

IL CALCOLO LETTERALE

Operazioni con i Polinomi

Ricordiamo che:

Due **monomi** sono **simili** se hanno la stessa parte letterale

Esempio

$$-2xy; \quad +4xy; \quad -\frac{2}{3}xy$$

Sono simili

$$-5x; \quad +3x^2$$

Non sono simili

Un polinomio si dice:

intero se gli esponenti dei monomi che lo compongono sono tutti interi positivi o nulli

$$2xy - 3x + 4y$$

intero

$$2x^{-3} + 3xy^2 + 5y$$

non è intero

nullo se tutti i coefficienti sono nulli

Grado complessivo: è il massimo dei gradi dei monomi che lo compongono

Grado rispetto ad una lettera: è il massimo grado con cui compare la lettera

$$2x^2y^3z^7 + 5x^3y^4 - 3x^2y^2z^6$$

complessivamente è di grado 12

è di grado 3 rispetto ad x

è di grado 4 rispetto ad y

è di grado 7 rispetto a z

omogeneo se tutti i monomi che lo compongono sono dello stesso grado

$$2xyz - 3x^3 + 4x^2y - \frac{7}{3}y^2z$$

omogeneo di grado 3

ordinato se compaiono le potenze delle variabili in ordine crescente o decrescente

$$2x^3 - 4x + 5$$

decrescente

$$\frac{3}{2} - 4x^2 + 5x^4$$

crescente

completo se compaiono tutte le potenze, dal grado massimo al grado zero, delle variabili

$$2x - 4x^2 + 5x^4 - 7x^3 + 2$$

ordinato

Somma algebrica

M Somma algebrica

Si esegue solo fra monomi simili.

Si sommano i coefficienti e si lascia inalterata la parte letterale

ESEMPIO

Calcoliamo la somma e la differenza dei polinomi:

$$2a + b - c \quad \text{e} \quad -a + b - c$$

Somma

La **somma** dei due polinomi è data dall'espressione:

$$(2a + b - c) + (-a + b - c)$$

Togliamo le parentesi e contrassegniamo i termini simili:

$$\underline{2a} + \underline{b} - \underline{c} - \underline{a} + \underline{b} - \underline{c}$$

Riducendo i termini simili otteniamo che la somma dei due polinomi è data dal trinomio:

$$a + 2b - 2c$$

Differenza

La **differenza** dei due polinomi è data dall'espressione:

$$(2a + b - c) - (-a + b - c)$$

Togliamo le parentesi e contrassegniamo i termini simili:

$$\underline{2a} + \underline{b} - \underline{c} + \underline{a} - \underline{b} + \underline{c}$$

Riducendo i termini simili otteniamo che la differenza dei due polinomi è data dal monomio:

$$3a$$

ESEMPIO

Dati i tre polinomi

$$2a + b - c, \quad -a + b - c, \quad b + 2c$$

calcoliamo la differenza tra la somma dei primi due e il terzo.

La differenza tra la *somma* dei primi due polinomi e il terzo è data dall'espressione

$$(2a + b - c) + (-a + b - c) - (b + 2c)$$

Togliamo le parentesi e contrassegniamo i termini simili:

$$\underline{2a} + \underline{b} - \underset{\times}{c} - \underline{a} + \underline{b} - \underset{\times}{c} - \underline{b} - \underset{\times}{2c}$$

Riducendo i termini simili otteniamo come risultato il trinomio:

$$a + b - 4c$$

Determina la somma e la differenza delle seguenti coppie di polinomi.

72 $a^2 - 2b^2$ e $-a^2 + 3b^2$ [b^2 ; $2a^2 - 5b^2$]

73 $m^3 - n^3$ e $m^3 + mn - n^3$ [$2m^3 + mn - 2n^3$; $-mn$]

74 $a + b - 2c$ e $2a - b - c$ [$3a - 3c$; $-a + 2b - c$]

75 $a^2 - ab + b^2$ e $2a^2 - ab + b^2$ [$3a^2 - 2ab + 2b^2$; $-a^2$]

76 $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$ e $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x$
[$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$; $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}x - 1$]

77 $\frac{1}{2}x - 2y$ e $\frac{3}{2}x + 2y$ [$2x$; $-x - 4y$]

78 $-0,2x + 0,3y - 0,5$ e $\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}$
[$\frac{1}{5}x + \frac{9}{5}y - 1$; $-\frac{3}{5}x - \frac{6}{5}y$]

79 $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$ e $-\frac{5}{3}x^2 + \frac{5}{2}x + 4$
[$-\frac{4}{3}x^2 + 2x + 2$; $2x^2 - 3x - 6$]

Testo: pag 231.

volume 1

Moltiplicazione algebrica

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

M Moltiplicazione

Moltiplicazione

Si usa la proprietà distributiva $a(c + d) = ac + ad$

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Si moltiplica il monomio per ciascun monomio del polinomio

ESEMPI

$$\begin{aligned} \text{a. } 2x(x + 1) &= \\ &= 2x \cdot x + 2x \cdot 1 = \\ &= 2x^2 + 2x \end{aligned}$$

Proprietà distributiva

Calcolando i prodotti tra monomi

$$\begin{aligned} \text{b. } -2x^2(4x^3 + x - 3) &= \\ &= (-2x^2) \cdot 4x^3 + (-2x^2) \cdot x + (-2x^2) \cdot (-3) = \\ &= -8x^5 - 2x^3 + 6x^2 \end{aligned}$$

Proprietà distributiva

Calcolando i prodotti tra monomi

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{3}{2}a^2b\left(4ab^3 - \frac{1}{3}a^2b\right) &= \\ &= \left(\frac{3}{2}a^2b\right) \cdot 4ab^3 + \left(\frac{3}{2}a^2b\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}a^2b\right) = \\ &= 6a^3b^4 - \frac{1}{2}a^4b^2 \end{aligned}$$

Proprietà distributiva

Calcolando i prodotti tra monomi

Esegui le seguenti moltiplicazioni.

116 $3x^2(1 + 2x)$

$2x(1 + x^2)$

117 $2a(3a + 5)$

$3a^2(2a + 3)$

$[6a^2 + 10a; 6a^3 + 9a^2]$

118 $5x(x^2 + 2x + 1)$

$2x(2 - x^3)$

119 $a^3(a^2 + 7)$

$-2a^2(a^2 - 4)$

$[a^5 + 7a^3; -2a^4 + 8a^2]$

120 $3a(2a^2 - 2b)$

$(x^2 - 2x)(-3x)$

121 $2x(-2x^2 + x)$

$(2x^2 - 1)(-2x)$

$[-4x^3 + 2x^2; -4x^3 + 2x]$

122 $\frac{1}{2}a^2(a + ab)$

$(a - 2b)(-3ab)$

123 $3xy(x^3 - y^2 - 2xy)$

$2m(m + n + mn)$

$[3x^4y - 3xy^3 - 6x^2y^2; 2m^2 + 2mn + 2m^2n]$

124 $-2x(x^3 - 4x^2 - 3x)$

$ab(-a + b)$

125 $-\frac{1}{2}abx(4a^2 - ax^2 - 2b^3x)$

$\frac{2}{3}xy(9x - 12y - 6xy)$

$[-2a^3bx + \frac{1}{2}a^2bx^3 + ab^4x^2; 6x^2y - 8xy^2 - 4x^2y^2]$

126 $-\frac{5}{3}mn^2(-3m - 6n + 12mn)$

$\frac{1}{2}ab(-6a + 4b)$

Testo: pag 234.

volume 1

Moltiplicazione algebrica

Moltiplicazione di due polinomi

Moltiplicazione di due polinomi

Si moltiplica ogni termine del primo per ogni termine del secondo

ESEMPI

Eseguiamo le seguenti moltiplicazioni:

a. $(2x + 1)(x + 2) =$



$$= 2x \cdot x + 2x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2 =$$

$$= 2x^2 + \underline{4x} + \underline{x} + 2 =$$

$$= 2x^2 + 5x + 2$$

Moltiplicando ciascun termine del primo binomio per tutti i termini del secondo

Moltiplicando i monomi

Riducendo i termini simili

b. $(x + y)(x - 3y) =$



$$= x \cdot x + x \cdot (-3y) + y \cdot x + y \cdot (-3y) =$$

$$= x^2 - \underline{3xy} + \underline{xy} - 3y^2 =$$

$$= x^2 - 2xy - 3y^2$$

Moltiplicando i monomi

Riducendo i termini simili

c. $(x^2 + 2x + 3)(x - 4) =$



$$= x^2 \cdot x + 2x \cdot x + 3 \cdot x + x^2(-4) + 2x(-4) + 3(-4) =$$

$$= x^3 + \underline{2x^2} + \underline{3x} - \underline{4x^2} - \underline{8x} - 12 =$$

$$= x^3 - 2x^2 - 5x - 12$$

Moltiplicando i monomi

Riducendo i termini simili

d. $(a - 1)(a + 2)(a - 3) =$
 $= (a - 1)(a^2 - \underline{3a} + \underline{2a} - 6) =$
 $= (a - 1)(a^2 - a - 6) =$
 $= a^3 - \underline{a^2} - \underline{6a} - \underline{a^2} + \underline{a} + 6 =$
 $= a^3 - 2a^2 - 5a + 6$

Calcolando il prodotto $(a + 2)(a - 3)$

Riducendo i termini simili

Moltiplicando il binomio per il trinomio

Riducendo i termini simili

Esegui le seguenti moltiplicazioni tra polinomi.

155 $(2x + 1)(x - 2)$

$(a + 2b)(1 - 3b)$

156 $(x - 2)(x + 3)$

$(2a - 1)(a + 3)$

$[x^2 + x - 6; 2a^2 + 5a - 3]$

157 $(a^2 - 1)(2a + 1)$

$(b + 2)(b^2 + 1)$

158 $(xy + 1)(x - y)$

$(b - 3)(b^2 - 2)$

$[x^2y - xy^2 + x - y; b^3 - 3b^2 - 2b + 6]$

159 $(2x^2 + x)(2x - 3)$

$(x^2 + 2y^2)(x - y)$

160 $x(x - 1)(x + 2)$

$2x(x^2 - 1)(x + 2)$

$[x^3 + x^2 - 2x; 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x]$

161 $\left(\frac{1}{2}a - 1\right)(2a + 4)$

$\left(\frac{1}{3}y - y^2\right)(3y - 1)$

162 $(a^2 - 1)\left(\frac{a^2}{2} + 2\right)$

$(0,25x - 1)(4x - 16)$

$\left[\frac{1}{2}a^4 + \frac{3}{2}a^2 - 2; x^2 - 8x + 16\right]$

Testo: pag 235.

volume 1

Divisione algebrica

Divisione fra due polinomi

Mathematica M Divisione di un polinomio per un monomio ($\neq 0$)

Si applica proprietà distributiva destra della somma algebrica rispetto alla divisione e le proprietà delle potenze

M Esercizi. Divisione di un polinomio per un monomio

Esegui le seguenti divisioni, se il polinomio è divisibile per il monomio.

15 $(2a^3b - 8ab^2 + 4ab) : (2ab)$

16 $(12x^5 - 6x^3 + 9x) : (-3x^2)$

[Il polinomio non è divisibile per il monomio]

17 $(4x^4y^5 - 2x^3y^2 - x^2y^3) : (-2x^2y^2)$

18 $(-2a^5 - 4a^4 + 2a^3 - 8a) : (-2a)$

$[+a^4 + 2a^3 - a^2 + 4]$

19 $(9a^2b + 3ab^2 + ab) : (ab^2)$

20 $\left(-\frac{1}{2}x^4y^2 + \frac{1}{4}x^3y - x^4y^5\right) : \left(\frac{1}{2}x^3y\right)$

$\left[-xy + \frac{1}{2} - 2xy^4\right]$

21 $(-3a^4bc + 6ab^2c^3 + 2a^2b^3c) : (-3abc)$

22 $(x^5 - 2x^2 + 1) : (2x^3)$

[Il polinomio non è divisibile per il monomio]

23 $\left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{3}t - \frac{1}{2}t^2\right) : \left(\frac{1}{6}t\right)$

Testo: pag 270.

volume 1

M Esercizi. Divisione di un polinomio per un monomio

Semplifica le seguenti espressioni in cui compaiono anche divisioni tra polinomi e monomi.

- 29** $(x^5 - x^3) : x^3 + (x^4 - x^2) : x^2$ $[2x^2 - 2]$ **32** $(6x^4 - 3x^3 - 9x^2) : (-3x^2) + \frac{1}{2}(-2x)^2$ $[x + 3]$
- 30** $(4a^4 + 8a^2) : (-2a^2) + 4$ $[-2a^2]$ **33** $(5x^5 - 10x^4) : (-5x^3) + (x - 1)(x + 1) + 1$ $[2x]$
- 31** $(8x^2 - 4x) : (-2x) + (6x^2 - 3x) : (-3x) - 3$ $[-6x]$ **34** $[(16x^6 - 8x^4) : (-8x^4)]^2 - (2x^2 + 1)^2$ $[-8x^2]$
-
- 35** $[(x^2 - x^3)^2 - (x^2 - x^3)(x^2 + x^3)] : (-2x^3) + x^3$ $[x^2]$
- 36** $[(2x - y)^2 + (4x - 3y)^2 + 10(x - y)(x + y) + 10xy] : (-6x)$ $[3y - 5x]$
- 37** $[(x - y^2)^2 - (x + y^2)^2 + 4y^4 + (-2y)^3] : (-2y^2) + 2y(y - 2)$ $[2x]$

Testo: pag 270.

volume 1

M Divisione fra due polinomi

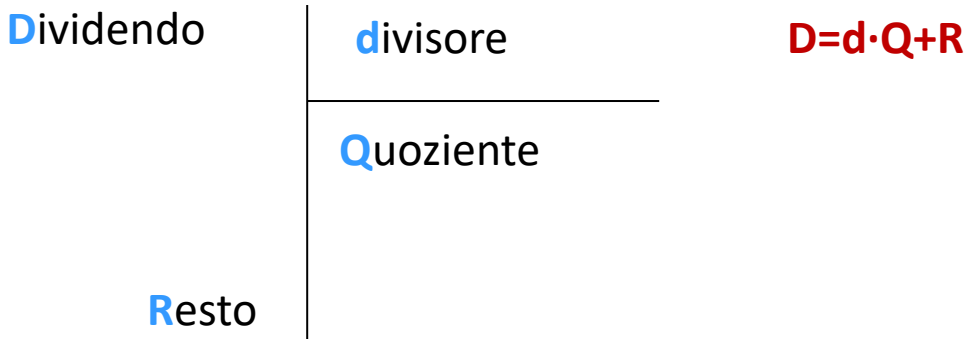
Condizioni:

- a) Il polinomio **divisore** deve essere $\neq 0$ per ogni valore delle variabili
- b) **Grado del Dividendo \geq grado del divisore**

Prima di effettuare la divisione, occorre:

- 1) **Ordinare** Dividendo e divisore secondo le potenze decrescenti della variabile
- 2) **Completare**, qualora non sia già completo, il dividendo

Schema





Esempio

$$(6x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8) \div (x^2 - x + 1) \quad \text{con} \quad x^2 - x + 1 \neq 0$$

Ordiniamo e completiamo il Dividendo, ordiniamo il divisore

(non è necessario completare, neanche nel caso in cui il divisore è incompleto)

1) Disponiamo secondo lo schema

$$6x^4 - 4x^3 + 4x^2 + \textcircled{0}x + 8 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x + 1 \\ \hline \end{array} \right.$$

2) Dividiamo il primo termine del Dividendo per il primo termine del divisore e scriviamo il risultato

$$\textcircled{6}x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 0x + 8 \quad \left| \begin{array}{l} \textcircled{x^2} - x + 1 \\ \hline 6x^2 \end{array} \right.$$

3) Moltiplichiamo il Quoziente ottenuto per tutti i termini del divisore sottraiamo i prodotti ottenuti dai termini di uguale potenza del Dividendo

$$\begin{array}{r|l}
 6x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 0x + 8 & x^2 - x + 1 \\
 \hline
 -6x^4 + 6x^3 - 6x^2 & 6x^2 \\
 \hline
 // \quad + 2x^3 - 2x^2 + 0x + 8 &
 \end{array}$$

4) Ripetiamo la tecnica descritta considerando i resti ottenuti come Dividendi, fino a quando il grado del Resto è inferiore di quello del Quoziente

$6x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 0x + 8$ $- 6x^4 + 6x^3 - 6x^2$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $// \quad + 2x^3 - 2x^2 + 0x + 8$ $\quad \quad - 2x^3 + 2x^2 - 2x$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $\quad \quad // \quad // \quad - 2x + 8$	$\frac{x^2 - x + 1}{6x^2 + 2x}$ <p>Si ottiene:</p> $Q = 6x^2 + 2x$ $R = -2x + 8$
--	--

M Esercizi. Divisione fra due polinomi

Esegui le seguenti divisioni.

54 $(a^3 + a^2 - 6a) : (a - 2)$

55 $(2x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 5) : (x^2 + 2)$

56 $(b^3 + 2b + 1) : (b + 1)$

57 $(2x^3 - 2x^2 - x - 6) : (x - 2)$

58 $(a^4 + 3a^3 + 4a^2 + 3a + 3) : (a^2 + 1)$

59 $(x^5 - x^3 - x^2 - 1) : (x^2 + 1)$

60 $(m^3 - m^2 + 2m - 3) : (m - 2)$

61 $(1 + 2x - x^3 + x^4 - 2x^5) : (3 + x^2)$

62 $(x^5 + x - x^2 + 1) : (x^3 + 1)$

63 $(x^5 + 3x^3 + x + 1) : (x^3 + 1)$

$[Q(a) = a^2 + 3a, R = 0]$

$[Q(x) = 2x^2 - 4x - 9, R(x) = 8x + 10]$

$[Q(b) = b^2 - b + 3, R = -1]$

$[Q(x) = 2x^2 + 2x + 3, R = 0]$

$[Q(a) = a^2 + 3a + 3, R = 0]$

$[Q(x) = x^3 - 2x - 1, R(x) = 2x^2 + 1]$

$[Q(m) = m^2 + m + 4, R = 0]$

$[Q(x) = -2x^3 + x^2 + 5x - 3, R(x) = -13x + 10]$

$[Q(x) = x^2, R(x) = -2x^2 + x + 1]$

$[Q(x) = x^2 + 3, R(x) = -x^2 + x - 1]$

Testo: pag 272.

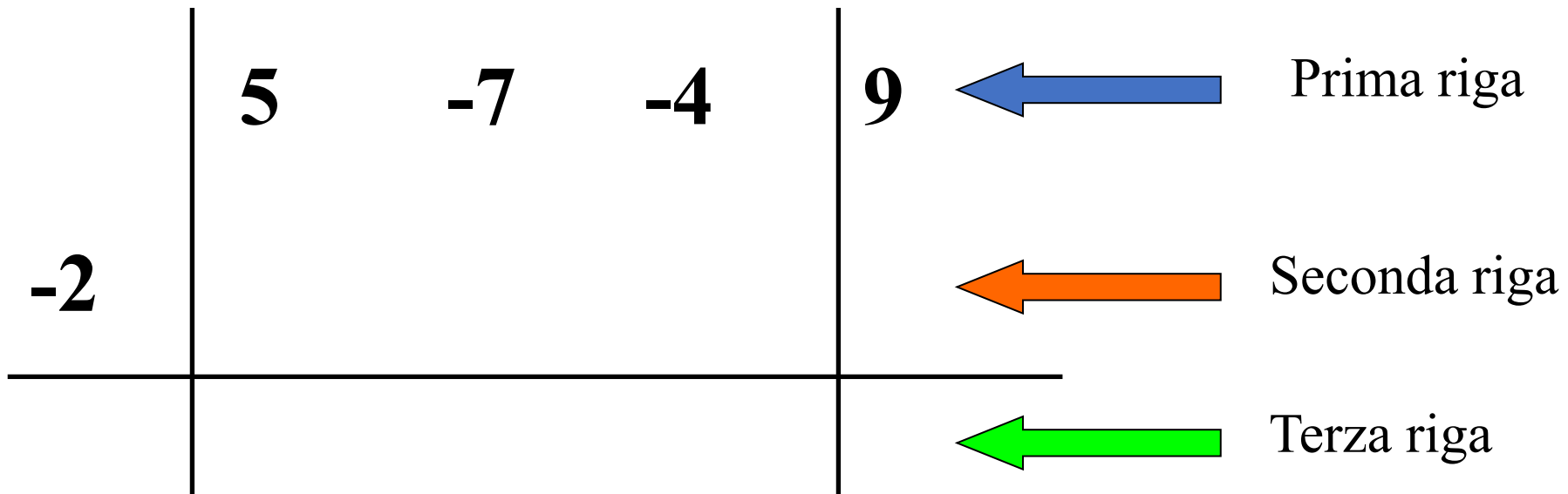
volume 1

scomposizione mediante la regola di Ruffini

Scomposizione mediante la regola di Ruffini

Il polinomio divisore è: $B(x) = x + 2$, dove $+2$ è il **termine noto**.

Nell'angolo a sinistra, sulla seconda riga, si introduce l'**opposto** del termine noto, cioè **-2**.



Prossimo appuntamento prodotti notevoli