Mathematica

I Radicali

Parte 1

esponente del radicando

$$\sqrt[n]{a^c} = a^{\frac{c}{n}}$$

radicando

indice della radice

Prof. Domenico Lo Iacono

Indice

Breve storia del simbolo del radicale

L'attuale simbolo **√** di **radice quadrata** deve la sua origine al **monaco agostiniano luterano M. Sbafai** (1486-1567) sebbene l'operazione di estrazione di radice quadrata fosse già presente dall'antichità.

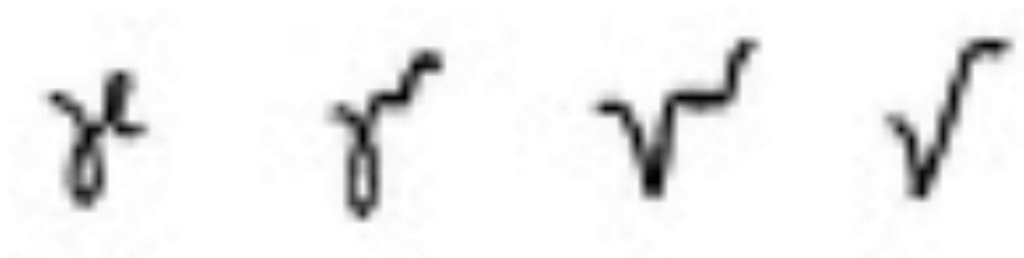
Siccome, ad esempio, **esiste un quadrato di area 16** che ha il lato che misura 4, gli antichi chiamavano la radice quadrata *latus*.

Il filosofo latino **S. Boemo** (480 d.C.-524 d.C.) la chiamò ***radix*** (radice, origine, fonte) a voler indicare da dove il quadrato trae le sue origini.

Breve storia del simbolo del radicale

Successivamente, **Leonardo Pisano** e **Luca Pacioli** la indicarono con la lettera iniziale di radix, cioè con **R**.

Dal carattere maiuscolo si passò a quello minuscolo **r** e, per deformazione, si giunse al simbolo attuale



Radicali

Aritmetici in $\mathcal{R}^+$

Quando non siamo interessati al segno

$$\sqrt{25} = 5$$

Parliamo in questo caso di radicale aritmetico

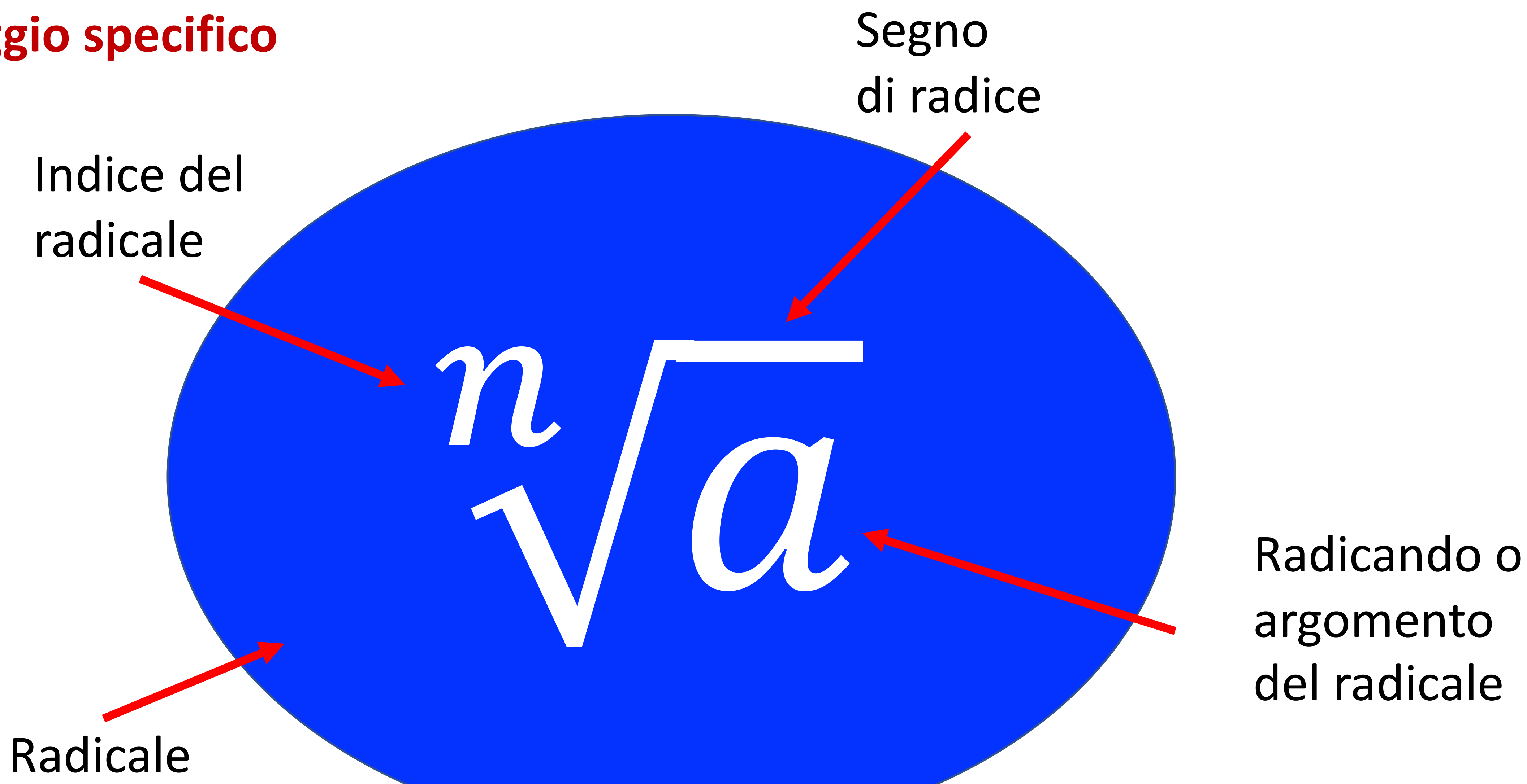
Algebrici in $\Re$

Se nel risultato mettiamo il segno

$$\sqrt{25} = \pm 5$$

Parliamo in questo caso di radicale algebrico

Linguaggio specifico



Il radicando è positivo o nullo: $a \geq 0$

1. RADICALI (aritmetici) DEFINIZIONE

$$\sqrt[n]{a}$$

Considerato $\boldsymbol{a} \in \mathcal{R}$ ed $\boldsymbol{n} \in N_0$, non nullo,

Esiste un unico $\boldsymbol{b} \in \mathcal{R}$ tale che $\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{b}$ prende il nome di Radice aritmetica n- ma di $\boldsymbol{a}$,

e si indica :

$a^{\frac{1}{n}}$ Oppure $\sqrt[n]{a} = b$

1. RADICALI Esempio

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad infatti \quad 2^3 = 8$$

$$\sqrt[2]{16} = 4 \quad infatti \quad 4^2 = 16$$

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5} \quad infatti \quad \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

1. RADICALI (numero irrazionale)

NUMERO IRRAZIONALE

Si chiama numero irrazionale ogni numero relativo la cui rappresentazione decimale è illimitata e non periodica.

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562313095 \ldots\ldots \quad \textit{ha una rappresentazione decimale illimitata}$$
$$\textit{non è un quadrato perfetto}$$

$$\sqrt{\mathbf{2}} \text{ è } \boldsymbol{un\ numero\ IRRAZIONALE}$$

Esempio di numeri irrazionali: $\sqrt{\mathbf{2}}$; $\sqrt{\mathbf{7}}$; $\sqrt{\mathbf{11}}$ ……

1. RADICALI ALGEBRICI: n pari - n dispari

$$\sqrt[n]{a}$$

n = pari ---> **n** > 0

Considerato $\boldsymbol{a} \geq 0$

La $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ è un numero reale non negativo $\boldsymbol{b \geq 0}$ che elevato ad $\boldsymbol{n}$ da come risultato $\boldsymbol{a}$

Esempio: $\sqrt[2]{\mathbf{9}} = \pm\mathbf{3}$ Perché: $(\mathbf{3})^{\mathbf{2}} = \mathbf{9}$ e $(-\mathbf{3})^{\mathbf{2}} = \mathbf{9}$

Ricordiamo che la potenza con esponente pari è sempre positiva

n = dispari ---> **n** > 0

Considerato $\boldsymbol{a} \in \Re$

La $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ è il numero reale $\boldsymbol{b} \in \Re$ che elevato ad $\boldsymbol{n}$ da come risultato $\boldsymbol{a}$

Esempio

11 **Vero o falso?**

a. $\sqrt{(-2)^2}$ non è definito in $\mathbb{R}$ $\boxed{V}$ $\boxed{X}$

b. $\sqrt{(-2)^3}$ non è definito in $\mathbb{R}$ $\boxed{X}$ $\boxed{F}$

c. $\sqrt[3]{(-2)^3}$ non è definito in $\mathbb{R}$ $\boxed{V}$ $\boxed{X}$

d. $\sqrt[11]{-11}$ non è definito in $\mathbb{R}$ $\boxed{V}$ $\boxed{X}$

e. $\sqrt[12]{-12}$ non è definito in $\mathbb{R}$ $\boxed{X}$ $\boxed{F}$

Esempio

ESEMPI Calcolo di radici quadrate

Calcoliamo le seguenti radici quadrate, se esistono in **R**:

a. $\sqrt{25}$ b. $-\sqrt{25}$ c. $\sqrt{-25}$ d. $\sqrt{\frac{9}{16}}$

e. $\sqrt{0}$ f. $\sqrt{1}$ g. $\sqrt{13}$ h. $\sqrt{0{,}01}$

ESEMPI Calcolo di radici cubiche

Calcoliamo le seguenti radici cubiche.

a. $\sqrt[3]{-8}$ b. $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ c. $\sqrt[3]{-1}$ d. $\sqrt[3]{0}$ e. $\sqrt[3]{0{,}001}$ f. $\sqrt[3]{3}$

Radici quadrate: calcolo e approssimazione

Calcola le seguenti radici quadrate, se esistono in R.

12 $\sqrt{225}$; $-\sqrt{\frac{49}{36}}$; $\sqrt{-\frac{49}{36}}$

13 $\sqrt{16}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{0{,}04}$

14 $\sqrt{12100}$; $\sqrt{-10^4}$; $\sqrt{10^6}$

2. CONDIZIONI DI ESISTENZA DI UN RADICALE

$$\sqrt[n]{a}$$

$\boldsymbol{se\ n = pari}$ è $\boldsymbol{definita\ solo\ per\ a \geq 0}$

$\boldsymbol{se\ n = dispari}$ è $\boldsymbol{definita\ solo\ per\ ogni\ numero\ reale\ \Re}$

Se il radicando è una espressione letterale allora è utile studiare

le C.E in $\Re$.

2. CONDIZIONI DI ESISTENZA DI UN RADICALE

Esempio:

$\sqrt{x-3}$. **Esiste in R se** $x-3 \geq 0$ $\quad$ $ovvero$. $\quad$ $x \geq 3$

$\sqrt[3]{x+1}$ **Esiste per ogni** $x \in \Re$

$\sqrt{-4}$ $\quad$ $non\ esiste\ in\ \Re$

3. Proprietà

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Esempio

$$\left(\sqrt{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{3}$$

$$\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5 = -2$$

$$\left(\sqrt[4]{x^2 y}\right)^4 = x^2 y$$

Vera solo se $x^2 y \geq 0$

3. Proprietà invariantiva

Proprietà molto importante perché permette di
1) semplificare un radicale;
2) ridurre radicali allo stesso indice.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

Se moltiplico o divido l'indice e l'esponente del radicando per uno stesso numero intero positivo il valore di un radicale non cambia

Esempio

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

$$\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3\cdot 2]{7^{2\cdot 2}} = \sqrt[6]{7^4}$$

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3\cdot 2]{(-1)^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{1}$$

$= -1$ $\qquad\qquad$ $= 1$

In questo caso la proprietà non è valida, potremmo avere errori di segno

4. Semplificazione di un radicale

Premessa: Il radicando di un radicale aritmetico è da intendersi come prodotto di fattori positivi o nulli.

Quindi: Possiamo scomporlo.

Applico la proprietà invariantiva:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

- $\sqrt[9]{64} = \sqrt[3\cdot 3]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$
- $\sqrt[4]{144} = \sqrt[2\cdot 2]{12^2} = \sqrt[2]{12}$
- $\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3}$ Radicale irriducibile perché 3 e 4 sono primi tra loro
- $\sqrt[12]{x^2y^8z^6} = \sqrt[6\cdot 2]{(xy^4z^3)^2} = \sqrt[6]{xy^4z^3}$

4. Semplificazione di un radicale

Esempio

$$\sqrt[4]{8 \cdot 5^2} \qquad \boldsymbol{vediamo\ se}\ \text{è}\ \boldsymbol{possibile\ semplificare}:$$

$$\sqrt[4]{8 \cdot 5^2} = \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[2\cdot 2]{2^3} \cdot \sqrt[2\cdot 2]{5^2} =$$

$$= \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt{5}$$

$$\boldsymbol{Semplificazione\ impossibile}:$$

5. Esercizi: Semplifica i radicali.

28. Riconosci, fra i seguenti radicali, quelli irriducibili.

a. $\sqrt[9]{27}$; $\sqrt[5]{64}$; $\sqrt[7]{21}$; $\sqrt[4]{196}$; $\sqrt[3]{625}$.

b. $\sqrt[8]{400}$; $\sqrt[15]{32}$; $\sqrt[4]{64}$; $\sqrt[8]{150}$; $\sqrt[6]{512}$.

c. $\sqrt[15]{a^3}$; $\sqrt[7]{7b^7}$; $\sqrt[8]{8x^4}$; $\sqrt[6]{4x^8}$; $\sqrt[6]{x^{12}y^5}$.

Semplifica i seguenti radicali.

29. $\sqrt[9]{27}$; $\sqrt[12]{25}$; $\sqrt[6]{81}$.

30. $\sqrt[4]{1600}$; $\sqrt[6]{0{,}0025}$; $\sqrt[8]{3600}$.

31. $\sqrt[6]{\dfrac{16}{169}}$; $\sqrt[9]{\dfrac{8}{125}}$; $\sqrt[6]{\dfrac{0{,}125}{0{,}000729}}$.

5. Esercizi: Semplifica i radicali.

Semplifica i seguenti radicali, supponendo **positivi** i fattori lette

32. $\sqrt[4]{25a^2b^4}$; [redacted] [redacted]

33. $\sqrt[6]{\dfrac{a^8}{25b^4}}$; $\sqrt[12]{(p-2q)^2}$; $\sqrt[30]{\dfrac{a^{10}}{1024}}$.

Semplifica in $\mathbb{R}$ i seguenti radicali.

34. $\sqrt{a^2}$; $\sqrt[4]{b^2}$; $\sqrt{a^2b^4}$; $\sqrt[4]{x^8y^4}$.

35. $\sqrt[3]{x^3y^6}$; $\sqrt[3]{a^9b^3}$; $\sqrt[6]{a^3b^3}$; $\sqrt[6]{x^2y^4}$.

4. Semplificazione di un radicale

Esempio

$$= \sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{x^{12}}\cdot\sqrt[6]{y^{6}} = \sqrt[3\cdot 2]{3}\cdot\sqrt[\cancel{3\cdot 2}]{x^{\cancel{3\cdot 2}\cdot 2}}\cdot\sqrt[\cancel{3\cdot 2}]{y^{\cancel{3\cdot 2}}} = \sqrt[6]{3}\cdot x^{2}\cdot y$$

125 **Caccia all'errore.**

Completa la seguente tabella, supponendo che tutte le variabili rappresentino numeri non negativi.

Semplificazione	La semplificazione è corretta?		Eventuale correzione
$\sqrt[4]{8\cdot 5^2} = \sqrt{4\cdot 5}$	Sì	No X	$= \sqrt[2\cdot 2]{2^3}\cdot\sqrt[2\cdot 2]{5^2} = \sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt{5}$
$\sqrt[6]{3x^{12}y^{6}} = 3x^2y$	Sì	No X	
$\sqrt[6]{9^2} = \sqrt[3]{9} = 3$	Sì	No X	$= \sqrt[3\cdot 2]{9^2} = \sqrt[3]{9}$
$\sqrt{x^4y^9} = x^2y^3$	Sì X	No	
$\sqrt[3]{2^6\cdot 3^{-6}} = \frac{4}{9}$	Sì X	No	
$\sqrt[4]{x^2y^8} = xy^2$	Sì	No X	$= \sqrt[2\cdot\cancel{2}]{x^{\cancel{2}}}\cdot\sqrt[\cancel{2\cdot 2}]{y^{2\cdot\cancel{4}}} = \sqrt{x}\cdot y^2$

5. Riduzione di più radicali allo stesso indice   Esempio 1

Dati più radicali di diverso indice, li possiamo trasformare in altri aventi lo stesso indice, applicando la proprietà invariantiva e calcolando il m.c.m. dei singoli indici

Procedimento: Applicazione della proprietà invariantiva

- **Scomposizione del radicando**
- **Moltiplico l'indice del radicale per un numero in modo che il risultato sia uguale al mcm**
- **Moltiplico l'esponente del radicando per il numero scelto prima**

Esempio 1: $\sqrt[3]{2}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{5^3}$ $\qquad$ $\sqrt{6}$

Calcolo il mcm(3; 4; 2) = 12

5. Riduzione di più radicali allo stesso indice   Esempio 1

Esempio 1

$$\sqrt[3]{2} \qquad \sqrt[4]{5^3} \qquad \sqrt{6}$$

Calcolo il mcm(3; 4; 2) = 12

Applico la proprietà invariantiva:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

12 : 3 = 4 $\qquad$ 12 : 4 = 3 $\qquad$ 12 : 2 = 6

$$\sqrt[3\cdot 4]{2^{1\cdot 4}}. \qquad \sqrt[4\cdot 3]{5^{3\cdot 3}} \qquad \sqrt[2\cdot 6]{2^{1\cdot 6}}.$$

$$\sqrt[12]{2^4} \qquad \sqrt[12]{5^9} \qquad \sqrt[12]{6^6}$$

In questo modo i tre radicali sono ridotti allo stesso indice

5. Esercizi: Semplifica i radicali.

Completa le seguenti **uguaglianze**.

36. $\sqrt[3]{a} = \sqrt[9]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[4]{b^3} = \sqrt[8]{\ldots\ldots}$; $\sqrt{a} = \sqrt[6]{\ldots\ldots}$;

$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[5]{b^2} = \sqrt[20]{\ldots\ldots}$.

37. $\sqrt{ax^3} = \sqrt[8]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[3]{a^2x} = \sqrt[9]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[4]{x^3y} = \sqrt[16]{\ldots\ldots}$;

$\sqrt[3]{ax^2y} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[4]{a^2x^3y} = \sqrt[20]{\ldots\ldots}$; $\sqrt[6]{a^2x^5y^3} = \sqrt[18]{\ldots\ldots}$.

5. Riduzione di più radicali allo stesso indice: Esercizi

Riduci al **minimo indice comune** i radicali di ciascuno dei seguenti gruppi.

38. $\sqrt[3]{15}, \quad \sqrt{6}; \qquad \sqrt[3]{4}, \quad \sqrt{3}; \qquad \sqrt[4]{10}, \quad \sqrt[3]{5}; \qquad \sqrt{11}, \quad \sqrt[4]{121}.$

39. $\sqrt[4]{18}, \quad \sqrt[6]{65}; \qquad \sqrt[5]{24}, \quad \sqrt{5}; \qquad \sqrt{3}, \quad \sqrt[3]{5}; \qquad \sqrt[3]{6}, \quad \sqrt{20}.$

40. $\sqrt[6]{5}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{3}.$

5. Esercizi: Riduzione di più radicali allo stesso indice.

Riduci al **minimo indice comune** i radicali di ciascuno dei seguenti gru

38. $\sqrt[3]{15}$, $\sqrt{6}$; $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{11}$, $\sqrt[4]{121}$.

39. $\sqrt[4]{18}$, $\sqrt[6]{65}$; $\sqrt[5]{24}$, $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{20}$.

40. $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

41. $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{3}$; $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{2}$.

42. $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[6]{a^5}$, $\sqrt[12]{a^7}$.

43. $\sqrt[3]{a^n b}$, $\sqrt[4]{a^n b^n}$, $\sqrt{ab^n}$.

5. Riduzione di più radicali allo stesso indice: Esercizi

Riduzione di più radicali allo stesso indice

126 ESERCIZIO GUIDATO

Riduci al minimo indice comune i radicali:

$$\sqrt{2};\ \sqrt[4]{3};\ \sqrt[3]{10}$$

- Osserva che il minimo comune multiplo fra gli indici dei radicali è 12.
- Applica la proprietà invariantiva:

$$\sqrt{2} = \sqrt[2\cdot 6]{2^6} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4\cdot\ldots]{3^{\ldots}} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}$$

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3\cdot\ldots]{10^{\ldots}} = \sqrt[12]{\ldots\ldots}$$

- In conclusione, i tre radicali ridotti al minimo indice comune sono:

$$\sqrt[12]{\ldots\ldots};\quad \sqrt[12]{\ldots\ldots};\quad \sqrt[12]{\ldots\ldots}$$

5. Riduzione di più radicali allo stesso indice: Esercizi

Riduci al minimo indice comune i seguenti radicali; supponi che tutte le variabili rappresentino numeri non negativi.

127 $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{2}$ $[\sqrt[6]{2^3};\ \sqrt[6]{2^2}]$

128 $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{2}$ $[\sqrt[12]{2^6};\ \sqrt[12]{3^4};\ \sqrt[12]{2^3}]$

129 $\sqrt{3}$; $\sqrt[6]{6}$; $\sqrt[3]{4}$ $[\sqrt[6]{3^3};\ \sqrt[6]{6};\ \sqrt[6]{4^2}]$

130 $\sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt{a^3}$ $[\sqrt[4]{a^2};\ \sqrt[4]{a};\ \sqrt[4]{a^6}]$

131 $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[6]{a}$; $\sqrt[12]{a}$ $[\sqrt[12]{a^3};\ \sqrt[12]{a^2};\ \sqrt[12]{a}]$

132 $\sqrt{ab^2}$; $\sqrt[3]{a^2b}$ $[\sqrt[6]{a^3b^6};\ \sqrt[6]{a^4b^2}]$

133 $\sqrt[6]{a^2b^3}$; $\sqrt[12]{a^6b^5}$; $\sqrt[18]{a^2b^7}$ $[\sqrt[36]{a^{12}b^{18}};\ \sqrt[36]{a^{18}b^{15}};\ \sqrt[36]{a^4b^{14}}]$

5. Esercizi: Prodotto di radicali

Esegui le seguenti **moltiplicazioni** tra radicali quadratici e, quando è possibile, semplifica i risultati.

52. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$; $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}$; $\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}$. [$\sqrt{10}$; 9; $15\sqrt{2}$; 12

53. $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{\frac{10}{27}}\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{5}{12}}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{\frac{16}{75}}$. $\left[\frac{2}{3}; \sqrt{\frac{1}{30}}\right.$

54. $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}$; $\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}$; $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$;
$\sqrt{20}\cdot\sqrt{75}\cdot\sqrt{18}$; $\sqrt{6}\cdot\sqrt{175}\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{7}$.

55. $\sqrt{a^3y}\cdot\sqrt{a^5y^9}$; $\sqrt{3a^3b}\cdot\sqrt{10ab^3}\cdot\sqrt{3a}$; $\sqrt{3x^3y}\cdot\sqrt{7xy^5}$. [$a^4y^5$; $3a^2b^2\sqrt{10a}$; $x^2y^3\sqrt{2}$

56. $\sqrt{2x^2}\cdot\sqrt{\frac{8}{x}}$; $\sqrt{3y^3}\cdot\sqrt{\frac{y}{3}}$; $\sqrt{\frac{ax}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{10a^3}{b}}\cdot\sqrt{\frac{5x}{c}}$. $\left[4\sqrt{x}; y^2; \frac{5a^2x\sqrt{}}{bc}\right.$

57. $\sqrt[3]{2-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[6]{2+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[6]{1-\frac{2}{5}}$; $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[12]{2^5}\cdot\sqrt{2^3}$. $\left[\sqrt{\frac{3}{2}};\right.$

58. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt{3}$; $\sqrt{1+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{3+\frac{3}{8}}\cdot\sqrt[12]{\frac{2}{3}}$. [$\sqrt[4]{3^7}$; $\sqrt{}$

5. Esercizi: Divisioni di radicali

Esegui le seguenti **divisioni** e semplifica, quando è possibile, i risultati.

59. $\sqrt{6} : \sqrt{3}$; $\quad \sqrt[3]{9} : \sqrt[3]{3}$; $\quad \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{12}$. $\quad \left[\sqrt{2}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right.$

60. $\sqrt{\frac{15}{7}} : \sqrt{\frac{5}{21}}$; $\quad \sqrt[4]{\frac{8}{14}} : \sqrt[4]{\frac{2}{9}}$; $\quad \sqrt{\frac{2}{7}} : \sqrt{\frac{2}{21}}$. $\quad \left[\sqrt{9}; \sqrt[4]{\frac{18}{7}}; \sqrt{3}\right.$

61. $\sqrt{\frac{5}{4}} : \sqrt{\frac{5}{8}}$; $\quad \sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{9}{25}}$; $\quad \frac{4}{21}\sqrt{\frac{3}{8}} : \left(\frac{2}{21}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. $\quad \left[\sqrt{2}; \sqrt{\frac{5}{3}}; 1\right.$

62. $\sqrt{24} : \sqrt{6}$; $\quad \sqrt{75} : \sqrt{3}$; $\quad \sqrt{80} : \sqrt{5}$; $\quad \sqrt{0{,}2} : \sqrt{0{,}4}$.

63. $\sqrt[3]{108} : \sqrt[3]{4}$; $\quad \sqrt[4]{112} : \sqrt[4]{7}$; $\quad \sqrt[3]{\frac{40}{189}} : \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$; $\quad \sqrt{\frac{125}{27}} : \sqrt{\frac{35}{6}}$.

64. $\sqrt{2+\frac{3}{2}} : \sqrt{6+\frac{1}{2}}$; $\quad \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} : \sqrt{1-\frac{1}{5}}$; $\quad \sqrt{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} : \sqrt{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}$.

65. $\sqrt[4]{4} : \sqrt{2}$; $\quad \sqrt[4]{12} : \sqrt{2}$; $\quad \sqrt[4]{18} : \sqrt[3]{6}$. $\quad \left[1; \sqrt[4]{3}; \sqrt[12]{\frac{9}{2}}\right]$

66. $\sqrt[3]{36} : \sqrt[4]{54}$; $\quad \sqrt[3]{\frac{4}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\quad \sqrt[6]{\frac{108}{25}} : \sqrt[3]{\frac{6}{5}}$. $\quad \left[\sqrt[12]{\frac{32}{3}}; \sqrt[6]{6}; \sqrt[6]{3}\right]$

67. $\sqrt[8]{\frac{32}{27}} : \sqrt{\frac{8}{3}}$; $\quad \sqrt[10]{\frac{8}{27}} : \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$; $\quad \sqrt{\frac{2}{3}} : \sqrt[4]{\frac{8}{15}}$. $\quad \left[\sqrt[8]{\frac{3}{128}}; \sqrt[10]{\frac{2}{3}}; \sqrt[4]{\frac{5}{6}}\right]$

5. Esercizi: Divisioni e prodotti di radicali

Esegui le seguenti **divisioni** e **moltiplicazioni**, semplificando, quando è possibile, i risultati.

68. $(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}):(\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[3]{a})$; $\quad \left(\sqrt{\dfrac{a^2b}{c}}\cdot\sqrt{\dfrac{ab^2}{c}}\right):\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^2b}{c}}\cdot\sqrt{\dfrac{ab^2}{c}}\right)$. $\quad [\sqrt[3]{a^2};\ \sqrt[6]{\ldots}$

69. $\dfrac{3ax^2}{3b}\sqrt[6]{\dfrac{3b}{4a^2x}}:\left(\dfrac{3a^2}{2bx}\sqrt[8]{\dfrac{27ab^2}{4x^2}}\right)$; $\quad \dfrac{\sqrt[9]{16}\cdot\sqrt[6]{32}}{\sqrt[4]{128}}\cdot\sqrt[36]{2^{15}}$. $\quad \left[\dfrac{2x^3}{3a}\sqrt[24]{\dfrac{x^2}{2^2\cdot 3^5a^{11}b^2}};\ \ldots\right.$

70. $\sqrt{3xy}\cdot\sqrt[3]{9xy^2}\cdot\sqrt[4]{27x^3y}:(\sqrt[6]{243x^3y^2}\cdot\sqrt[12]{2187x^5y^3})$. $\quad [\sqrt[6]{27x\ldots}$

71. $\sqrt[4]{\dfrac{27a^2b}{c}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{81ab^2}{c^2}}:\left(\sqrt[6]{\dfrac{27a^2b}{c^2}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{81ab^2}{c}}\right)$. $\quad [\sqrt[12]{3^7\ldots}$

72. $\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}:\sqrt{\dfrac{(3x^2+1)(x^2-1)}{x^3}}\cdot\sqrt{\dfrac{x(3x^2+1)}{x^2+1}}$.

73. $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}\right):\sqrt{\dfrac{x^3+x^2y}{xy^2-y^3}}$ (con $x>y>0$).

Fine prima parte