Mathematica

I Radicali 2

esponente del radicando

$$\sqrt[n]{a^{c}} = a^{\frac{c}{n}}$$

radicando

indice della radice

Prof. Domenico Lo Iacono

Mathematica ML

5. Prodotto e rapporto tra radicali

6. Trasporto di un fattore DENTRO il segno di radice

7. Trasporto di un fattore FUORI del segno di radice

8. Potenze e radici di un radicale

- Regola dell’elevamento a potenza di un radicale
- Regola dell’estrazione di radice da un radicale

9. Somma e differenza di radicali

10. Espressioni irrazionali

11. Espressioni algebriche

12 Razionalizzazione

5. Prodotto e rapporto tra radicali

Regola del prodotto

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^p}$$

Regola del rapporto

$$\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^p} = \sqrt[n]{a^m : b^p}$$

o anche

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^p}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^p}}$$

5. Prodotto e rapporto tra radicali

- Se non hanno lo stesso indice,

1) Ridurre i radicali allo stesso indice.

2) Portare tutto il segno di radice.

3) Si moltiplicano o si dividono i radicandi

- N.B. Al termine dell'operazione, è utile semplificare il radicale, se possibile.

Esempio:

1. Si riducono allo stesso indice
2. Si applica la regola del prodotto o del rapporto.
3. Si applicano le proprietà delle potenze

$$1)\quad \sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}=\quad\sqrt[12]{x^6}\cdot\sqrt[12]{x^4}\cdot\sqrt[12]{x^3}=\quad\sqrt[12]{x^{13}}$$

$$2)\quad \sqrt[10]{8x^3y^2}\cdot\sqrt[5]{\frac{2x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}=\sqrt[10]{8x^3y^2}\cdot\sqrt[10]{\frac{4x^2}{y^2}}\cdot\sqrt[10]{\frac{1}{x^5}}=$$

$$=\sqrt[10]{\frac{32\cancel{x^5}\cancel{y^2}}{\cancel{x^5}\cancel{y^2}}}=\sqrt[10]{32}=\quad\sqrt[10]{2^5}=\quad\sqrt{2}$$

Esercizi

Esegui le seguenti moltiplicazioni; supponi che tutti i fattori letterali dei radicandi siano positivi.

212 $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$ $[6]$

213 $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}$ $[\sqrt{30}]$

214 $\sqrt{\frac{1}{50}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

215 $\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{0,4}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

216 $\sqrt{\frac{10}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$ $[\sqrt{5}]$

217 $\sqrt{2\cdot 10^{-2}}\cdot\sqrt{2^3\cdot 10^{-2}}$ $\left[\frac{1}{25}\right]$

218 $\sqrt{2-\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2}}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

219 $\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{9}$ $[3]$

220 $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{25}{8}}$ $\left[\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right]$

221 $\sqrt[3]{2-\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{2}}$ $\left[\frac{\sqrt[3]{35}}{2}\right]$

222 $\sqrt[3]{\frac{7}{4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{21}}\cdot\sqrt[3]{6}$ $[1]$

223 $\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}$ $\left[\frac{4}{15}\right]$

224 $\sqrt{a^2b^3}\cdot\sqrt{a^6b^5}$ $[a^4b^4]$

225 $\sqrt{a^3b^5}\cdot\sqrt{ab^3}$ $[a^2b^4]$

226 $\sqrt[3]{a^5b^2}\cdot\sqrt[3]{ab^7}$ $[a^2b^3]$

227 $\sqrt[3]{a^4b^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b^5}$ $[a^2b^4]$

Esegui le seguenti divisioni; supponi che tutti i fattori letterali dei radicandi siano positivi.

228 $\sqrt{50} : \sqrt{2}$ $[5]$

229 $\sqrt{\dfrac{1}{200}} : \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ $\left[\dfrac{1}{10}\right]$

230 $\sqrt{\dfrac{3}{40}} : \sqrt{\dfrac{27}{10}}$ $\left[\dfrac{1}{6}\right]$

231 $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}} : \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

232 $\sqrt[4]{12} : \sqrt[4]{3}$ $[\sqrt{2}]$

233 $\sqrt[3]{\dfrac{1}{10}} : \sqrt[3]{100}$ $\left[\dfrac{1}{10}\right]$

234 $\sqrt[3]{3 \cdot 10^{-1}} : \sqrt[3]{9 \cdot 10^{-2}}$ $\left[\sqrt[3]{\dfrac{10}{3}}\right]$

235 $\sqrt{a^7 b^7} : \sqrt{a^3 b}$ $[a^2 b^3]$

236 $\sqrt[3]{a^{12} b^8} : \sqrt[3]{a^3 b^2}$ $[a^3 b^2]$

237 $\sqrt{a^9 b^3} : \sqrt{a^5 b}$ $[a^2 b]$

238 $\sqrt[3]{a^2 b^3} : \sqrt[3]{ab}$ $[\sqrt[3]{ab^2}]$

239 $\sqrt{2a^{11} b^5} : \sqrt{\dfrac{1}{2} ab^3}$ $[2a^5 b]$

Esercizi

Semplifica le seguenti espressioni. Supponi che tutti i fattori letterali dei radicandi siano positivi.

243 $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ $[\sqrt[6]{32}]$

244 $\sqrt{2} : \sqrt[4]{2}$ $[\sqrt[4]{2}]$

245 $(\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2}) : \sqrt[3]{2}$ $[\sqrt[12]{2^5}]$

246 $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3}$ $[\sqrt[4]{18}]$

247 $\sqrt[3]{2} : \sqrt[4]{2}$ $[\sqrt[12]{2}]$

248 $\sqrt{\frac{10}{3}} : \sqrt[3]{\frac{5}{9}}$ $[\sqrt[6]{120}]$

249 $\sqrt{\frac{7}{10}} : \sqrt[3]{\frac{14}{5}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{7}{160}}\right]$

259 $\sqrt[4]{2 - \frac{2}{3}} : \sqrt[6]{1 - \frac{5}{9}}$ $[\sqrt[12]{12}]$

260 $\sqrt[6]{\frac{7}{5}} \cdot \sqrt[9]{\frac{25}{49}}$ $\left[\sqrt[18]{\frac{5}{7}}\right]$

261 $\sqrt[6]{\frac{16}{27}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$ $[\sqrt[6]{2}]$

262 $\sqrt{1 - \frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{1}{12}}\right]$

263 $\sqrt[6]{1 - \frac{2}{5}} : \sqrt[4]{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$ $\left[\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right]$

264 $\sqrt{3 - \frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{25}}$ $\left[\sqrt[6]{\frac{8}{5}}\right]$

6. Trasporto di un fattore **DENTRO** il segno di radice

Regola: dati a, b ≥ 0 si ha $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

$$5 \cdot \sqrt[2]{6} = \sqrt[2]{5^2} \cdot \sqrt[2]{6} = \sqrt[2]{5^2 \cdot 6} = \sqrt[2]{25 \cdot 6} = \sqrt[2]{150}$$

Vale a dire: un fattore a ≥ 0, moltiplicato per un radicale, può essere trasportato sotto il segno di radice purché lo si elevi all'indice del radicale

- $2\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 16} = \sqrt[3]{2^3 2^4} = \sqrt[3]{2^7}$

- $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 16} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot 16} = \sqrt[3]{2}$

E se non siamo sicuri del segno non negativo del fattore esterno, come si procede?

Evidentemente discutendo i casi: vediamo degli esempi

In caso di fattore esterno con segno negativo:

$$-2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} = \sqrt{(-2)^2}\,\sqrt{2} = \sqrt{(-2)^2 \cdot 2} = \sqrt{8}$$ **ERRATO.**

Si è portato sotto il segno di radice soltanto il numero 2

$$-2\sqrt{2} = -\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{4 \cdot 2} = -\sqrt{8}$$

Il segno meno è stato lasciato fuori dalla radice

Trasportiamo il fattore esterno sotto il segno di radice:

a. $-3\sqrt{2}$ **b.** $-2\sqrt[3]{3}$ **c.** $x\sqrt{y}$, con $y \geq 0$

a. $-3\sqrt{2} = -\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{3^2 \cdot 2} = -\sqrt{18}$

b. $-2\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{24}$

c $x\sqrt{y}$ $y \geq 0$ *perchè radicando dentro il radicale*

$$x\,? \begin{cases} x \geq 0 & \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x^2 y} \\ x < 0 & -\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} = -\sqrt{x^2 y} \end{cases}$$

1)$(x-3)\sqrt{(x-2)}$ $x-2>0$ *perchè è gia radicando del radicale*

Vediamo il segno di $x-3$

- $x-3 \geq 0.$ si ha $\sqrt{(x-3)^2} \cdot \sqrt{(x-2)} = \sqrt{(x-3)^2(x-2)}$
- $x-3 < 0.$ si ha $-\sqrt{(x-3)^2} \cdot \sqrt{(x-2)} = -\sqrt{(x-3)^2(x-2)}$

da notare il segno negativo fuori dal segno di radicale

3)

$\boldsymbol{3x^2y\sqrt{xy^2}}$

- $\boldsymbol{x} > 0$ *perchè sotto il segno di radice*
- *vediamo il segno per* $\boldsymbol{y}$

$\boldsymbol{y \geq 0}$. $$3x^2y\sqrt{xy^2} = \sqrt{3^2(x^2)^2 \cdot}\sqrt{xy^2} = \sqrt{9x^4 \cdot}\sqrt{xy^2} = \sqrt{9x^5y^4}$$

$\boldsymbol{y < 0}$. $$3x^2y\sqrt{xy^2} = \sqrt{3^2(x^2)^2 \cdot}\left(-\sqrt{y^2}\right) \cdot \sqrt{xy^2} = -\sqrt{9x^4y^2 \cdot}\sqrt{xy^2} = -\sqrt{9x^5y^4}$$

Esercizi

Trasporta sotto al segno di radice i fattori esterni.

288 $2\sqrt{2}$; $\quad -3\sqrt{3}$ $\quad [\sqrt{8}; -\sqrt{27}]$

289 $3\sqrt{2}$; $\quad -2\sqrt{3}$ $\quad [\sqrt{18}; -\sqrt{12}]$

290 $\frac{1}{2}\sqrt{8}$; $\quad -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\quad \left[\sqrt{2}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$

291 $\frac{3}{5}\sqrt{15}$; $\quad -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ $\quad \left[\sqrt{\frac{27}{5}}; -\sqrt{\frac{4}{3}}\right]$

292 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\sqrt{6}$ $\quad \left[\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{1}{6}}\right]$

293 $0,1\sqrt{10}$; $\quad 10\sqrt{0,01}$ $\quad \left[\sqrt{\frac{1}{10}}; 1\right]$

294 $100\sqrt{0,001}$; $\quad -10\sqrt{0,01}$ $\quad [\sqrt{10}; -1]$

295 $2\sqrt[3]{2}$; $\quad -2\sqrt[4]{2}$ $\quad [\sqrt[3]{16}; -\sqrt[4]{32}]$

296 $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$; $\quad -3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ $\quad \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; -\sqrt[3]{18}\right]$

297 $\left(\frac{1}{2}-1\right)\sqrt[3]{4}$; $\quad \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{10}$ $\quad \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}; -\sqrt[3]{\frac{1}{100}}\right]$

298 $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$; $\quad -2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $\quad \left[\sqrt[3]{\frac{1}{9}}; -\sqrt[3]{4}\right]$

Esercizi

Trasporta sotto al segno di radice i fattori esterni. Supponi che tutti i fattori esterni letterali siano non negativi.

304	$x\sqrt{x}$;	$x^2y\sqrt{x^4y}$	$\left[\sqrt{x^3};\ \sqrt{x^8y^3}\right]$
305	$a\sqrt{a^3}$;	$ab^3\sqrt{b}$	$\left[\sqrt{a^5};\ \sqrt{a^2b^7}\right]$
306	$x\sqrt[3]{x}$;	$a^2b\sqrt[3]{a}$	$\left[\sqrt[3]{x^4};\ \sqrt[3]{a^7b^3}\right]$
307	$a^2\sqrt[4]{a}$;	$x^3y\sqrt[4]{y}$	$\left[\sqrt[4]{a^9};\ \sqrt[4]{x^{12}y^5}\right]$
308	$ab\sqrt[3]{a^2b^3}$;	$x\sqrt[4]{xy^2}$	$\left[\sqrt[3]{a^5b^6};\ \sqrt[4]{x^5y^2}\right]$
309	$a^2\sqrt{a^3+1}$		$\left[\sqrt{a^7+a^4}\right]$
310	$x^5\sqrt[3]{x+1}$		$\left[\sqrt{x^{16}+x^{15}}\right]$

7. Trasporto di un fattore **FUORI** del segno di radice

Ricordiamo:

Dati $m, n \in N_0$, con $m > n$, detti q e r il quoziente e il resto della divisione di m per n, si ha $m = nq + r$

Prodotto di potenze con la stessa base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Vale a dire:

- si possono trasportare solo fattori con esponenti ≥ dell'indice
- si divide l'esponente per l'indice, il quoziente diventa esponente del fattore fuori dal segno di radice e il resto diventa esponente del fattore sotto il segno di radice

7. Trasporto di un fattore **fuori** del segno di radice

Regola:

$Dati\ a, b \geq 0; \quad n > 0;$

$si\ ha$

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

7. Trasporto di un fattore **fuori** del segno di radice

Regola:

$Dati\ a, b \geq 0; \quad n = 2.\ ed\ m > n$

$si\ ha$

$$\sqrt[2]{a^4 b} = \sqrt[2]{a^4} \cdot \sqrt[2]{b} = a^{\frac{4}{2}} \cdot \sqrt[2]{b} = a^2 \cdot \sqrt[2]{b}$$

Vale a dire:

- si possono trasportare solo fattori con esponenti ≥ dell’indice
- si divide l’esponente per l’indice,

Esempio

$$\sqrt{9x^4y} = \sqrt{3^2x^4y} = \sqrt{3^2x^4} \cdot \sqrt{y} = 3x^2\sqrt{y}$$

(infatti solo i fattori 3 e x hanno esponente ≥2

$$\sqrt[3]{8a^7b^2} = \sqrt[3]{2^3a^7b^2} = \sqrt[3]{2^3a^6a\,b^2} = \sqrt[3]{2^3a^6} \cdot \sqrt[3]{a\,b^2} = \sqrt[3]{2^3a^{2\cdot 3}} \cdot \sqrt[3]{a\,b^2} = 2a^2\sqrt[3]{a\,b^2}$$

$\sqrt{a^3b - 2a^2b^2 + ab^2)}$

Scomponiamo il radicando in fattori primi

$$\sqrt{ab(a^2 - 2ab + b)} = \sqrt{ab(a-b)^2} =$$

$Se\ \ a - b \geq 0$ si ha: $(a-b)\sqrt{ab}$

$Se\ \ a - b < 0$ si ha: $-(a-b)\sqrt{ab}$

Trasporto fuori dal segno di radice

322 **ESERCIZIO GUIDATO**

Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili:

a. $\sqrt{32}$ **b.** $\sqrt[3]{3000}$

a. $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = \ldots\sqrt{2}$

b. $\sqrt[3]{3000} = \sqrt[3]{1000 \cdot 3} = \sqrt[3]{\ldots\ldots} \cdot \sqrt[3]{3} = \ldots\sqrt[3]{3}$

323 $\sqrt{12}$; $\sqrt{50}$ $[2\sqrt{3};\ 5\sqrt{2}]$

324 $\sqrt{27}$; $\sqrt{18}$ $[3\sqrt{3};\ 3\sqrt{2}]$

325 $\sqrt{200}$; $\sqrt{63}$ $[10\sqrt{2};\ 3\sqrt{7}]$

326 $\sqrt{\dfrac{36}{27}}$; $\sqrt{\dfrac{125}{16}}$ $\left[2\sqrt{\dfrac{1}{3}};\ \dfrac{5}{4}\sqrt{5}\right]$

327 $\sqrt{\dfrac{75}{16}}$; $\sqrt{\dfrac{242}{25}}$ $\left[\dfrac{5}{4}\sqrt{3};\ \dfrac{11}{5}\sqrt{2}\right]$

328 $\sqrt{2^7 \cdot 3^2}$; $\sqrt{2^5 \cdot 3^4}$ $[24\sqrt{2};\ 36\sqrt{2}]$

329 $\sqrt{2^3 \cdot 3^5}$; $\sqrt{5^2 \cdot 7^3}$ $[18\sqrt{6};\ 35\sqrt{7}]$

330 Videolezione $\sqrt{2^4 \cdot 3^6 - 2^6 \cdot 3^4}$ $[36\sqrt{5}]$

331 $\sqrt{2^8 \cdot 5^5 - 2^{14} \cdot 5^2}$ $[80\sqrt{61}]$

331 $\sqrt{2^8 \cdot 5^5 - 2^{14} \cdot 5^2}$ $[80\sqrt{61}]$

332 $\sqrt{15^2 - 45}$; $\sqrt{15^2 + 350}$ $[6\sqrt{5}, 5\sqrt{23}]$

333 $\sqrt{24^2 - 192}$; $\sqrt{21^2 + 810}$ $[8\sqrt{6}, 3\sqrt{139}]$

334 $\sqrt{2^{10} + 2^{11}}$; $\sqrt{3^7 + 3^9}$ $[32\sqrt{3}, 27\sqrt{30}]$

335 $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt[4]{32}$ $[2\sqrt[3]{3};\ 2\sqrt[4]{2}]$

336 $\sqrt[3]{3000}$; $\sqrt[4]{810}$ $[10\sqrt[3]{3}; 3\sqrt[4]{10}]$

337 $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$; $\sqrt[4]{\frac{32}{81}}$ $\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{3};\ \frac{2}{3}\sqrt[4]{2}\right]$

8. Potenze e radici di un radicale

- Regola dell'elevamento a potenza di un radicale

(Ferme restando le condizioni di radicale aritmetico)

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$$

Dalla prima regola si deduce che per elevare a potenza *p* un radicale basta elevare a potenza il suo radicando, vale a dire moltiplicare per *p* l'esponente di ciascun fattore del radicando.

- Regola dell'estrazione di radice da un radicale

(Ferme restando le condizioni di radicale aritmetico)

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[pn]{a^m}$$

Dalla seconda regola si deduce che per estrarre la radice di indice *p* di un radicale di indice *n*, basta porre un unico segno di radice con nuovo indice dato dal prodotto degli indici, rimanendo uguale il radicando.

Esercizi   Regola dell’estrazione di radice da un radicale

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}=$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}}= \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} =$$

Porto il 2 dentro il radicale

Applico la regola di radice di un radicale

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[pn]{a^m}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[2\cdot 3]{2^3}= \sqrt{2}$$

Scrivi sotto forma di un'unica radice e, se possibile, semplifica.

312 $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ $[\sqrt{2}]$

313 $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ $[\sqrt[3]{4}]$

314 $\sqrt{3\sqrt{3}}$ $[\sqrt[4]{3^3}]$

315 $\sqrt{\sqrt{a^2\sqrt{a}}}$, con $a \geq 0$ $[\sqrt[8]{a^5}]$

316 $\sqrt{a\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}}$, con $a \geq 0$ $[\sqrt[3]{a^2}]$

317 $\sqrt[3]{a\sqrt{\sqrt{a}}}$, con $a \geq 0$ $[\sqrt[12]{a^5}]$

318 $\sqrt[3]{a\sqrt{\frac{1}{a}}}$ con $a > 0$ $[\sqrt[6]{a}]$

319 $\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{2}}}$ $[\sqrt[4]{2}]$

320 $\sqrt[3]{3\sqrt{\frac{2}{3}}}$ $[\sqrt[6]{6}]$

321 $\sqrt{x^2\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}$ con $x > 0$ $[\sqrt[6]{x^5}]$

9. Somma e differenza algebrica di radicali

$$\sqrt[2]{9} + \sqrt[2]{16} \neq \sqrt[2]{9+16}$$

Infatti:

$$3 \quad + \quad 4 \quad \neq \quad 5$$

$$\sqrt[2]{25} - \sqrt[2]{9} \neq \sqrt[2]{25-9}$$

Infatti:

$$5 \quad - \quad 3 \quad \neq \quad 4$$

Quindi

Per le somme e le differenze di radicali

non valgono

proprietà analoghe a quelle relative al prodotto e al quoziente;

9. Somma e differenza algebrica di radicali

Con stesso indice e stesso radicando

Regola: Si possono sommare algebricamente solo i radicali simili,

Naturalmente i radicali simili possono differire per il coefficiente che li precede.

indice

$$3\sqrt[3]{8}$$

radicando

Coefficiente

$$3\sqrt[3]{12} \qquad 5\sqrt[3]{12}$$

$$3\sqrt[3]{12}+5\sqrt[3]{12}=(3+5)\sqrt[3]{12}$$

$$3\sqrt[3]{12}-5\sqrt[3]{12}=(3-5)\sqrt[3]{12}$$

Posso sommare o sottrarre

9. Somma e differenza algebrica di radicali

Regola:

I radicali simili si sommano o sottraddono, sommando o sottraendo algebricamente i loro coefficienti.

Se tali coefficienti sono letterali, si mette in evidenza il radicale simile che è comune.

$Es1.:$ $3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{5} = \left(3 - 4 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$

9. Somma e differenza algebrica di radicali

$Es2.:$

$$\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{27}+\sqrt{8}+\sqrt[4]{2^2} \quad =$$

$$=\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{3\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 2^2}-\sqrt[4]{2^2}=$$

$$=\ 2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}\ =$$

$$=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}=$$

$$=\ (2+3)\sqrt{3}+(3+2-2)\sqrt{2}=5\sqrt{3}+4\sqrt{2}$$

$Es3.:$

$$\sqrt{16x}-\sqrt{4x}-\sqrt{x}=$$

$$=\ \sqrt{4^2\cdot x}-\sqrt{2^2\cdot x}-\sqrt{x}=$$

$$= 4\sqrt{x}-2\sqrt{x}-\sqrt{x}=\sqrt{x}$$

11. Espressioni algebriche

Le operazioni tra radicali godono delle stesse proprietà valide in R,

pertanto, si possono utilizzare tutte le ordinarie : proprietà distributiva,

prodotti notevoli ecc

$Es1.:$ $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 =$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2 =$$

$$= 2 - 2\sqrt{2 \cdot 3} + 3 =$$

$$= 2 + 3 - 2\sqrt{6} =$$

$$= 5 - 2\sqrt{6}$$

$Es2:$

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2\cdot 5}-\sqrt{2\cdot 5}-2\sqrt{5\cdot 5}=$$

$$=2+2\sqrt{10}-2\sqrt{25}=$$

$$=2+2\sqrt{10}-2\cdot 5=$$

$$=2+2\sqrt{10}-10=$$

$$=\ 2\sqrt{10}-8$$

Vero Falso

a. i due radicali $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2}$ sono simili V ~~F~~

b. $\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{45}$ ~~V~~ F

c. $\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{8}$ V ~~F~~

d. $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{125}$ ~~V~~ F

Semplifica le seguenti espressioni.

358 $5\sqrt{45} - 3\sqrt{20}$ $[9\sqrt{5}]$

359 $2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + \sqrt{2}$ $[-3\sqrt{3}]$

360 $\sqrt{8} + \sqrt{2} + \sqrt{27} + \sqrt{12}$ $[3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}]$

361 $\sqrt{8} + \sqrt{28} + 2\sqrt{7} - \sqrt{2}$ $[\sqrt{2} + 4\sqrt{7}]$

362 $\sqrt{18} + \sqrt{2} + \sqrt{20} + \sqrt{45}$ $[4\sqrt{2} + 5\sqrt{5}]$

363 $2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$ $[7\sqrt[3]{2}]$

364 $\sqrt[4]{4} + \sqrt{8} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{24}$ $[3\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3}]$

Semplifica le seguenti espressioni, supponendo che tutte le variabili rappresentino numeri non negativi.

375 $\sqrt{45x} - \sqrt{5x}$ $[2\sqrt{5x}]$

376 $\sqrt{4x} + \sqrt{9x} - \sqrt[4]{x^2}$ $[4\sqrt{x}]$

377 $a\sqrt{18} + \sqrt{8a^2} + \sqrt{32a^2}$ $[9a\sqrt{2}]$

378 $\sqrt{\frac{a}{4}} + \frac{1}{2}\sqrt{25a} - \sqrt[6]{a^3}$ $[2\sqrt{a}]$

379 $\sqrt{9x} + \sqrt{4x^3} - \sqrt{4x} - 4\sqrt{x^3}$ $[\sqrt{x}(1 - 2x)]$

380 $a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + \sqrt{4a^2b} - a\sqrt{9b} + \sqrt{16ab^2}$ $[5b\sqrt{a}]$

381 $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{27a}$ $[4\sqrt[3]{a}]$

Semplifica le seguenti espressioni; supponi che tutte le variabili rappresentino numeri positivi.

390 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ $\quad$ $(\sqrt{5}+\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{6})$

391 $(2-\sqrt{2})^2$ $\quad$ $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2})$

392 $(1+\sqrt{x})^2$ $\quad$ $(2\sqrt{x}-3)(2\sqrt{x}+3)$ $\quad$ [1

393 $(2-\sqrt{x})^2$ $\quad$ $(5+\sqrt[4]{x})(5-\sqrt[4]{x})$ $\quad$ [4 +

394 $(1+\sqrt[3]{2})^3$ $\quad$ $(\sqrt{2b}-3\sqrt{a})(\sqrt{2b}+3\sqrt{a})$ $\quad$ [3 + 3

395 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$ $\quad$ $(\sqrt{a}+\sqrt{4a}-1)^2$ $\quad$ [$9\sqrt{3}+1$

396 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

397 $(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$

398 $(\sqrt{18}+\sqrt{50})\ :\ \sqrt{2}+(\sqrt{5}+1)^2+(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$

$Es3.:$

$\sqrt{16x}-\sqrt{4x}-\sqrt{x}=\quad \sqrt{4^2\cdot x}-\sqrt{2^2\cdot x}-\sqrt{x}=\quad 4\sqrt{x}-2\sqrt{x}-\sqrt{x}=\sqrt{x}$

$Es4.:$

$\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$?

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$Es4.:$

$$\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}=\frac{(2-1)\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

10. Espressioni irrazionali

Le espressioni algebriche in cui sono presenti radicali sono chiamate **espressioni irrazionali**.

Es.:

$$\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

A volte, può capitare di incontrare frazioni che contengono dei radicali al denominatore.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}$$

Le espressioni algebriche in cui sono presenti radicali sono chiamate **espressioni irrazionali**.

Razionalizzazione di un radicale

10. Espressioni irrazionali

Considerando che non è per nulla facile lavorare con frazioni **IRRAZIONALI,** per agevolare il lavoro occorre **RAZIONALIZZARE** queste frazioni.

12 Razionalizzazione

L'utilità della RAZIONALIZZAZIONE di un radicale sta nel fatto che è più semplice lavorare con frazioni che abbiano il denominatore razionale, per effettuare poi le operazioni richieste, per es. un m.c.m.

Vediamo i casi che si presentano

1°CASO $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$

2° CASO $\dfrac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$ NON FAREMO

3° CASO $\dfrac{m}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$

4° CASO $\dfrac{m}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$ NON FAREMO

12 Razionalizzazione

1°CASO $\dfrac{b}{\sqrt{a}}$ si moltiplicano N e D per $\sqrt{a}$

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

Esempio

$$\frac{5}{7\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{7\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{7\cdot\sqrt{9}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{7\cdot 3} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{21}$$

Quadrato perfetto

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

Un cubo perfetto

12 Razionalizzazione

$$\frac{a}{\sqrt[3]{ab}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[3]{a^2b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^3b^3}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{a^2b^2}}{a \cdot b} = \frac{\sqrt[3]{a^2b^2}}{b}$$

Indice 3

Fattore di razionalizzazione da utilizzare per avere un **CUBO PERFETTO**

12 Razionalizzazione

$$\frac{\sqrt[4]{2a}}{\sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt[4]{2a}}{\sqrt[4]{b}} \cdot \frac{\sqrt[4]{\boldsymbol{b^3}}}{\sqrt[4]{\boldsymbol{b^3}}} = \frac{\sqrt[4]{2ab^3}}{\sqrt[4]{b^4}} = \frac{\sqrt[4]{2ab^3}}{b}$$

Indice 4

Fattore di razionalizzazione
da utilizzare per poter poi
Semplificare
indice 4 con esponente 4

12 Razionalizzazione

Razionalizza i denominatori delle seguenti espressioni, supponendo che tutti i fattori dei radicandi siano positivi.

427 $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{3}}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{3}\right]$

428 $\frac{5}{\sqrt{5}}$; $\frac{3}{\sqrt{6}}$ $\left[\sqrt{5}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$

429 $\frac{15}{2\sqrt{5}}$; $\frac{12}{5\sqrt{6}}$ $\left[\frac{3\sqrt{5}}{2}; \frac{2\sqrt{6}}{5}\right]$

430 $\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\left[\sqrt{2}+3\right]$

431 $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$ $\left[2+\sqrt{5}\right]$

432 $\frac{x}{\sqrt{x}}$; $\frac{6a^2}{\sqrt{2a}}$ $\left[\sqrt{x}; 3a\sqrt{2a}\right]$

12 Razionalizzazione

3° CASO

$$= \frac{m}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{m}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$$

Esempio

$$\frac{10}{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{10\ (2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(2\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{10\ (2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + \cancel{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{10\ (2\sqrt{2} + \sqrt{3})}{8 - 3} = \quad 5\ (2\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

12 Razionalizzazione

Esempio $$\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(x^2-y^2)\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} =$$

$$= \frac{(x^2-y^2)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}+\cancel{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}-\cancel{\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}}-\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}} =$$

$$= \frac{(x^2-y^2)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \frac{\cancel{(x-y)}\cdot(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\cancel{(x-y)}} =$$

Prodotto notevole
Somma x differenza

$$= (x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

12 Razionalizzazione

439 $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$; $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$

440 $\dfrac{10}{\sqrt[4]{2}}$; $\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}}$

441 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

442 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

443 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

444 $\dfrac{3}{\sqrt{2}+1}$

12 Razionalizzazione

442 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

443 $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

444 $\dfrac{3}{\sqrt{2}+1}$

445 $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$

446 $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

447 $\dfrac{5}{\sqrt{6}-1}$

12 Razionalizzazione

448 $\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$

449 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

450 $\dfrac{3}{1-\sqrt{2}}$

451 $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

452 $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$

453 $\dfrac{10}{5+\sqrt{5}}$

454 $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

12 Razionalizzazione

2° CASO $\dfrac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$ si moltiplicano N e D per $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{b \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m \cdot a^{n-m}}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

NON FAREMO

Esempio

$$\frac{3}{\sqrt[5]{8}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{3\sqrt[5]{2^{5-3}}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^{5-3}}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3 \cdot 2^2}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[\cancel{5}]{2^{\cancel{5}}}} = \frac{3\sqrt[5]{4}}{2}$$

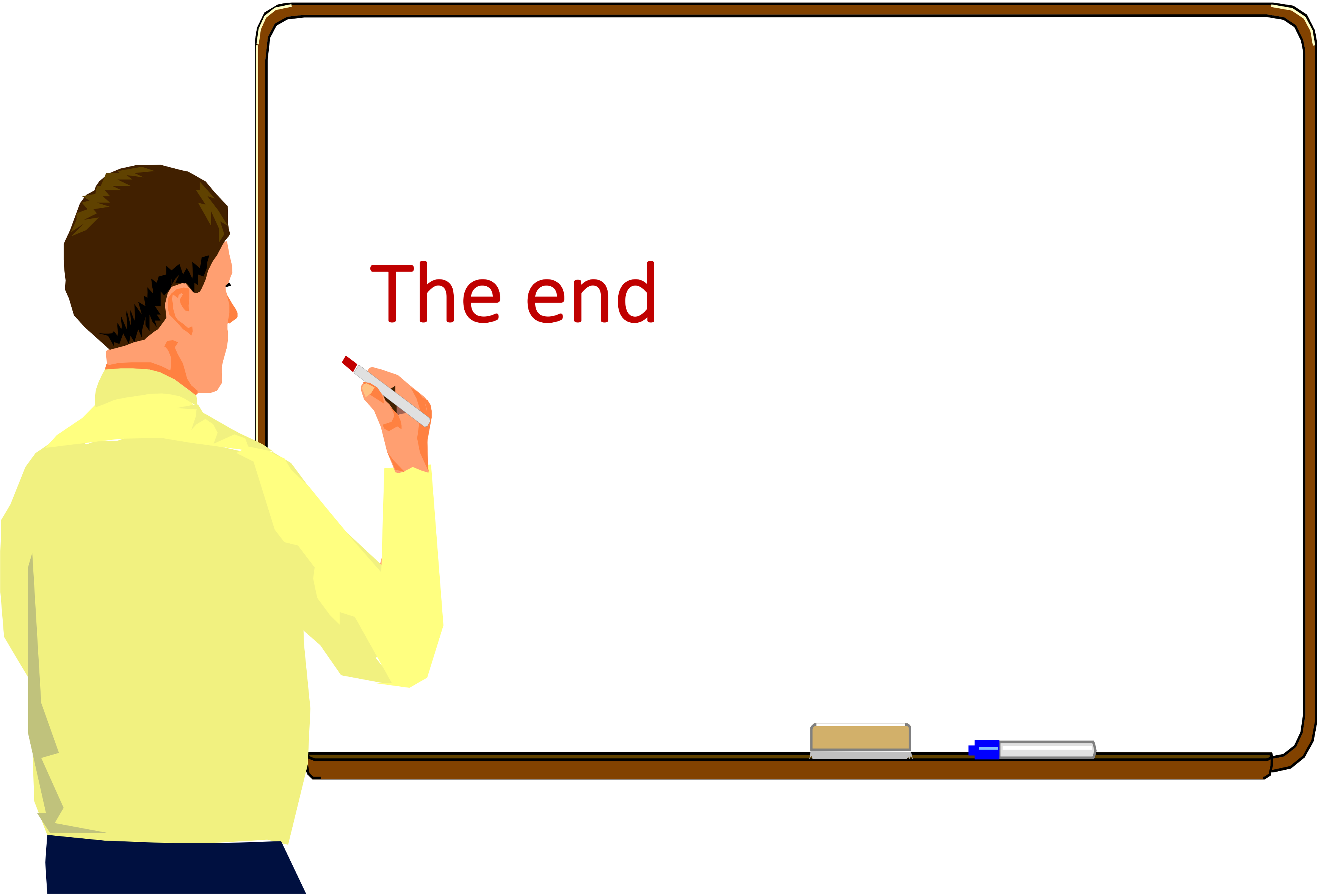
4° CASO $\dfrac{m}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$

Esempio $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} = \dfrac{10\ \left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}\right)} =$

$$= \frac{10\ \left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{3^3}} = \quad = \frac{10\ \left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{2+3} =$$

$$= \frac{10\ \left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{5} = \quad 2\ \left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}\right)$$

NON FAREMO


The end