

# Indice

- 1. Identità**
- 2. Definizione di equazione**
- 3. Dominio e soluzione di un'equazione**
- 4. Classificazione delle equazioni**
- 5. Equazioni equivalenti**
- 6. Procedura risolutiva di un'equazione di 1° grado**
  - a. Principi di equivalenza e conseguenze**
- 7. Soluzioni: Determinate, indeterminate, impossibili**
- 8. Esercizi**

- Pensa un numero,
  - aggiungi 7
  - moltiplica il risultato per 3.
- 
- Che numero hai ottenuto?”

“Ho ottenuto \_\_\_\_\_”

“Allora il numero che hai pensato è \_\_\_\_\_

Il gioco che proposto si risolve mediante un'**equazione**: \_\_\_\_\_

# 1. IDENTITÀ

## DEFINIZIONE -

Si definisce **identità** un'uguaglianza che è sempre verificata, qualunque sia il valore che viene attribuito all'incognita  $x$ .

**Esempio:**

$$5x - 1 = 3x + 2x - 1$$

**Domanda:** qual è il valore dell'incognita  $x$  che rende il primo membro uguale al secondo?

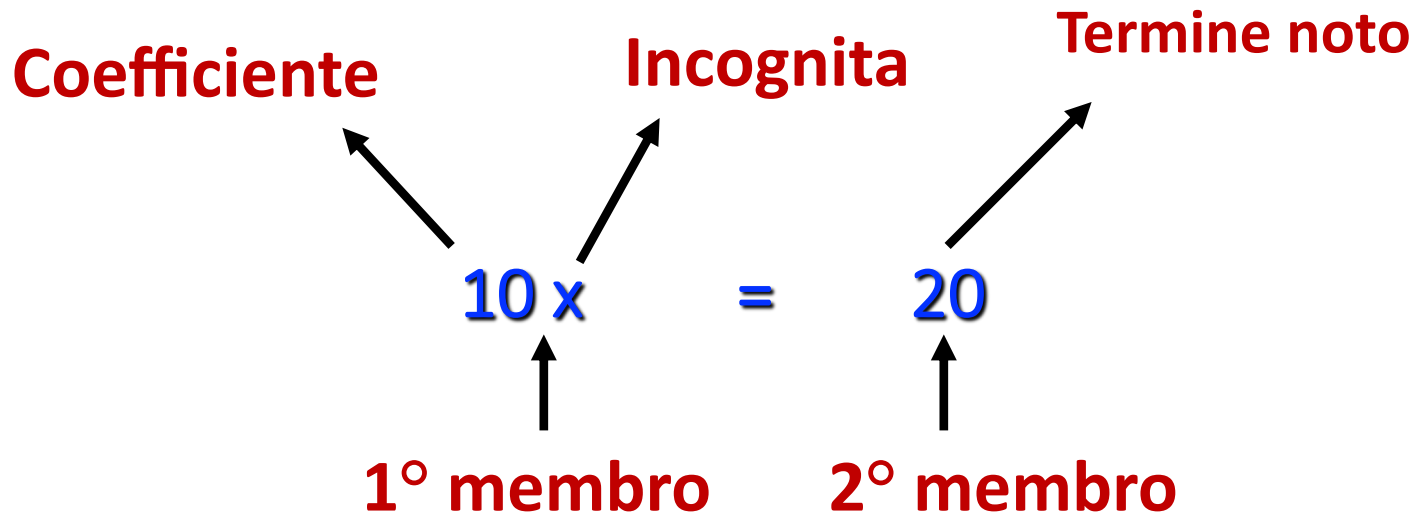
**Verifichiamo:**

$$x = 1 \longrightarrow 5 \cdot 1 - 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \longrightarrow 4 = 4 \text{ uguaglianza verificata}$$

$$x = 2 \longrightarrow 5 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 1 \longrightarrow 9 = 9 \text{ uguaglianza verificata}$$

**Conclusione:** l'uguaglianza sarà sempre verificata, per cui l'espressione si chiama **identità**.

## 2. DEFINIZIONE DI EQUAZIONE



**Domanda:** qual è quel numero x che moltiplicato per 10 dà 20 ?

**Risposta:** 2

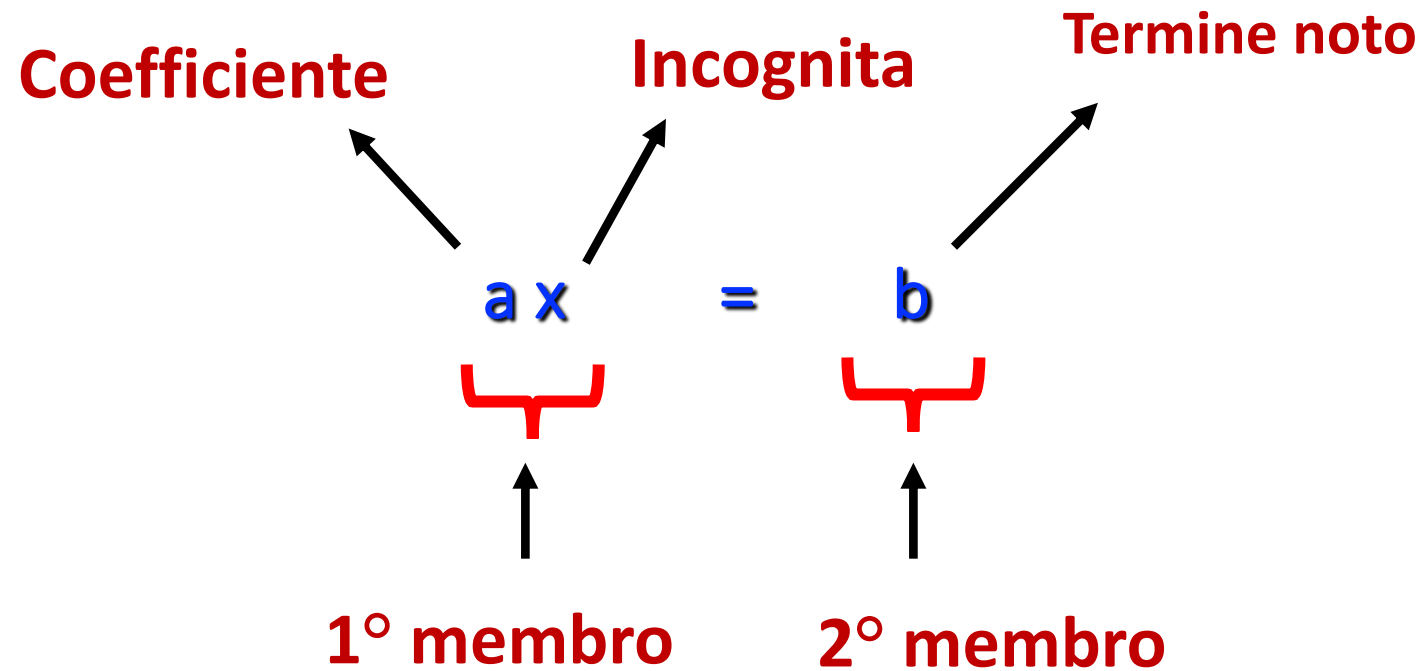
**Perché:**  $10 \cdot 2 = 20$

### DEFINIZIONE -

Un'equazione è una uguaglianza tra due membri che è verificata quando l'incognita x assume solo un particolare valore.

## 2. DEFINIZIONE DI EQUAZIONE

In generale



$$a, b, x \in \mathfrak{R}$$

Applicando il concetto di equazione, verificare se i numeri a fianco indicati sono soluzioni delle equazioni:

### Esempio N.1

$$3x - 2 = x \quad x = 1; x = 0$$



Sostituiamo i valori  $x = 1$  e  $x = 0$  nell'equazione:

$$3 \cdot 1 - 2 = 1$$



$1 = 1$  l'equazione è soddisfatta per cui  $x = 1$  è la soluzione

$$3 \cdot 0 - 2 = 0$$



$2 = 0$  l'equazione non è soddisfatta per cui  $x = 0$  non è la soluzione

Applicando il concetto di equazione, verificare se i numeri a fianco indicati sono soluzioni delle equazioni:

## Esempio N.2

$$x - 7x = -10$$

$$x = 1; x = 2$$



Sostituiamo i valori  $x = 1$  e  $x = 2$  nell'equazione:

$$1 - 7 \cdot 1 = -10$$



$-6 = -10$  l'equazione non soddisfatta, per cui  $x = 1$  non è la soluzione

$$2 - 7 \cdot 2 = -10$$



$-12 = -10$  l'equazione soddisfatta, per cui  $x = 2$  è la soluzione



### 3. Dominio e soluzioni di un'equazione

**Il dominio o insieme di definizione di un'equazione.**

È l'insieme numerico dove si cercano le soluzioni di un'equazione.

Salvo avviso contrario, risolveremo le equazioni assumendo come dominio **l'insieme R dei numeri reali.**

**Se l'insieme delle soluzioni di una equazione è**

**L'equazione si dice**

**Esempio**

Finito 

Determinata

$$8 \cdot x = 32$$

Infinito 

Indeterminata

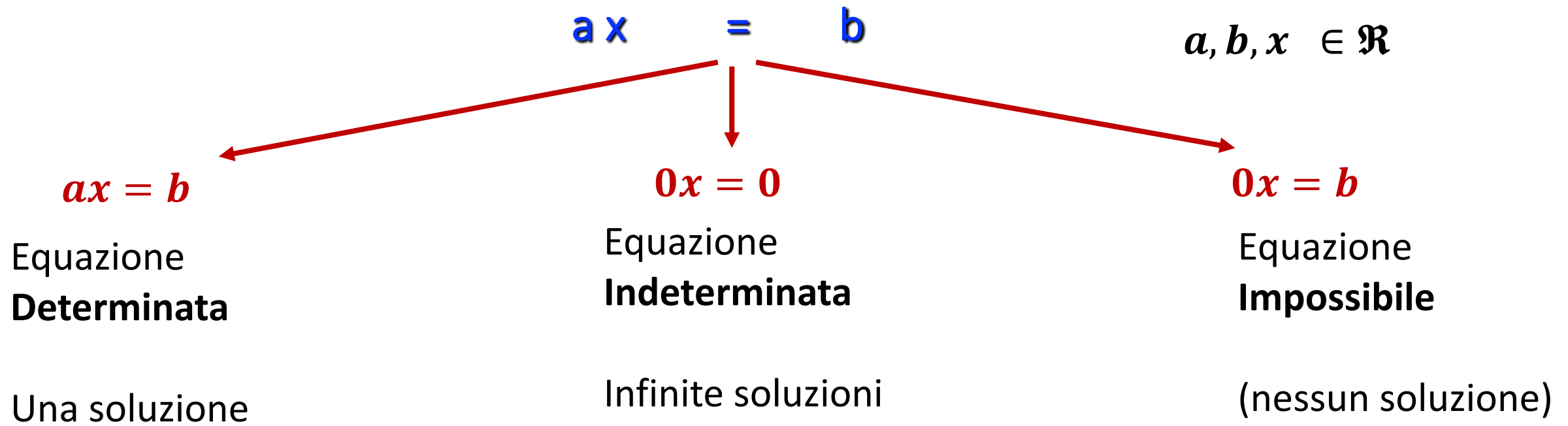
$$0 \cdot x = 0$$

Vuoto 

Impossibile

$$x^2 = -1$$

# Dominio o insieme di definizione di un'equazione.



Tra le equazioni indeterminate, rivestono particolare importanza

**le identità:**

4

## Equazioni determinate, indeterminate, impossibili, identità

**18** Completa la seguente tabella.

Equazione	Dominio	Classificazione			
$x + 2 = 0$	N	<input type="checkbox"/> Determinata	<input type="checkbox"/> Indeterminata	<input checked="" type="checkbox"/> Impossibile	<input type="checkbox"/> Identità
$x^2 = -2$	Q	<input type="checkbox"/> Determinata	<input type="checkbox"/> Indeterminata	<input checked="" type="checkbox"/> Impossibile	<input type="checkbox"/> Identità
$x + 2 = 0$	Z	<input checked="" type="checkbox"/> Determinata	<input type="checkbox"/> Indeterminata	<input type="checkbox"/> Impossibile	<input type="checkbox"/> Identità
$4x - 8 = 0$	N	<input checked="" type="checkbox"/> Determinata	<input type="checkbox"/> Indeterminata	<input type="checkbox"/> Impossibile	<input type="checkbox"/> Identità
$(2x)^2 = 4x^2$	R	<input type="checkbox"/> Determinata	<input type="checkbox"/> Indeterminata	<input type="checkbox"/> Impossibile	<input checked="" type="checkbox"/> Identità

**Stabilisci se le seguenti equazioni sono identità.**

**26**  $(x + 1)^2 - x(x + 1) = x(x + 1) - 1 - x^2$  | [No]

**27**  $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = 2(x^2 + 1)$  [Sì]

**28**  $(x + 1)^2 + (x + 1)(x - 1) = 2x(x + 2)$  | [No]

**29**  $x(x + 3) + (x - 1)^2 = 2x^2 + 2x$  [No]

**30**  $(x + 1)(2 - x) + (x - 2)^2 = 6 - 3x$  [Sì]

**31**  $(2x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = -8x$  [Sì]

**32**  $x(x + 1) + (x - 2)(x + 3) = 2(x - 3)^2$  [No]

## 4. CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI

### Equazioni algebriche:

equazioni nelle quali compaiono le quattro operazioni elementari e le potenze.

**Irrazionale:** Se le incognite compaiono sotto il segno di radice **Es.:  $\sqrt{x} - 1$**

**Razionale:** Se le incognite non compaiono sotto il segno di radice.

**Numeriche:** Se compaiono numeri e incognita. **Es.:  $2x - 1$**

**Letterarie:** Se compaiono numeri lettere e incognita. **Es.:  $ax + 2$**

**Intera:** Se le incognite non compaiono mai a denominatore,  
l'equazione si dice Intera

## 4. CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI

**Intera:** Se le incognite non compaiono mai a denominatore,

$$5x - 3 + 4x = -3x + 1 + 5x$$

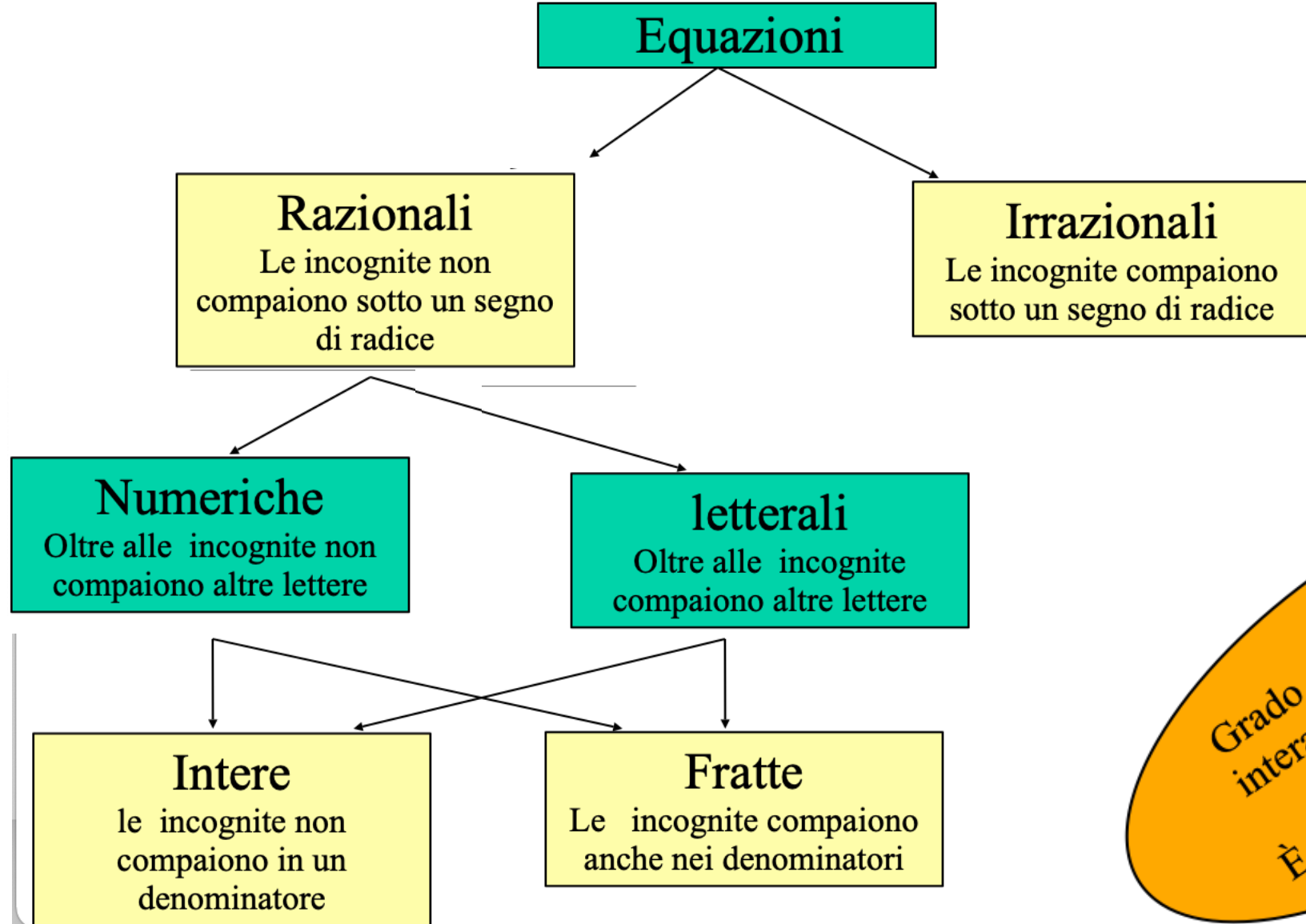
$$\frac{3}{2}x - 1 + \frac{4}{5} = 3x - \frac{2}{3}x + 3$$

**Fratta o frazionaria:** Se l'incognita compare al denominatore

**Esempio**

$$\frac{x - 3}{5x + 1} - \frac{3}{2} + 2x = \frac{2x - 3}{10x + 2} + 2$$

# 4. CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI



Grado di un'equazione  
intera nella forma  $P(x) = 0$ :  
È il grado del polinomio

## 5. EQUAZIONI EQUIVALENTI

Date le seguenti due equazioni:

$$3x + 1 = x + 5$$

$$6x + 2 = 2x + 10$$

Entrambi le equazioni hanno soluzione  $x = 2$

Verifichiamo:

1<sup>a</sup> equazione  $\longrightarrow$   $3 \cdot 2 + 1 = 2 + 5$   $\longrightarrow$   $7 = 7$

**uguaglianza verificata**

2<sup>a</sup> equazione  $\longrightarrow$   $6 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot 2 + 10$   $\longrightarrow$   $14 = 14$

**uguaglianza verificata**

LE equazioni che ammettono la stessa soluzione si dicono **equivalenti**.



Mathematica  
**M** Esempio 1

La seguente equazione  $2x + 1 = -4x + 4$  ammette come soluzione  $x = \frac{1}{2}$ , Infatti:

$$2x + 1 = -4x + 4 \longrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = -4\left(\frac{1}{2}\right) + 4 \longrightarrow 2 = 2$$

La seguente equazione  $4x - 3 = 2x - 1$  ammette come soluzione  $x = \frac{1}{2}$ , Infatti:

$$4x - 3 = 2x - 1 \longrightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \quad -1 = -1$$

L'equazione è **equivalente** a quella data in quanto ammette la stessa soluzione.

La seguente equazione  $2x + 1 = -4x + 4$  ammette come soluzione  $x = \frac{1}{2}$ , Infatti:

$$2x + 1 = -4x + 4 \longrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = -4\left(\frac{1}{2}\right) + 4 \longrightarrow 2 = 2$$

Consideriamo la seguente equazione  $2x + 1 = -4x + 4$  vediamo se ammette la stessa soluzione

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x - 5 = x + 3 &\longrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) - 5 = \frac{1}{2} + 3 \longrightarrow \frac{1}{8} - 5 = \frac{1}{2} + 3 \longrightarrow \frac{1 - 40}{8} = \frac{1 + 6}{2} \\ &\longrightarrow \frac{-39}{8} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

L'equazione **non è equivalente** a quella data in quanto non ammette la stessa soluzione.

## 6. PROCEDURA RISOLUTIVA DI UN'EQUAZIONE DI 1° GRADO

### a. Principi di equivalenza e conseguenze

#### PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA: -

Addizionando o sottraendo una stessa quantità ad entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data (ossia l'equazione non cambia).

**ESEMPIO:**  $4x - 27 = -6x + 3$  Ammette come soluzione  $x = 3$

addizionando ad entrambi i membri la quantità **10**.

$$4x - 27 + 10 = -6x + 3 + 10$$

le due equazioni sono equivalenti,  
ammettono la stessa soluzione  $x = 3$ .

**Lo stesso discorso vale se sottraiamo una stessa quantità**

## SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA –

Moltiplicando o dividendo per una stessa quantità entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data (ossia l'equazione non cambia).

**Esempio:**  $2x - 5 = -4x + 7$  ammette come soluzione  $x = 2$

moltiplicando entrambi i membri per la quantità **5**. Si ottiene :

$$5 \cdot (2x - 5) = 5 \cdot (-4x + 7)$$

le due equazioni sono equivalenti,  
 ammettono la stessa soluzione  $x = 2$ .

**Lo stesso discorso vale se dividiamo per una stessa quantità**

Risolviamo l'equazione algebrica intera:

$$7x - 6 + 2x + 5 = 2x - 15 + 5x$$

$$7x - 6 + 2x + 5 = 2x - 15 + 5x$$

$$7x + 2x - 2x - 5x = 6 - 5 - 15$$

1. Portiamo i termini contenente l'incognita al primo membro
2. i termini noti al secondo membro.

Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (**conseguenza del 1° principio di equivalenza**), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$$2x = -14$$

3. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

$$2x = -4$$

3. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita  
(conseguenza del 2° principio di equivalenza)

$$\frac{2x}{2} = -\frac{14}{2} \longrightarrow x = -7$$

Per verificare se la soluzione trovata è esatta, bisogna sostituirla al posto della  $x$  nell'equazione di partenza ed ottenere l'uguaglianza tra primo e secondo membro:

$$7x - 6 + 2x + 5 = 2x - 15 + 5x$$

$$7 \cdot (-7) - 6 + 2 \cdot (-7) + 5 = 2 \cdot (-7) - 15 + 5 \cdot (-7) \longrightarrow -49 - 6 - 14 + 5 = -14 - 15 - 35$$
$$-64 = -64$$

**uguaglianza verificata**

## 7. SOLUZIONI DETERMINATE, INDETERMINATE, IMPOSSIBILI

$$ax = b$$

Data un' equazione in forma normale  $ax = b$

se  $a \neq 0$  l' equazione è **determinata** : ha un' **unica soluzione**  $x = \frac{b}{a}$

se  $a = 0$  allora { se  $b = 0$  l' equazione è **indeterminata**: ha infinite soluzioni  
(qualsiasi  $x \in \mathbb{R}$ )

se  $b \neq 0$  l' equazione è **impossibile**: non ha **nessuna soluzione**



# 6. Soluzioni di una equazione

$$8 + x = 12$$

$$x = ?$$

Determinata

Soluzioni numeriche

$$8 \cdot x = 32$$

$$x = 4$$

Determ.  
 $8 \cdot 4 = 32$

Impossibile

Nessuna soluzione

$$0 \cdot x = 12$$

*mai*

Imposs.

Indeterminata

Identità

$$0 \cdot x = 0$$

*sempre*

Indeter.

Insieme delle soluzioni  
di una equazione può essere

Finito  $8 \cdot x = 32$

Infinito  $0 \cdot x = 0$

Vuoto  $x^2 = -1$



L'equazione si dice

Determinata

Indeterminata

Impossibile

Tra le equazioni indeterminate, rivestono particolare importanza

**le identità:**

**DEFINIZIONE -**

Si definisce **identità** un'uguaglianza che è sempre verificata, qualunque sia il valore che viene attribuito all'incognita  $x$ .

Per risolvere la seguente la seguente equazione algebrica:

$$(5x + 1)^2 - 5(2x + 3) = (5x - 2)(5x + 2) - 2x \quad \text{si deve procedere come segue.}$$

1. Si applicano le regole del calcolo algebrico per eliminare le parentesi e sviluppare i prodotti notevoli:

$$25x^2 + 1 + 10x - 10x - 15 = 25x^2 - 4 - 2x$$

2. Si portano i termini contenente l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro, cambiandoli di segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza):

$$25x^2 + 10x - 10x - 25x^2 + 2x = -1 + 15 - 4$$

$$\cancel{25x^2} + \cancel{10x} - \cancel{10x} - \cancel{25x^2} + 2x = -1 + 15 - 4$$

3. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:  $2x = 10$

4. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \longrightarrow \quad x = 5$$

Per risolvere la seguente la seguente equazione algebrica:

$$(5x + 1)^2 - 5(2x + 3) = (5x - 2)(5x + 2) - 2x$$

$$25x^2 + 1 + 10x - 10x - 15 = 25x^2 - 4 - 2x$$

$$25x^2 + 10x - 10x - 25x^2 + 2x = -1 + 15 - 4$$

$$\cancel{25x^2} + \cancel{10x} - \cancel{10x} - \cancel{25x^2} + 2x = -1 + 15 - 4$$

$$2x = 10$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \longrightarrow \quad x = 5$$

Equazione algebrica intera:  $\frac{3}{2}x - 3 + \frac{5}{4}x = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}x + 4$

1 Troviamo il mcm tra i denominatori :

$$\frac{12x - 24 + 10x}{8} = \frac{3 - 2x + 32}{8}$$

2. Eliminamo il mcm moltiplicando entrambi i membri per il mcm  
(conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$8 \cdot \frac{12x - 24 + 10x}{8} = \frac{3 - 2x + 32}{8} \cdot 8$$

3. Termini incognita al primo membro e termini noti al secondo membro

ATTENTI AL SEGNO

(conseguenza del 1° principio di equivalenza):

$$12x + 10x + 2x = 24 + 3 + 32$$

4. Riduciamo in termini simili:

$$24x = 59$$

5. Dividiamo i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{24x}{24} = \frac{59}{24} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{59}{24}$$

Se l'uguaglianza non è verificata,  
c'è un errore o nella risoluzione dell'equazione, o nella verifica.

## 8. Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni.

**78**  $2x - 3 = 5x - 2$

**79**  $3x - 2 = -x$

**80**  $5x - 7x = 8x - 1$

**81**  $9 - 2x = 3x - 1$

**82**  $-2(x - 1) = 3(x + 1)$

**83**  $5x - 1 = -(1 - 2x)$

**84**  $4(3 - x) = x$

**85**  $3x - (x - 1) = 7$

**86**  $1 - x = 2x - 3$

**87**  $5x + 8 = -2x - 6$

**88**  $2(x - 1) + 3(2 - x) = x - 4$

**89**  $-2(x - 1) - (2x - 3) = 5 - x$

**90**  $-2(x - 1) + 3(4 - x) = 2(x - 3) - 5(2x + 1)$

**91**  $2 - 3[x - 2(x + 1)] = x - [2 - (x - 3)]$

$\left[-\frac{1}{3}\right]$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

$\left[\frac{1}{10}\right]$

[2]

$\left[-\frac{1}{5}\right]$

[0]

$\left[\frac{12}{5}\right]$

[3]

$\left[\frac{4}{3}\right]$

[-2]

[4]

[0]

$\left[-\frac{25}{3}\right]$

[-13]

**92**  $x - 2(x + 1) - 3(2 - x) = 5[x - (3x + 1)]$

**93**  $x - 2 - 2(x + 3) = 3 - 2[3(x - 2) - 2(x - 1)]$

**94**  $-2[2(x - 3) - x] + 3[-2(1 - x) - 4x] = 8x$

**95**  $x^2 + (x - 1)(x + 2) = 2(x - 1)(x + 1)$

**96**  $2 - x[3x - 2(x - 2)] = 1 - (x + 1)(x - 2)$

**97**  $2(2x - 1)(x + 2) - (2x - 1)^2 = x + 2$

**98**  $x - \{x - 2[3x - (x - 1)]\} = -(x - 3)$

**99**  $x(x - 2)(x + 2) - 2x(x - 1)^2 = x^2(4 - x) + 6$

**100**  $2(x - 1) - x[(2x - 1) - (3x + 1)] = (x - 2)^2$

**101**  $(x - 1)^2 - 2(x + 1)(x - 1) = (x + 2)^2 - 2x(x - 3)$

**102**  $(x - 1)(x + 2) - x(x + 3) = (x - 2)(x + 2) - (x - 1)^2$

**103**  $(2x - 1)(2x + 1) = (2x - 1)^2$

**104**  $x(x - 2) = (x + 3)^2$

$\left[\frac{1}{4}\right]$

[19]

$\left[\frac{3}{8}\right]$

[0]

$\left[-\frac{1}{5}\right]$

$\left[\frac{7}{9}\right]$

$\left[\frac{1}{5}\right]$

[-1]

$\left[\frac{3}{4}\right]$

$\left[-\frac{1}{12}\right]$

$\left[\frac{3}{4}\right]$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

$\left[-\frac{9}{8}\right]$



$$\mathbf{99} \quad (5 - x)(5 + x) + (x - 2)^2 = 1 \quad [7]$$

$$\mathbf{100} \quad (x - 2)^2 - (x + 1)(x - 3) = 2(3 - x) \quad [\text{Impossibile}]$$

$$\mathbf{101} \quad 20(5 - x) = 10(x + 1) + 80 \quad \left[ \frac{1}{3} \right]$$

$$\mathbf{102} \quad (5x - 1)^2 - (x - 5)(x + 5) - 24x^2 = 2(13 - 5x) \quad [\text{Indeterminata}]$$

$$\mathbf{103} \quad (2x - 1)^2 = 3x^2 + (x + 1)^2 \quad [0]$$

$$\mathbf{104} \quad 2(x - 1) - 3(3 - x) = 5(x - 1) - 6 \quad [\text{Indeterminata}]$$

$$\mathbf{105} \quad 3(x + 2) - 2(2 - x) = x - 7 \quad \left[ -\frac{9}{4} \right]$$

$$\mathbf{106} \quad -2(x - 1) - (2 - x) = 3(x - 1) - 1 \quad [1]$$

## 10. Esercizi

- 113**  $(5x - 2)^2 + 1 = 5(x - 1)(x + 1) + 20x^2$   $\left[\frac{1}{2}\right]$
- 114**  $(3 - x)(3 + x) = 3 - (x - 3)^2$   $\left[\frac{5}{2}\right]$
- 115**  $(x - 1)^2 - (x + 1)^2 = x(x + 1) + (1 - x)(3 + x)$   $[-1]$
- 116**  $(2x - 1)^2 - 11(x - 1) = 4(x - 2)^2$   $[4]$
- 117**  $-2(2x - 1) + 3(4x - 4) + 7 = 8x - 1$   $[\text{Impossibile}]$
- 118**  $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 + (x - 1)(x + 1) = 3x^2 + 1$   $[\text{Indeterminata}]$
- 119**  $2(x - 1) + 3(2 - x) = x - 4$   $[4]$
- 120**  $-2(x - 1) - (2x - 3) = 5 - x$   $[0]$
- 121**  $-2(x - 1) + 3(4 - x) = 2(x - 3) - 5(2x + 1)$   $\left[-\frac{25}{3}\right]$
- 122**  $2 - 3[x - 2(x + 1)] = x - [2 - (x - 3)]$   $[-13]$

**VERIFICA N. 3** (ripasso)

Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti numerici interi.

1.  $-3x + 3(2 - x) + 4(x + 1) = 5(1 - 2x) + 2 - x.$
2.  $2[(x - 12) - (16 - x)] = 3[(5x - 4) - 4(3 + x)].$
3.  $3(x - 1) - 2(3 - x) = 4(x + 2) + x - 17.$
4.  $6x - \{2x - 4x + 2(x + 8) + 2 - 7\} = 2(x + 4) + 5.$
5.  $1 + 2x - [x - 1 - (2x + 1) - 3] = x + 2.$
6.  $6 - (1 + 2x) - 1 - 2[3(x - 5) - 5x + 4(2x + 2) - 1] = 5x - 2.$
7.  $2x - 5(3x + 1) = 4 - 7x - 2(3x - 4).$
8.  $(3x - 1)^2 - 3x(x - 3) = 2x(3x - 2) + 5x.$
9.  $(x - 2)^3 - 3x(2 - x) = (x - 1)^3 + 2.$
10.  $5x - (1 - x)(1 + x) = -5 + (x + 2)^2.$
11.  $(2x + 1)(x - 1) - 3x(1 - x) = 5x^2 - (5x - 2).$
12.  $1 + (x - 1)^2 + 2x - 2 = 1 + (x + 1)(x + 2); \quad 3 + (x - 2)^2 - (x + 1)^2 = 0.$
13.  $-1 + 5(x + 1) - (1 + x)(1 - x) - (5 + 2x) = (x + 3)^2 - 11.$
14.  $3 + (2 - 3x)^2 - (3x + 1)(3x - 1) + 1 = 3(x - 1) - 15x.$
15.  $2[5(x + 1) - 2(1 + x)^2 - 2x(5 - x) + 1] = 26.$
16.  $4(2x - 7)(3x + 14) = 2(3x - 11)(4x + 21).$
17.  $3(1 - y)(5 - 9y) = 2(15y^2 + 22y + 7) - (3y^2 + 51y - 71).$

