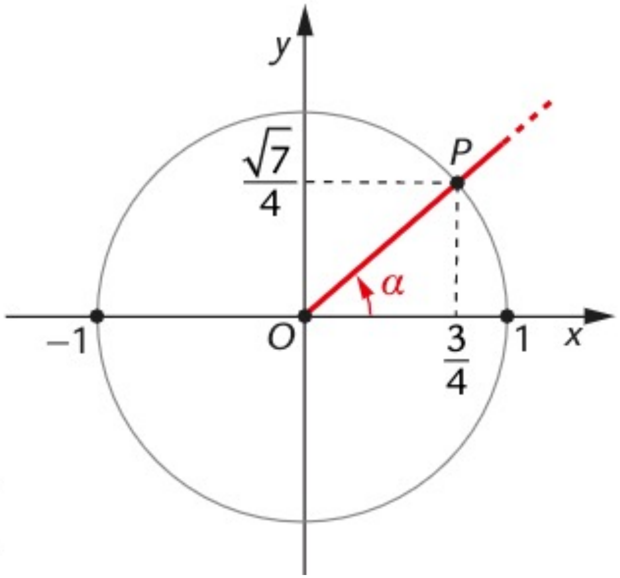
172 $\dfrac{\tan^2\alpha + 1}{\tan^2\alpha - 1}$ $\quad \left[\dfrac{1}{1 - 2\cos^2\alpha}\right]$

173 $\tan^2\alpha$ $\quad \left[\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right]$

174 $\sin^2\alpha - \tan^2\alpha$ $\quad \left[2 - \cos^2\alpha - \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right]$

ESERCIZIO

58 Con l'aiuto della figura completa le uguaglianze.



$\sin\alpha =$ ....

$\cos\alpha =$ ....

$\tan\alpha =$ ....

$$Sin\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$Cos\ \alpha = \frac{3}{4}$$

$$Tan\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

ESERCIZIO

61 Completa la seguente tabella, supponendo che gli angoli siano tutti acuti.

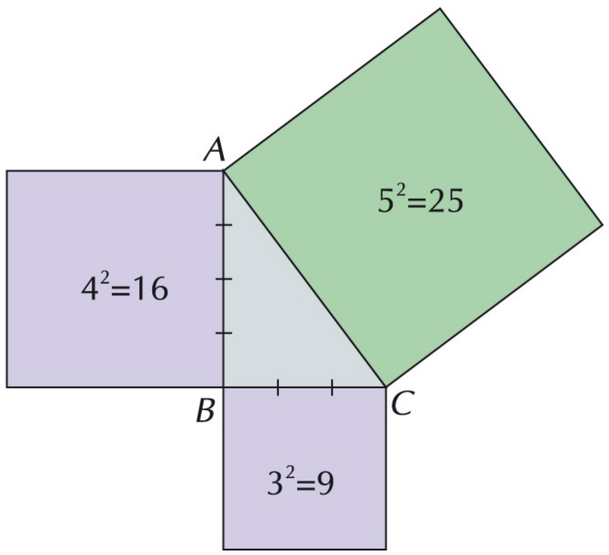
Angolo	Seno	Coseno	Tangente
30°	$^1/_2$	$^{\sqrt{3}}/_2$	$^{\sqrt{3}}/_3$
45°	$^{\sqrt{2}}/_2$	$^{\sqrt{2}}/_2$	1
60°	$^{\sqrt{3}}/_2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Triangolo rettangolo

Mathematica

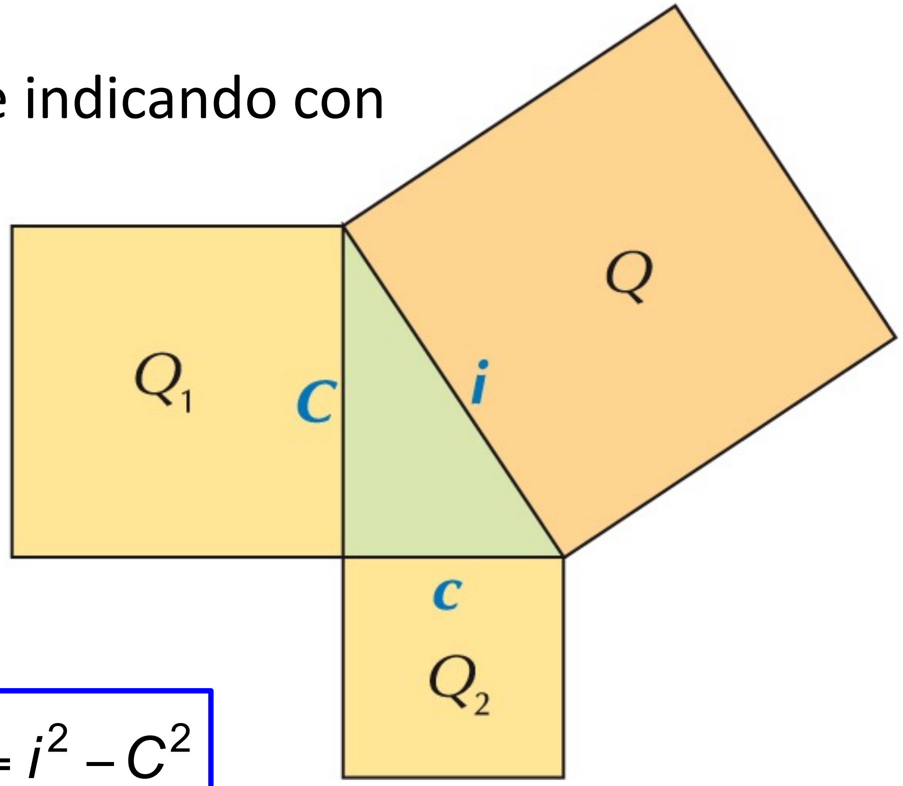
Triangolo rettangolo. (Teorema di Pitagora)

TEOREMA. In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.



L'enunciato del teorema di Pitagora

- Considerando il triangolo rettangolo nella figura a lato e indicando con
- i^2 l' area del quadrato Q costruito sull' ipotenusa
- C^2 l' area del quadrato Q_1 costruito sul cateto maggiore
- c^2 l' area del quadrato Q_2 costruito sul cateto minore



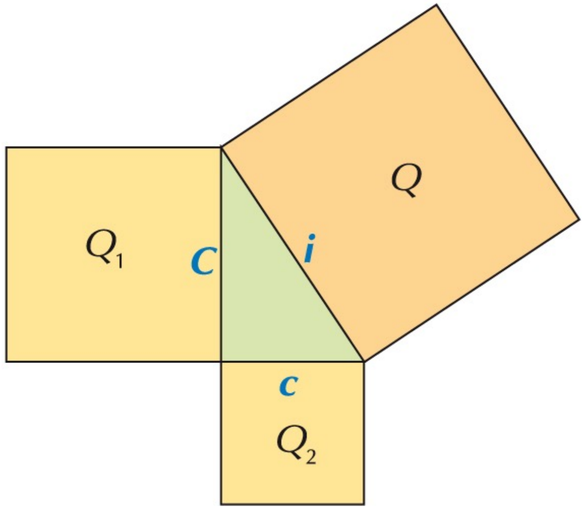
possiamo scrivere

$$\boxed{i^2 = C^2 + c^2} \qquad \boxed{C^2 = i^2 - c^2} \qquad \boxed{c^2 = i^2 - C^2}$$

Da queste formule è possibile, nota la misura dei due lati, calcolare la misura del terzo lato incognito:

$$\boxed{i = \sqrt{C^2 + c^2}} \qquad \boxed{C = \sqrt{i^2 - c^2}} \qquad \boxed{c = \sqrt{i^2 - C^2}}$$

L'enunciato del teorema di Pitagora



- Considerando il triangolo rettangolo nella figura a lato e indicando con

- i^2 l'area del quadrato Q costruito sull'ipotenusa
- C^2 l'area del quadrato Q_1 costruito sul cateto maggiore
- c^2 l'area del quadrato Q_2 costruito sul cateto minore

possiamo scrivere

$$\boxed{i^2 = C^2 + c^2}$$

$$\boxed{C^2 = i^2 - c^2}$$

$$\boxed{c^2 = i^2 - C^2}$$

Da queste formule è possibile, nota la misura dei due lati, calcolare la misura del terzo lato incognito:

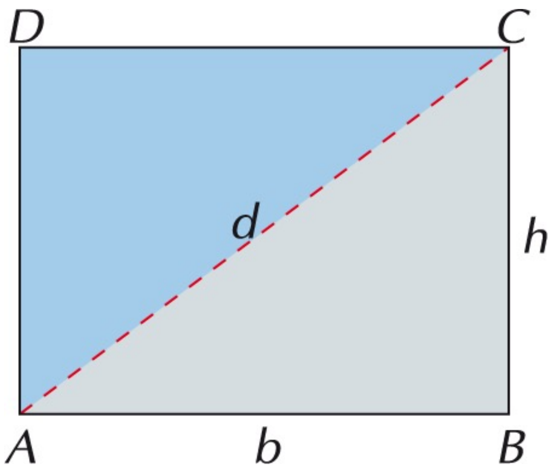
$$\boxed{i = \sqrt{C^2 + c^2}}$$

$$\boxed{C = \sqrt{i^2 - c^2}}$$

$$\boxed{c = \sqrt{i^2 - C^2}}$$

Il teorema di Pitagora nel rettangolo

Considerando il rettangolo *ABCD* ed applicando il teorema di Pitagora agli elementi dei due triangoli rettangoli congruenti *ADC* e *ABC*, otteniamo:



$$\boxed{d = \sqrt{b^2 + h^2}}$$

$$\boxed{b = \sqrt{d^2 - h^2}}$$

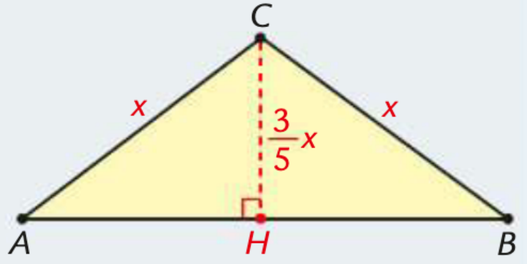
$$\boxed{h = \sqrt{d^2 - b^2}}$$

Mathematica

Esercizi vol. 2 pag 479

39 **ESERCIZIO GUIDATO**

In un triangolo *ABC*, isoscele sulla base *AB*, l'altezza relativa ad *AB* è $\frac{3}{5}$ del lato obliquo. Determina l'area del triangolo, sapendo che il suo perimetro è 36 cm.



- Individua i dati e l'obiettivo.
- Indica con x la misura (in centimetri) del lato obliquo del triangolo; dovrà essere $x > 0$.
- Esprimi in funzione di x le misure di tutti i lati del triangolo e imponi che il perimetro del triangolo misuri 36:

$\overline{AC} = \overline{BC} = x$ Per come è stata scelta l'incognita

$\overline{AB} = 2\overline{HB} = 2\sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{CH}^2} =$ Teorema di Pitagora applicato al triangolo *BHC*

$$= 2\sqrt{x^2 - \frac{9}{25}x^2} = 2\sqrt{\frac{\dots}{25}x^2} = 2 \cdot \frac{\dots}{5}x = \frac{\dots}{5}x$$

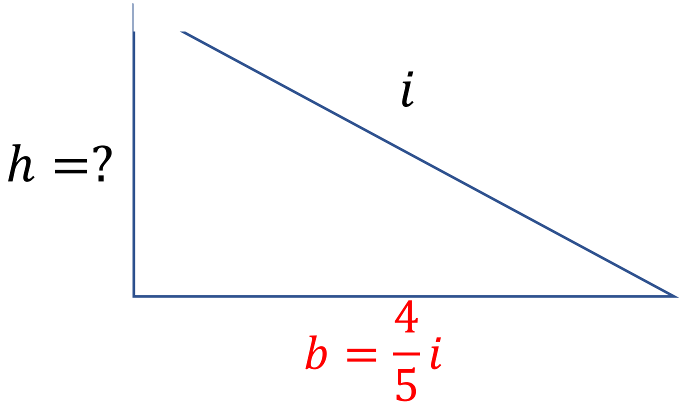
Allora l'equazione che costituisce il modello algebrico del problema è:

$$\underbrace{x}_{\text{Misura di } AC} + \underbrace{\dots}_{\text{Misura di } BC} + \underbrace{\frac{\dots}{5}x}_{\text{Misura di } AB} = \underbrace{36}_{\text{Misura del perimetro di } ABC}$$

- Risolvendo tale equazione ricavi che $x = \dots\dots$
  Tale soluzione è accettabile ai fini del problema, perché è positiva.
- Le lunghezze di *AB* e *CH* sono dunque .... e l'area del triangolo è .... [48 cm^2]

41 In un rettangolo la base è $\frac{4}{5}$ della diagonale. Sapendo che il perimetro del rettangolo è 70 cm, determina l'area.

[300 cm^2]



$$h^2 + b^2 = i^2$$

$$h^2 = i^2 - b^2$$

$$h = \sqrt{i^2 - b^2}$$

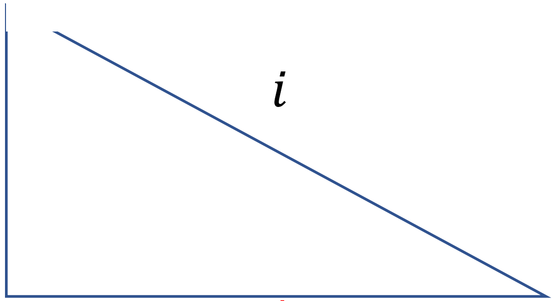
$$h = \sqrt{i^2 - (\frac{4}{5}i)^2}$$

$$h = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) i^2}$$

41 In un rettangolo la base è $\frac{4}{5}$ della diagonale. Sapendo che il perimetro del rettangolo è 70 cm, determina l'area.

[300 cm^2]

$h = ?$



$b = \frac{4}{5} i$

$$h = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) i^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right) i^2} = \frac{3}{5} i$$

$$h = \sqrt{\left(1 - \frac{16}{25}\right) i^2}$$

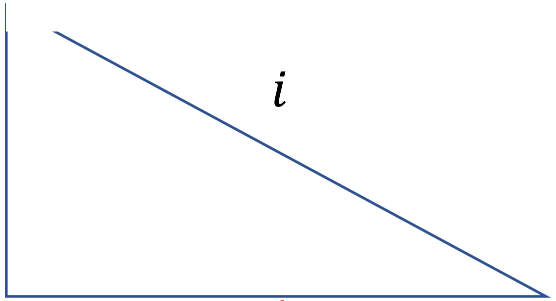
$$h = \frac{3}{5} i$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{25 - 16}{25}\right) i^2}$$

$$2b + 2h = 70$$

41 In un rettangolo la base è $\frac{4}{5}$ della diagonale. Sapendo che il perimetro del rettangolo è 70 cm, determina l'area.

[300 cm^2]



$h = ?$

$b = \frac{4}{5} i$

$$2b + 2h = 70$$

$$i = \frac{350}{14} = 25$$

$$2\,\frac{4}{5} i + 2\,\frac{3}{5} i = 70$$

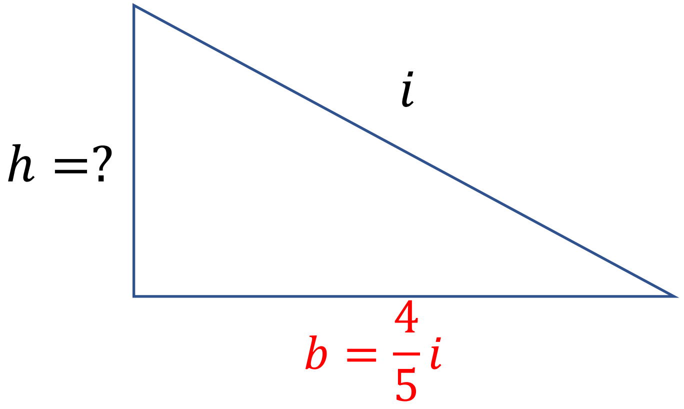
$$\frac{8}{5} i + \frac{6}{5} i = 70$$

$$\left(\frac{8}{5} + \frac{6}{5}\right) i = 70$$

$$(14)i = 350$$

$$A = b \cdot h = \frac{4}{5} i \cdot \frac{3}{5} i = \frac{4}{5} 25 \cdot \frac{3}{5} 25 = 300$$

$$h = \sqrt{\left(1 - \frac{16}{25}\right) i^2}$$



$$h^2 + b^2 = i^2$$

$$h^2 = i^2 - b^2$$

$$h = \sqrt{i^2 - b^2}$$

$$h = \sqrt{i^2 - \left(\frac{4}{5} i\right)^2}$$

$$h = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2\right) i^2}$$

$$h = \sqrt{\left(1 - \frac{16}{25}\right) i^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{25 - 16}{25}\right) i^2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right) i^2} = \frac{3}{5} i$$

$$h = \frac{3}{5} i$$

$$2b + 2h = 70$$

$$2\frac{4}{5} i + 2\frac{3}{5} i = 70$$

$$\frac{8}{5} i + \frac{6}{5} i = 70$$

$$\left(\frac{8}{5} + \frac{6}{5}\right) i = 70$$

$$(14) i = 350$$

$$i = \frac{350}{14} = 25$$

$$A = b \cdot h = \frac{4}{5} i \cdot \frac{3}{5} i = \frac{4}{5} 25 \cdot \frac{3}{5} 25 = 300$$

Mathematica

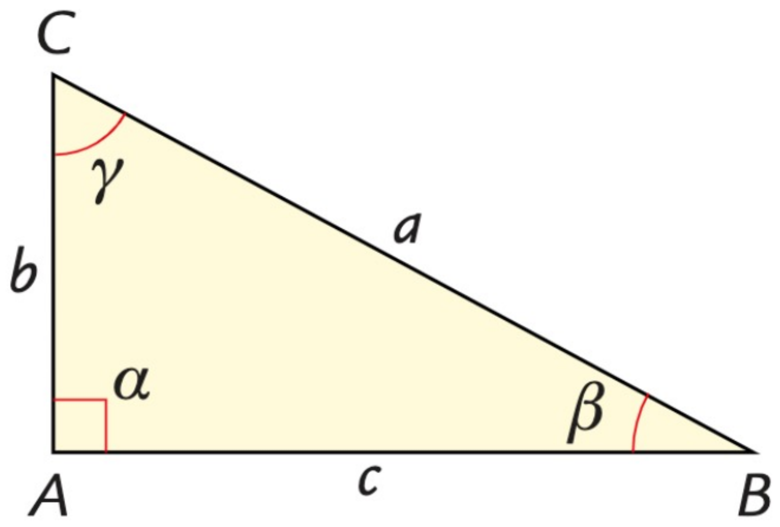
42 In un rettangolo *ABCD* il lato *AB* è lungo 12 cm e la diagonale supera di 6 cm l'altro lato. Determina perimetro e area del rettangolo. [42 cm; 108 cm^2]

Mathematica

Teoremi sui triangoli rettangoli

Teoremi sui triangoli rettangoli

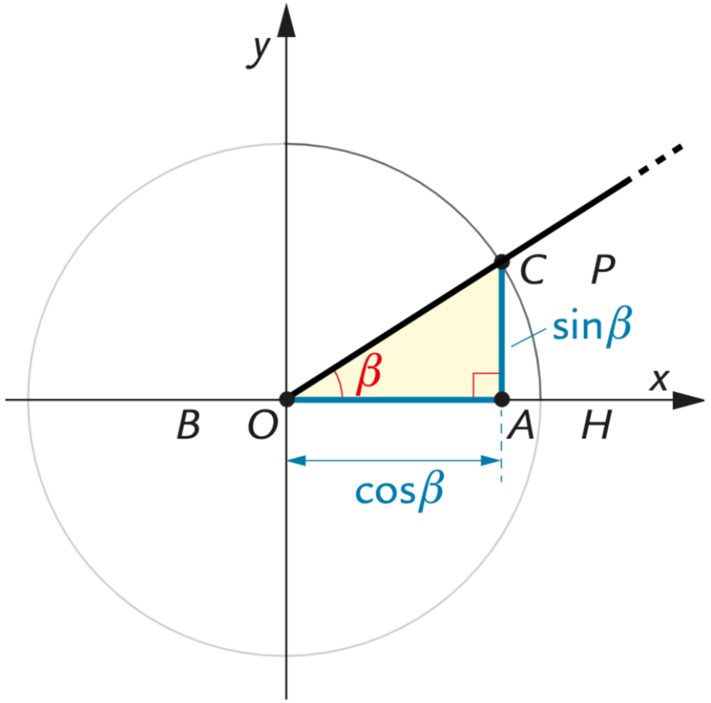
Supponiamo che il triangolo abbia l'angolo retto in A e indichiamo le misure dei lati e degli angoli.

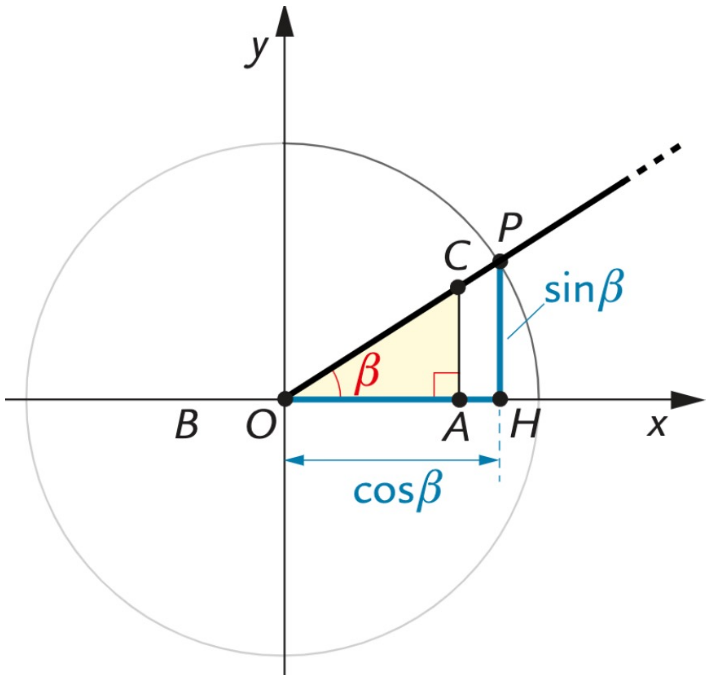


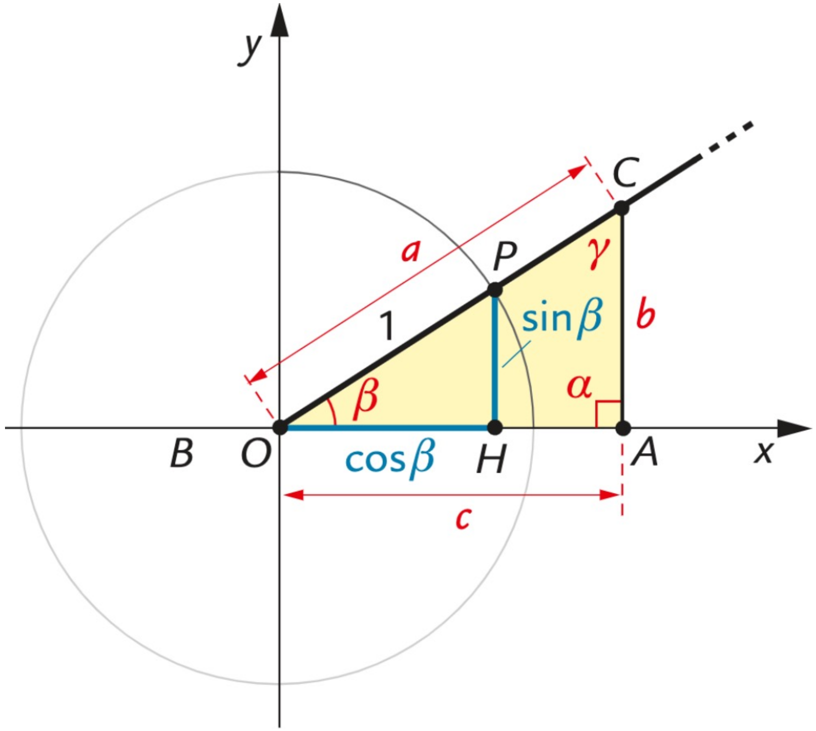
Riferiamo il triangolo a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale ;
indichiamo con P il punto in cui la semiretta OC interseca la circonferenza goniometrica e con H la proiezione di P sull’asse x.

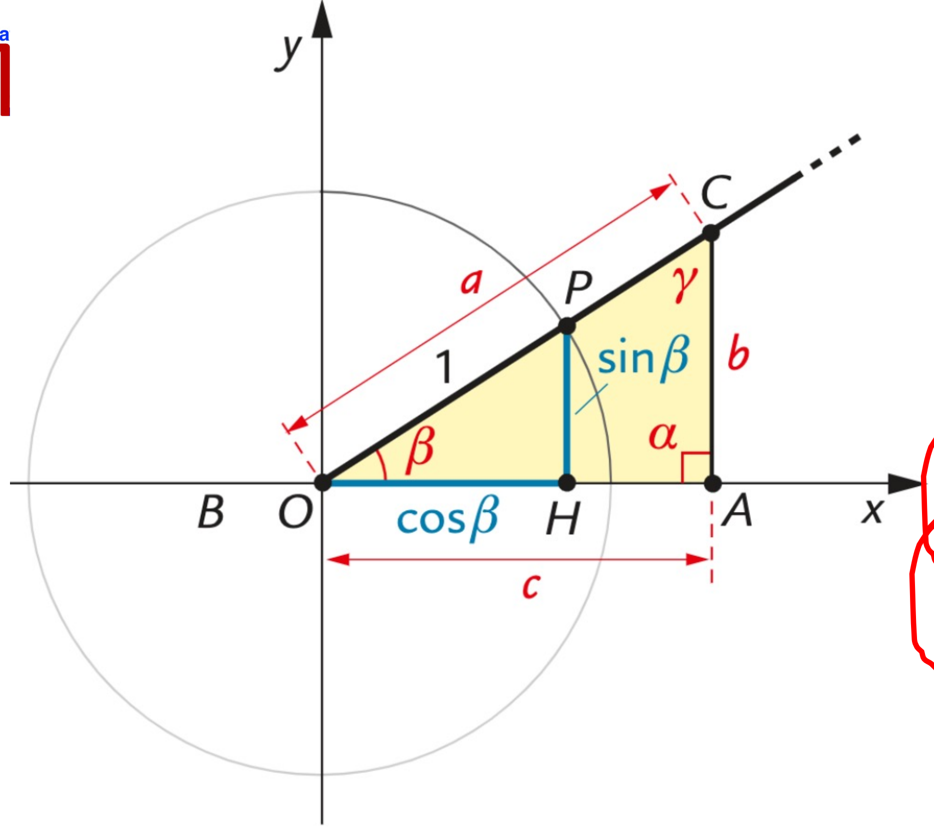
A seconda che la misura dell’ipotenusa del triangolo sia minore, uguale o maggiore di 1

si possono ottenere i tre casi:



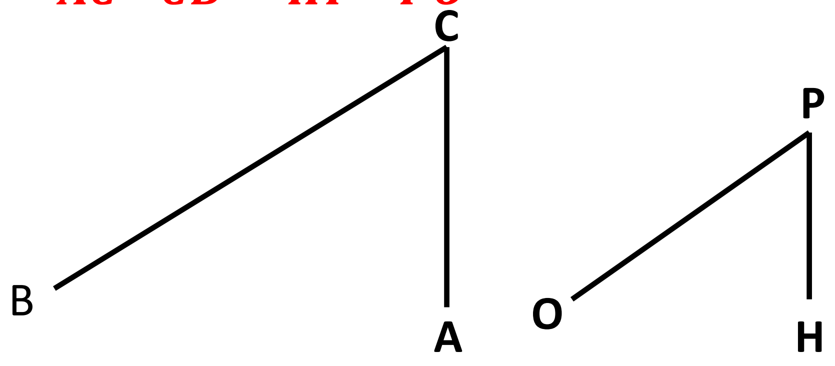






Il triangolo ***ACB*** *è simile* al triangolo ***HPO*** quindi possiamo scrivere la proporzione:

$\boldsymbol{AC : CB = HP : PO}$



$$\boldsymbol{\frac{AC}{CB} = \frac{HP}{PO}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{1}$$

$$\boldsymbol{b = a\sin\beta}$$

$$\boldsymbol{b = a\cos\gamma}$$

$$\boldsymbol{\frac{AC}{CB} = \frac{HP}{PO}}$$

$$\boldsymbol{AC \cdot PO = HP \cdot CB}$$

$$\boldsymbol{AC \cdot 1 = sin\ \beta \cdot CB}$$

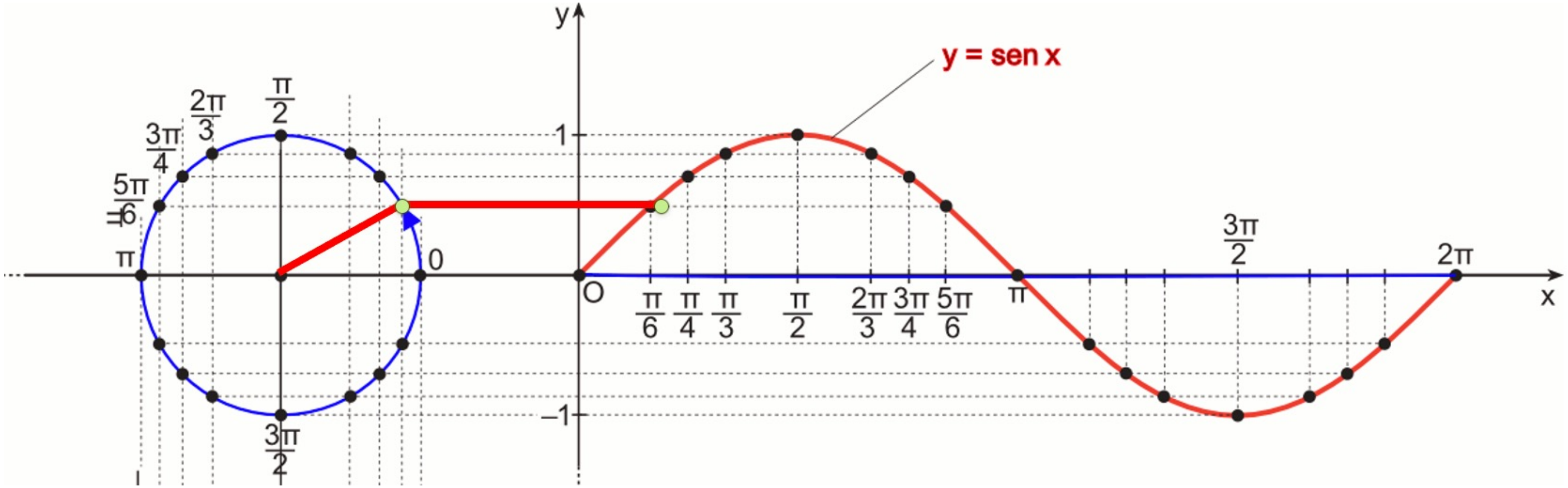
$$\boldsymbol{AC = CB\ sin\ \beta}$$

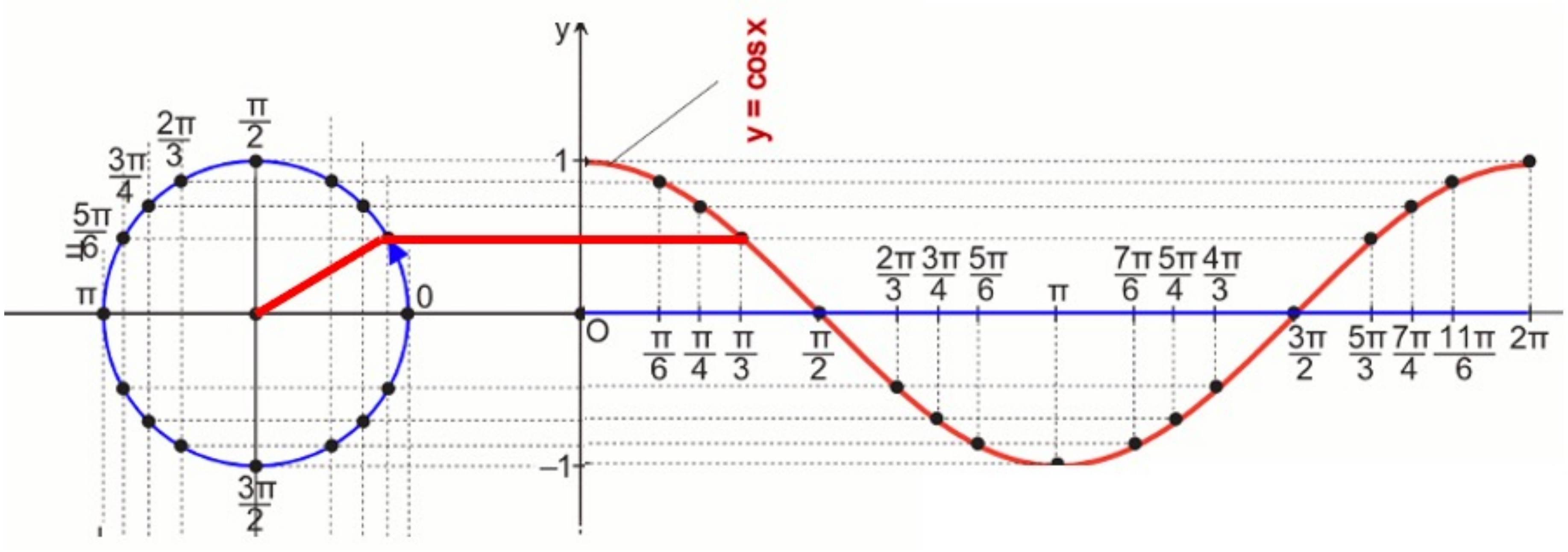
$$\boldsymbol{b = a\ sin\ \beta}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

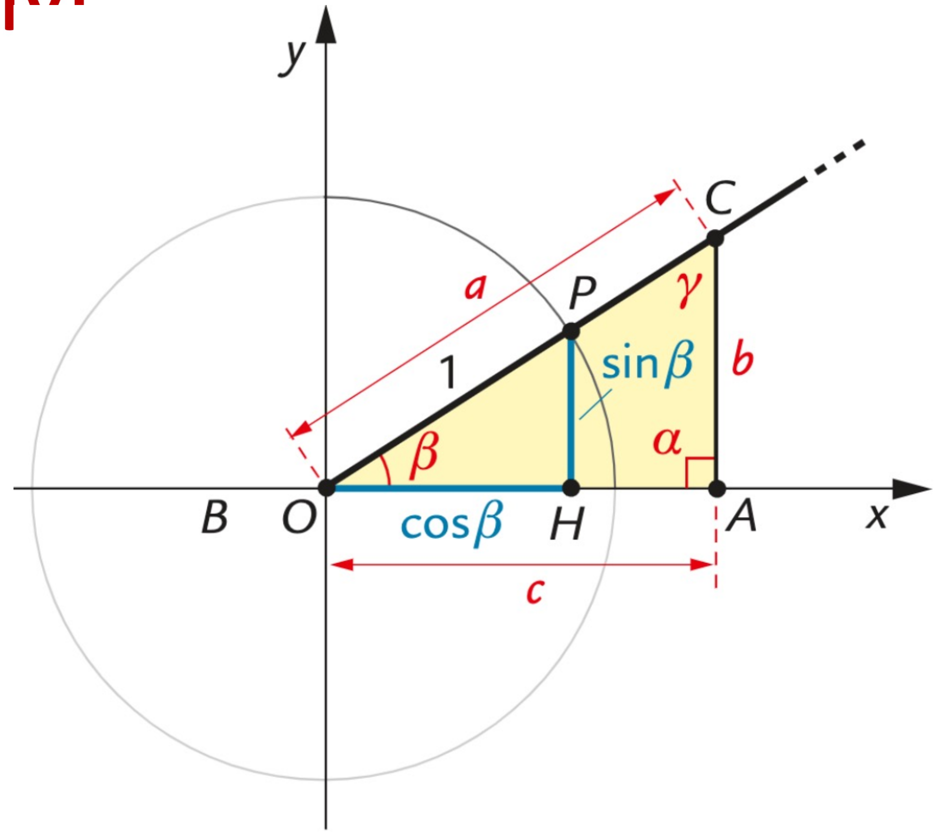
$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\gamma \qquad \sin\beta = \cos\gamma$$

$$\sin 30 = \sin(90 - 60) = \cos 60 \qquad \sin 30 = \cos 60$$


y = sen x
y
x
O
1
–1
π
2π
3π
2


y = cos x
y
O
1
–1
π
2π
3π
2

Mathematica



$$b = a \sin\beta$$

$$b = a \cos\ \gamma$$

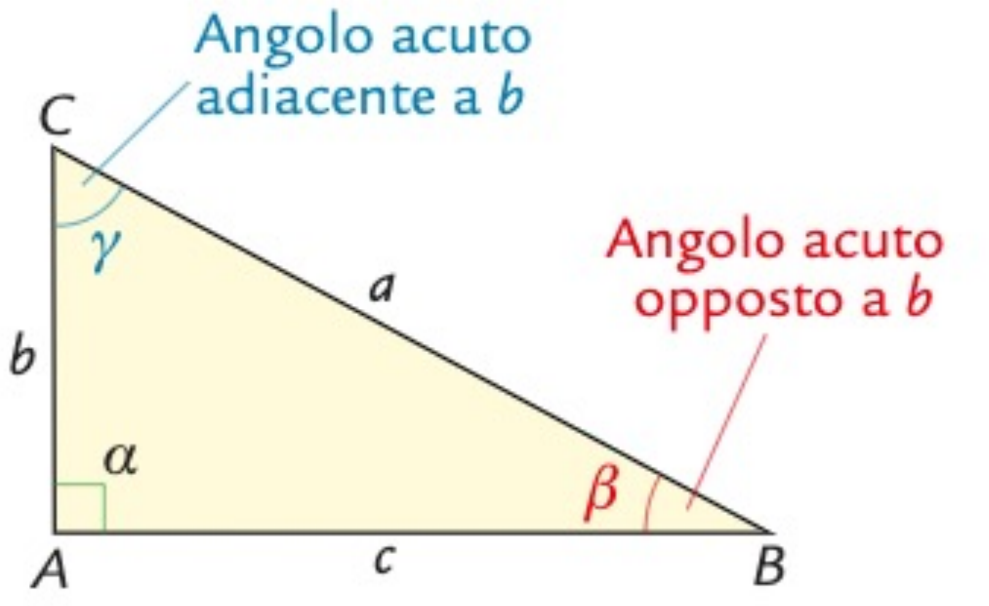
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\gamma$$

$$\sin 30 = \sin(90 - 60) = \cos 60$$

$$\sin 30 = \cos 60$$

$$\sin\beta = \cos\gamma$$

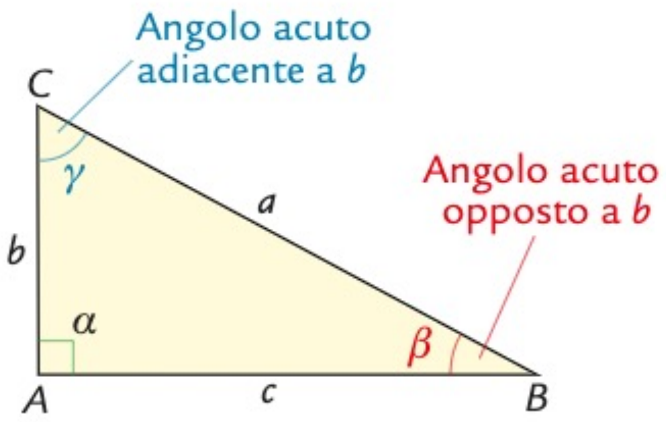


b	$=$	a	$\sin\beta$
cateto		*ipotenusa*	*Sin angolo opposto Al cateto b*

b	$=$	a	$\cos\ \gamma$
cateto		*ipotenusa*	*Sin angolo adiacente al cateto b*

Primo teorema sui triangoli rettangoli

I primo **teorema** dei **triangoli rettangoli** lega ipotenusa, cateti, seno e coseno dell'angolo opposto o adiacente al cateto.



In un triangolo rettangolo:

- La misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata il seno dell'angolo opposto al cateto (coseno angolo adiacente).

$$b = a \sin \beta$$ seno dell'angolo opposto al cateto

$$(b = a \cos \gamma)$$ coseno angolo adiacente

- La misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata il coseno dell'angolo adiacente al cateto (seno angolo opposto).

$$c = a \cos \beta$$ coseno angolo adiacente al cateto

$$(c = a \sin \gamma)$$ seno angolo opposto

Dividendo membro a membro:

$$\frac{b}{c} = \frac{a \sin \beta}{a \cos \beta} = tan\ \beta$$

$$b = c \cdot \ tan\ \beta$$

Mathematica

Mathematica