

Le disequazioni
di primo e
secondo grado.



Definizione disequazione

Si definisce **disequazione** in una sola incognita una disuguaglianza tra due espressioni, di cui una almeno letterale, verificata solo per particolari valori attribuiti all'incognita

Esempi
di
disequazioni

$$1) \quad 4x + 7 < 2x$$

$$2) \quad (x + 2)^2 - 3x \geq x \cdot (3 - x)$$

$$3) \quad 2 + \sqrt{x - 1} > 3x$$

$$4) \quad \frac{x + 3}{x} + 2 \leq \frac{1}{4}x$$

M Soluzioni di una disequazione

Si dice **SOLUZIONE** di una disequazione ogni numero che sostituito all'incognita rende vera la disuguaglianza

Esempio: data la disequazione:

$$4x + 7 < 2x$$

trovare la soluzione

$$4x + 7 < 2x$$

$$4x - 2x < -7$$

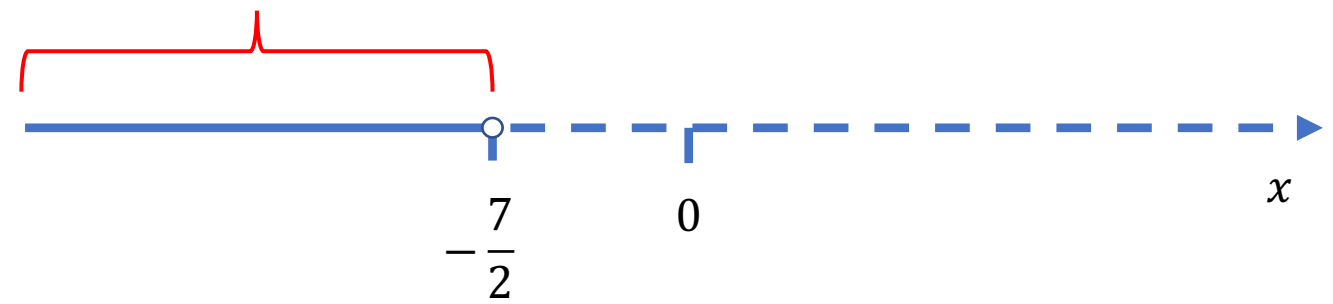
$$2x < -7$$

$$\frac{2x}{2} < \frac{-7}{2}$$

$$\cancel{2}x < \frac{-7}{\cancel{2}}$$

Soluzione: $x < \frac{-7}{2}$

soluzioni



M Soluzioni di una disequazione

Si dice **SOLUZIONE** di una disequazione ogni numero che sostituito all'incognita rende vera la disuguaglianza

Esempio: data la disequazione:

$$4x + 7 \leq 2x$$

trovare la soluzione

$$4x + 7 \leq 2x$$

$$4x - 2x \leq -7$$

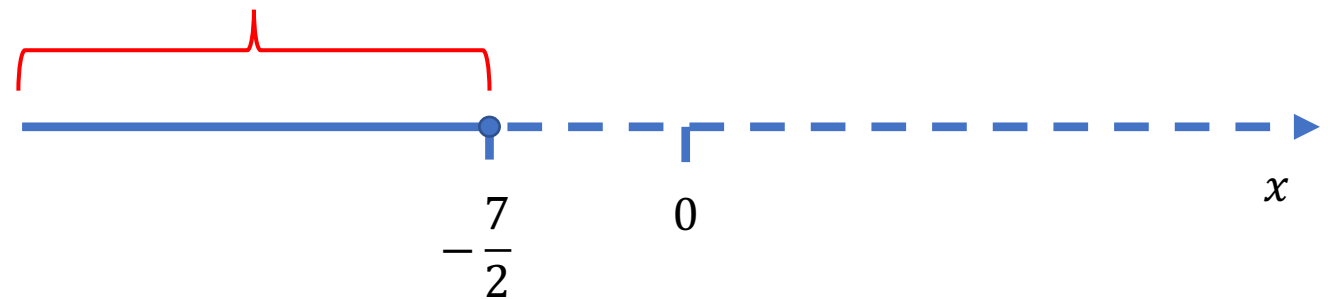
$$2x \leq -7$$

$$\frac{2x}{2} \leq \frac{-7}{2}$$

$$\cancel{2}x \leq \frac{-7}{\cancel{2}}$$

Soluzione: $x \leq \frac{-7}{2}$

soluzioni



M Grado di una disequazione

Si definisce grado di una disequazione razionale intera il massimo esponente con cui compare l'incognita

Esempi

1) $x + 2 > 5$

Disequazione di **primo grado**

2) $3x^2 - 2x \leq 0$

Disequazione di **secondo grado**

3) $2x^5 - 3x^2 > 4$

Disequazione di **quinto grado**

Le disequazioni **1° GRADO** si dicono anche disequazioni **LINEARI**

Risolvi le seguenti disequazioni lineari intere.

80 $-x > 2x - 3$ $[x < 1]$

81 $2x - 3 > 4x - 7$ $[x < 2]$

82 $3x - 1 > 2x - 4$ $[x > -3]$

83 $5x - 1 > 6x - 2$ $[x < 1]$

84 $2x > 3(x - 2)$ $[x < 6]$

85 $2(x - 1) > -3(2 - x)$ $[x < 4]$

86 $\frac{x - 1}{2} > \frac{x + 4}{3}$ $[x > 11]$

87 $\frac{x - 5}{6} - \frac{x}{2} > \frac{1}{3}$ $[x < -\frac{7}{2}]$

88 $\frac{4 - x}{2} \leq \frac{x}{5} + \frac{1}{10}$ $[x \geq \frac{19}{7}]$

89 $\frac{x}{20} > \frac{1}{15} - \frac{x + 1}{10}$ $[x > -\frac{2}{9}]$

90 $2(x - 1) - x > 3 - x$ $[x > \frac{5}{2}]$

91 $x - (x - 2) + 2(x + 3) > 1 - (2 - 3x)$ $[x < 9]$

92 $3(x - 1) - 2(x + 2) < -3(x - 1)$ $[x < \frac{5}{2}]$

93 $1 - 2(x + 3) - (3 - x) \leq 3(2 - x)$ $[x \leq 7]$

94 $3(x - 1) - (x + 7) < 2(1 - x) + 1$ $[x < \frac{13}{4}]$

95 $3(x - 1) - 2(x - 1) - (1 - x) > 1 + 8x$ $[x < -\frac{1}{2}]$

96 $-2[3 - 2(x + 1)] \geq 2 - [-2(x + 1) + 3x]$ $[x \geq \frac{6}{5}]$

Classificazione delle disequazioni

TIPO disequazione	Disequazione con	Esempi	
Intera	Incognita solo al numeratore	$2x - 1 \leq 3x + 4$	
Fratta	Incognita solo al denominatore	$\frac{x^2 + 3}{x - 1} < x - 5$	
Numerica	Coefficienti numerici	$2x^2 - x + 5 > 0$	
Letterale	Coefficienti letterali	$ax^3 - bx \geq c$	
Determinata	Soluzioni un Sottoinsieme di \mathbb{R}	$x < 7$	
Indeterminata	Soluzioni coincidenti con \mathbb{R}	$(x - 3)^2 \geq 0$	$(x - 3)^2 \geq 0$ è sempre > 0
Impossibile	Non ha soluzioni	$(x - 3)^2 < 0$	$(x - 3)^2 < 0$ Impossibile



$$\underline{4x} + \underline{3x^2} + 6 > + 2x$$

$$3x^2 + 4x + 6 > + \underline{2x}$$

$$3x^2 + \underline{4x - 2x} + 6 > 0$$

$$3x^2 + 2x + 6 > 0$$

Forma normale

Ogni disequazione di secondo grado può essere ricondotta nella forma normale:

$$a x^2 + b x + c > 0, \text{ con } a \neq 0.$$

O nelle analoghe che si ottengono con i segni $<$, \leq , \geq .

Equazione associata

Per determinare le soluzioni della disequazione si considera l'equazione associata:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

e si distinguono tre casi a seconda del segno del discriminante Δ :

$$\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0.$$

$$3x^2 + 2x + 6 = 0$$

ESEMPIO

Risolviamo $3x^2 - x - 2 \leq 0$.

Equazione associata: $3x^2 - x - 2 = 0$.

Discriminante: $\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = \underline{25} > 0$.

Soluzioni: $x_1 = -\frac{2}{3}$; $x_2 = 1$.

Il coefficiente di x^2 è *positivo*, $a > 0$

il discriminante Δ è *positivo*, $\Delta > 0$

il segno richiesto è *negativo*, < 0 .

La disequazione è verificata per *valori interni*

all'intervallo delle radici: $-\frac{2}{3} < x < 1$.

$a > 0, \Delta > 0$

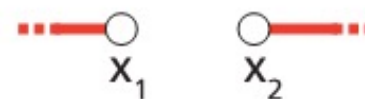
$ax^2 + bx + c < 0$



$x_1 < x < x_2$

$a > 0, \Delta > 0$

$ax^2 + bx + c > 0$



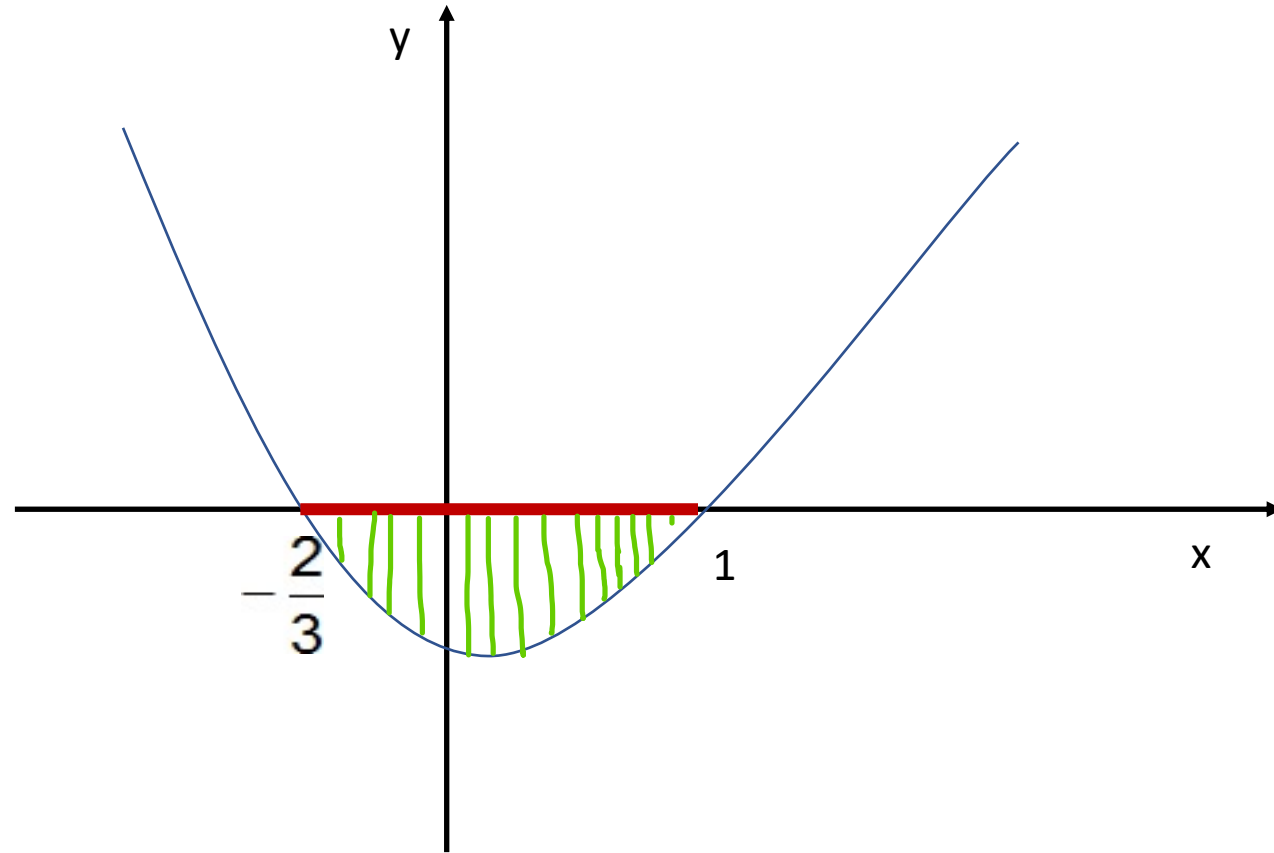
$x < x_1 \vee x > x_2$

$ax^2 + bx + c < 0$



$x_1 < x < x_2$

$$3x^2 - x - 2 < 0$$



ESEMPIO

Risolviamo $x^2 - 2x - 3 > 0$.

Equazione associata: $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Discriminante: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$.

Soluzioni: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$.

Il coefficiente di x^2 è *positivo*, $a > 0$

il discriminante Δ è *positivo*, $\Delta > 0$

il segno richiesto è *negativo*, > 0 .

La disequazione è verificata per *valori interni*

all'intervallo delle radici: $x_1 < -1 \vee x_2 > 3$

$a > 0, \quad \Delta > 0$

$ax^2 + bx + c > 0$

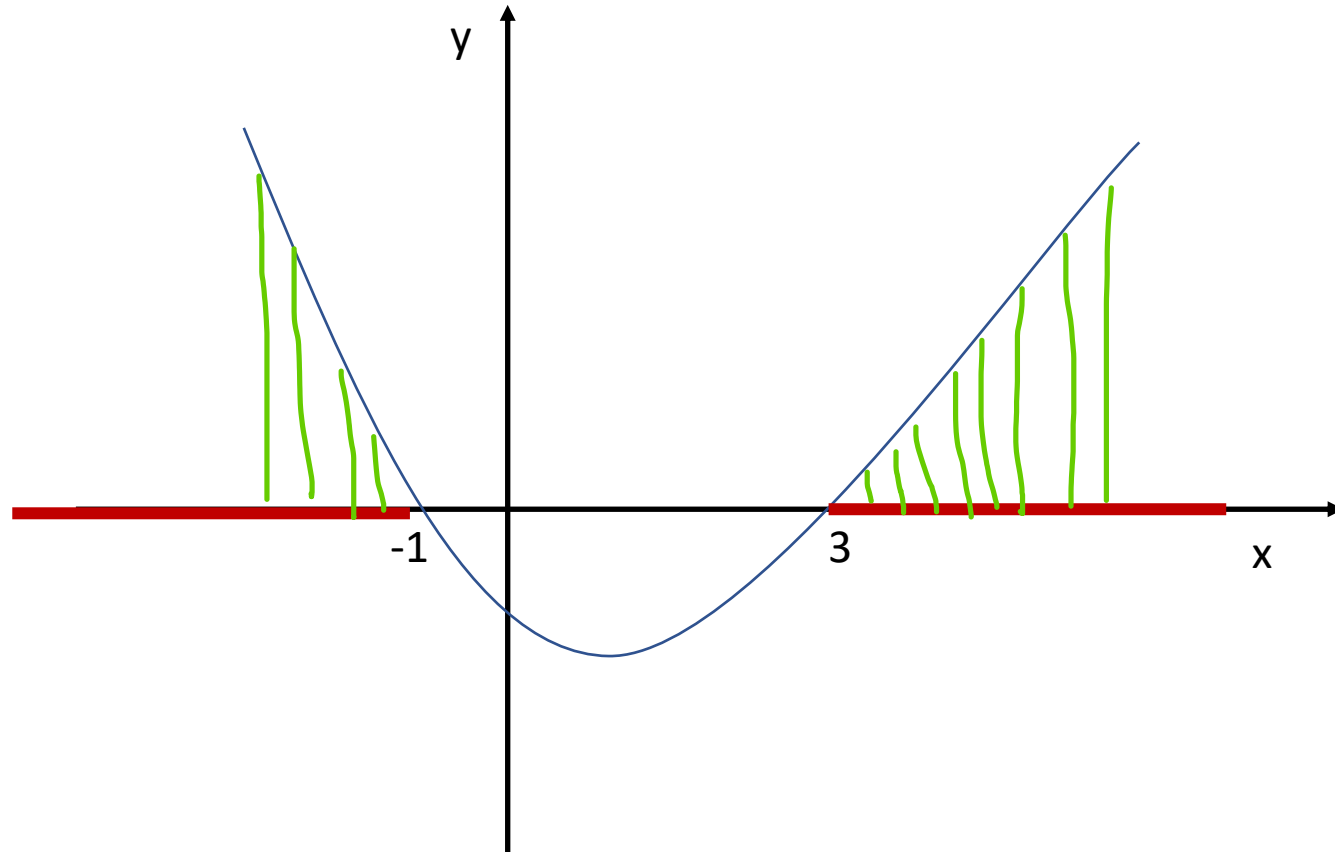
$x < x_1 \vee x > x_2$

$a > 0, \Delta > 0$

$ax^2 + bx + c > 0$ $ax^2 + bx + c < 0$

$x < x_1 \vee x > x_2$ $x_1 < x < x_2$

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$



L'EQUAZIONE ASSOCIATA HA $\Delta = 0$

ESEMPIO

Risolviamo $25x^2 - 20x + 4 \geq 0$.

Equazione associata: $25x^2 - 20x + 4 = 0$.

Discriminante: $\Delta = 400 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 0$.

Soluzioni: $x_1 = x_2 = \frac{2}{5}$.

Il coefficiente di x^2 è *positivo*, $a > 0$

il discriminante è *nullo*, $\Delta = 0$

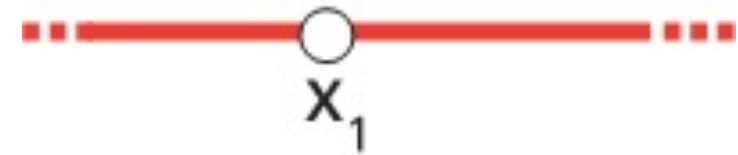
il segno richiesto è *positivo*, $a > 0$

La disequazione è verificata per ogni valore di x purché:

$$x \neq \frac{2}{5}$$

$$a > 0 \quad \Delta = 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0$$

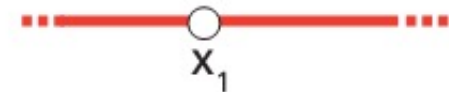


$$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$$

$$a > 0, \Delta = 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0$$

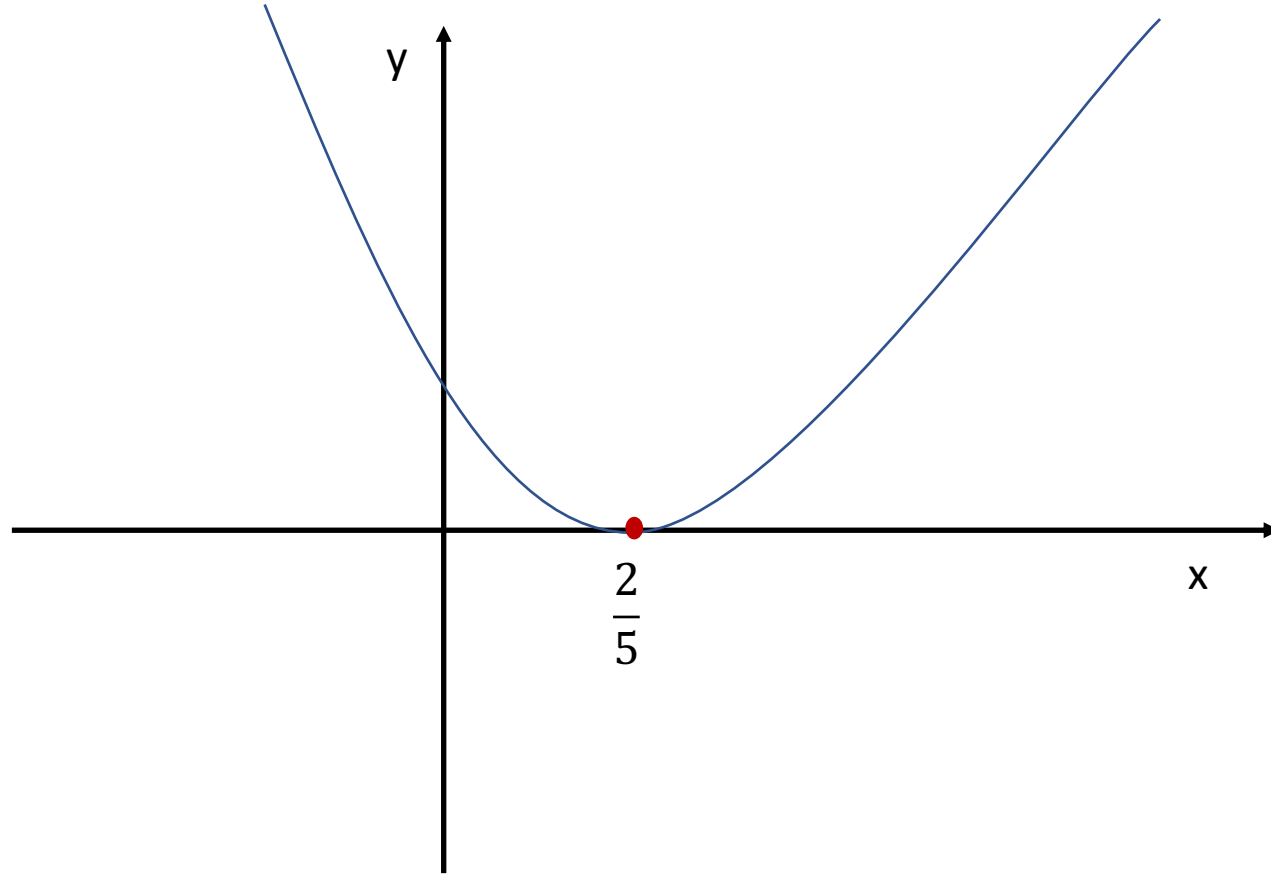
$$ax^2 + bx + c < 0$$



$$\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$$

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

$$25x^2 - 20x + 4 > 0 .$$



ESEMPIO

Risolviamo $\underline{12x^2} - 3x + \underline{1} < 0$.

Equazione associata: $\underline{12x^2} - 3x + 1 = 0$.

Discriminante: $\Delta = 9 - 4 \cdot 12 = -39 < 0$.

Soluzioni: *nessuna*.

Il coefficiente di x^2 è *positivo*, $a > 0$

il discriminante è *negativo*, $\Delta < 0$

il segno richiesto è *negativo*. < 0

La disequazione non è mai verificata.

$$a > 0, \Delta < 0$$

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

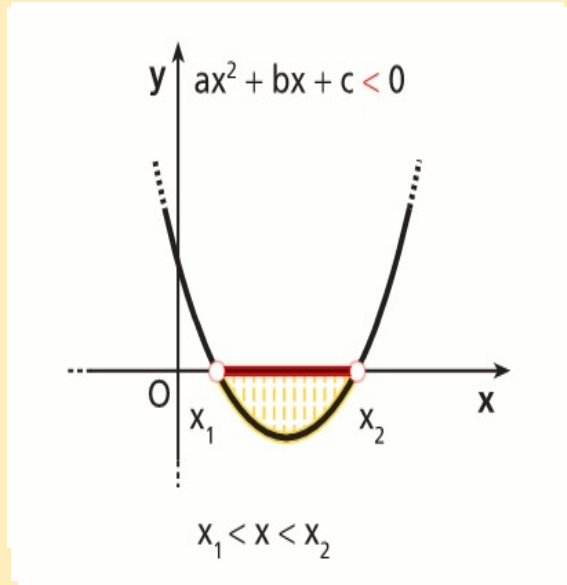
$$a > 0, \Delta < 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$\nexists x \in \mathbb{R}$$

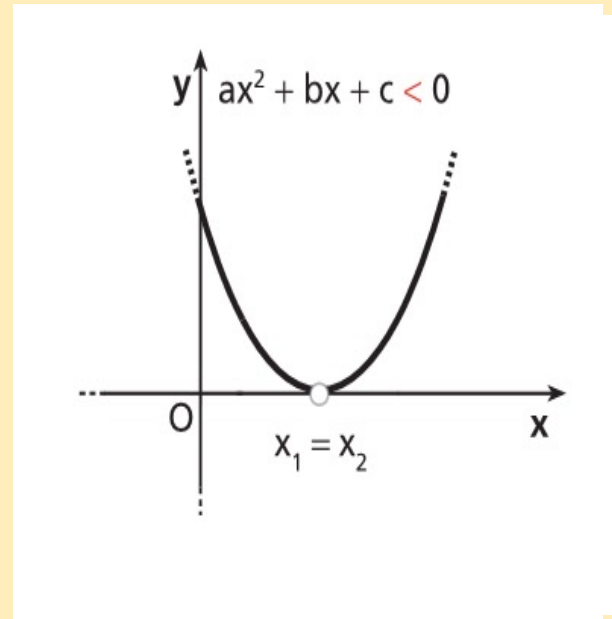
Grafico di $y = ax^2 + bx + c$

Caso I $(\Delta > 0)$



Due intersezioni con l'asse x .
 Parte del grafico ha $y < 0$.
 $y < 0$ per $x_1 < x < x_2$.

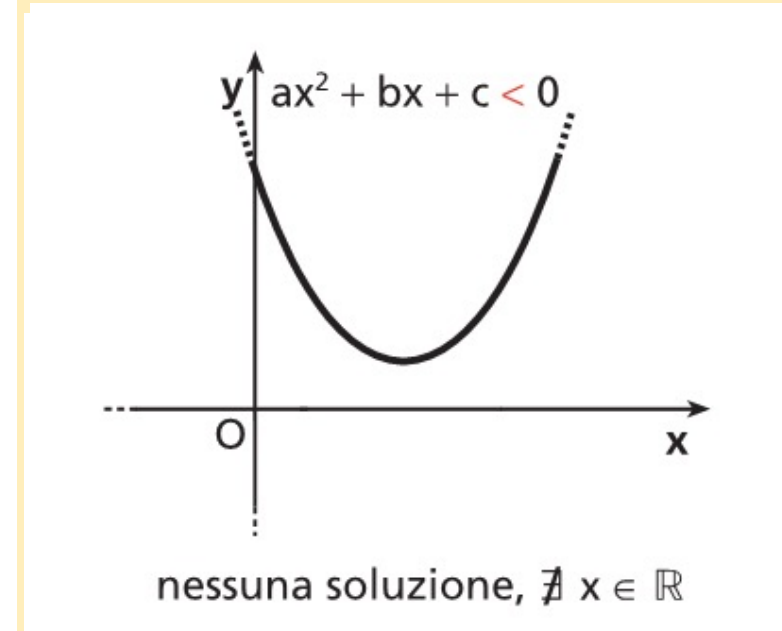
Caso II $(\Delta = 0)$



Un'intersezione con l'asse x .
 Nessun valore di x ha $y < 0$.

Studiamo la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ (con $a > 0$)

Caso III $(\Delta < 0)$



Zero intersezioni con l'asse x .
 Nessun punto ha $y < 0$.
 Nessun valore di x ha $y < 0$.

Studiamo la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ (con $a > 0$).

Grafico di $y = ax^2 + bx + c$

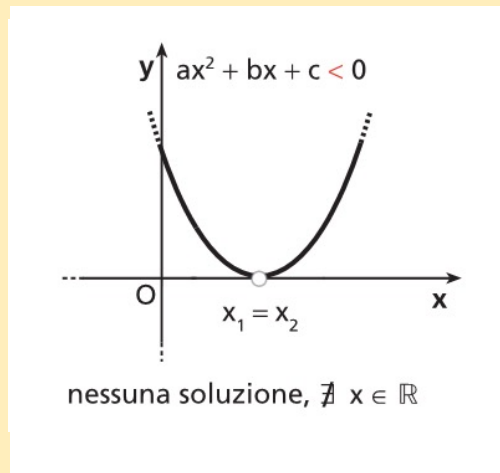
Caso I $(\Delta > 0)$

Due intersezioni con l'asse x .

Parte del grafico ha $y > 0$

$y < 0$ per $x < x_1$ et $x > x_2$

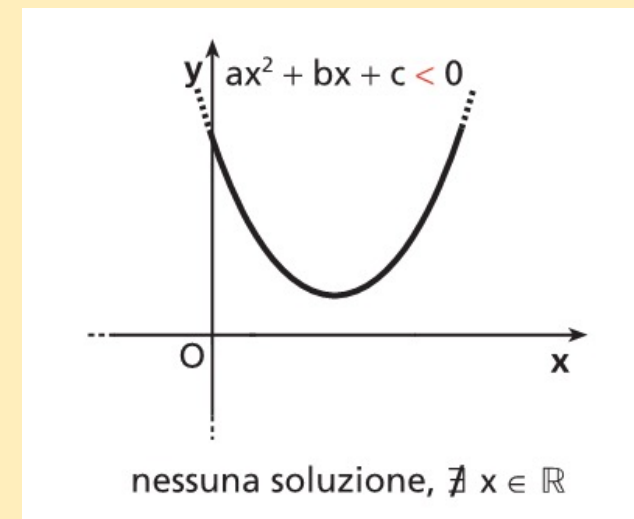
Caso II $(\Delta = 0)$



Un'intersezione con l'asse x .

Nessun valore di x ha $y < 0$.

Caso III $(\Delta < 0)$



Zero intersezioni con l'asse x .

Nessun punto ha $y < 0$.

Nessun valore di x ha $y < 0$.

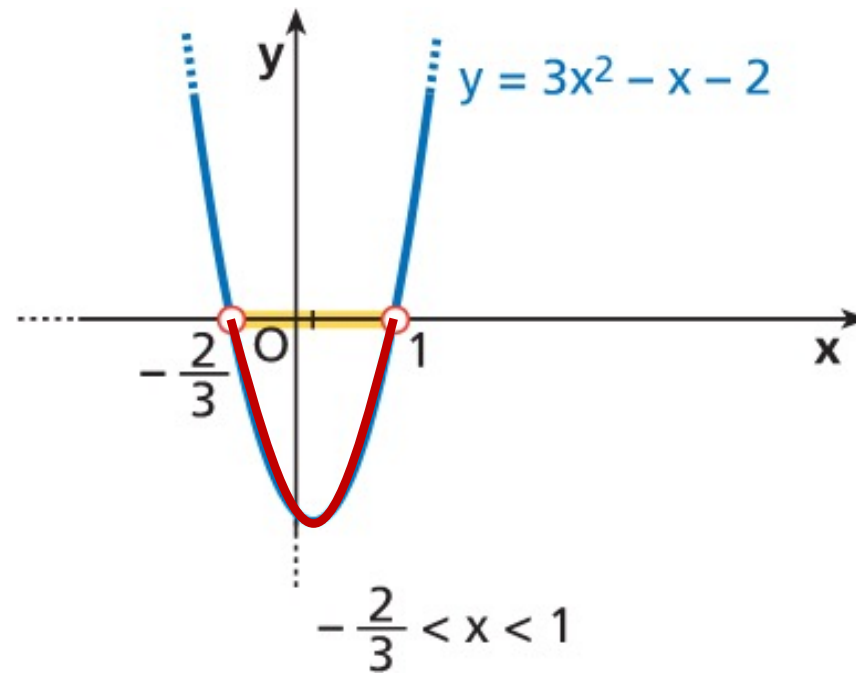
Da un esempio precedente (scheda 3):

$$3x^2 - x - 2 < 0$$

$$\Delta > 0$$

$$\text{Radici: } x_1 = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = 1.$$

Soluzione grafica



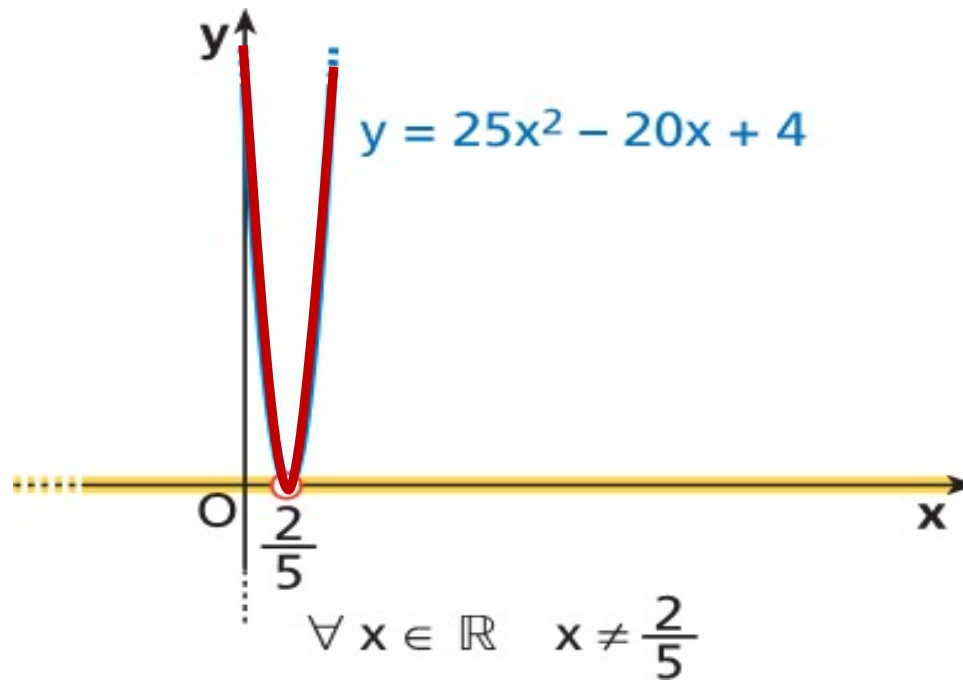
Da un esempio precedente (scheda 7):

$$25x^2 - 20x + 4 > 0$$

Unica radice: $x_1 = \frac{2}{5}$

$$\Delta = 0$$

Soluzione grafica



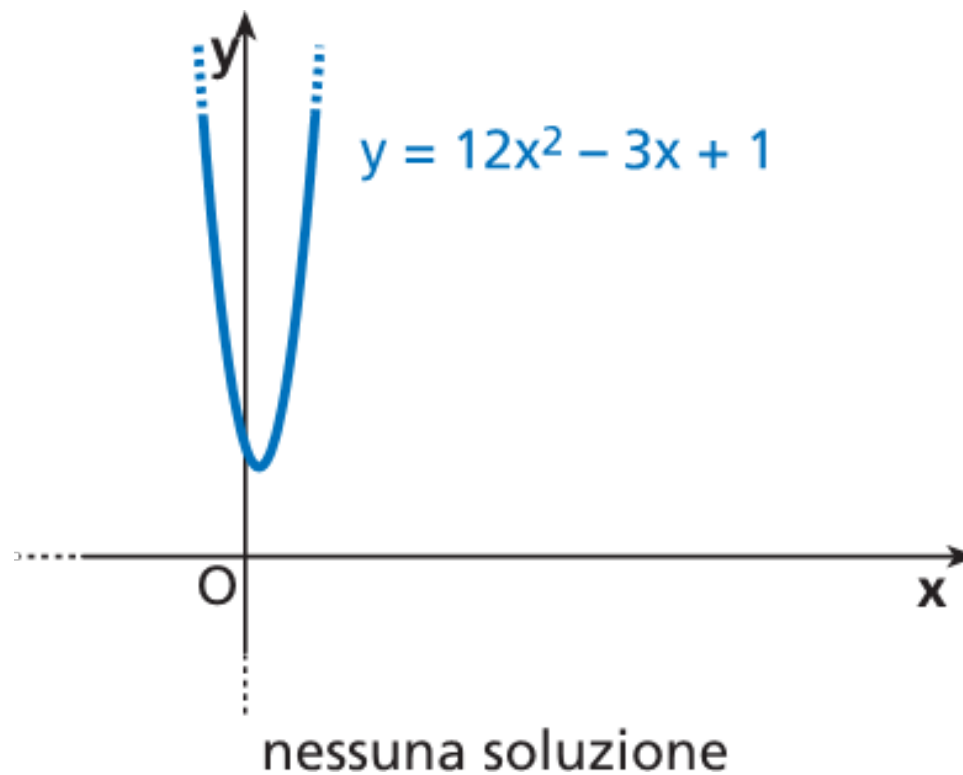
Da un esempio precedente (scheda 9):

$$12x^2 - 3x + 1 < 0$$

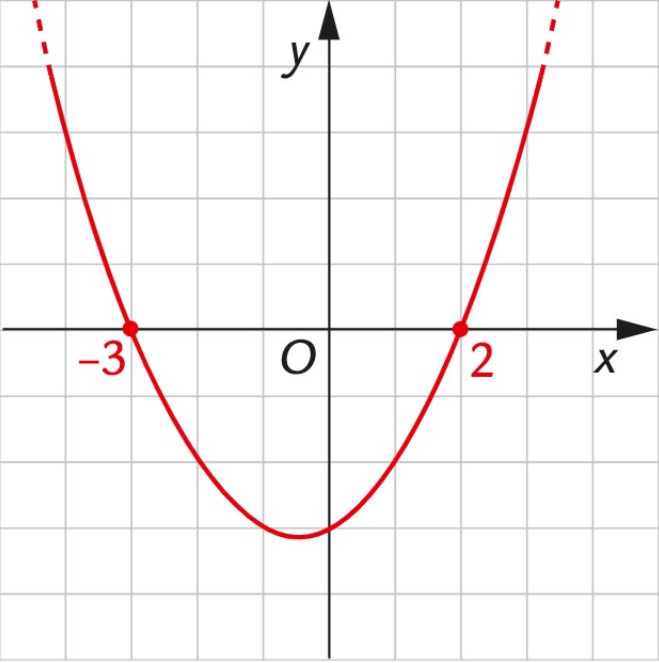
$$\Delta < 0$$

Nessuna radice.

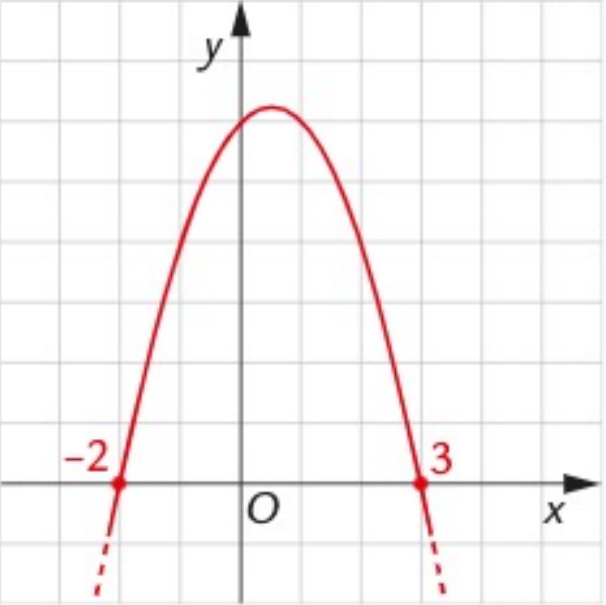
Soluzione grafica



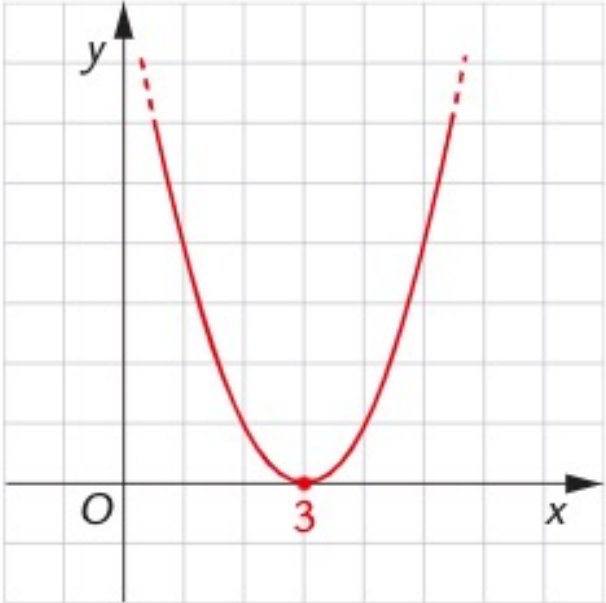
Completa la seguente tabella, deducendo dal grafico della parabola le soluzioni delle disequazioni (il primo caso e`svolto come esempio)

Grafico di $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$	Disequazione	Soluzioni della disequazione
	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 > 0$	$x < -3 \vee x > 2$
	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 < 0$	
	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \geq 0$	
	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \leq 0$	

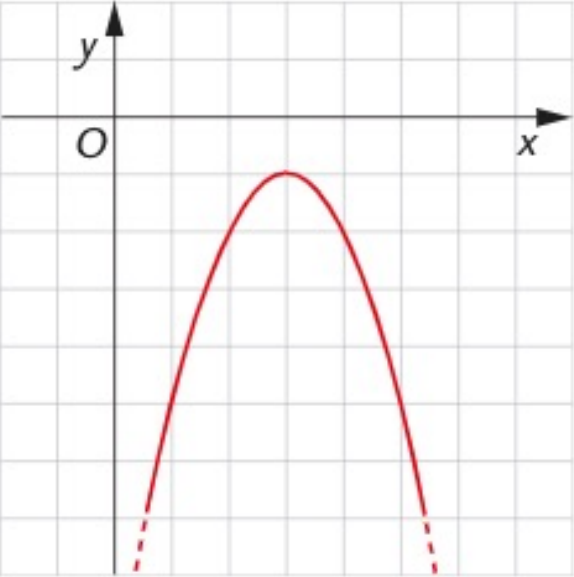
Completa la seguente tabella, deducendo dal grafico della parabola le soluzioni delle disequazioni (il primo caso è svolto come esempio)

Grafico di $y = -x^2 + x + 6$	Disequazione	Soluzioni della disequazione
	$-x^2 + x + 6 > 0$	$-2 < x < 3$
	$-x^2 + x + 6 < 0$	
	$-x^2 + x + 6 \geq 0$	
	$-x^2 + x + 6 \leq 0$	

Completa la seguente tabella, deducendo dal grafico della parabola le soluzioni delle disequazioni (il primo caso e` svolto come esempio)

Grafico di $y = x^2 - 6x + 9$	Disequazione	Soluzioni della disequazione
	$x^2 - 6x + 9 > 0$	$\forall x \in \mathbf{R} - \{3\}$
	$x^2 - 6x + 9 < 0$	
	$x^2 - 6x + 9 \geq 0$	
	$x^2 - 6x + 9 \leq 0$	

Completa la seguente tabella, deducendo dal grafico della parabola le soluzioni delle disequazioni (il primo caso e`svolto come esempio)

Grafico di $y = -x^2 + 6x - 10$	Disequazione	Soluzioni della disequazione
	$-x^2 + 6x - 10 > 0$	Impossibile
	$-x^2 + 6x - 10 < 0$	
	$-x^2 + 6x - 10 \geq 0$	
	$-x^2 + 6x - 10 \leq 0$	

133 $x^2 + 4x < 0$

$[-4 < x < 0]$

134 $x^2 - 4 > 0$

$[x < -2 \vee x > 2]$

135 $1 - x^2 > 0$

$[-1 < x < 1]$

136 $x^2 - 4x > 0$

$[x < 0 \vee x > 4]$

137 $-x^2 + 5x \geq 0$

$[0 \leq x \leq 5]$

138 $x^2 - 9x \leq 0$

$[0 \leq x \leq 9]$

139 $x^2 + 2x - 6 \geq 0$

$[x \leq -1 - \sqrt{7} \vee x \geq -1 + \sqrt{7}]$

140 $x^2 + x - 2 > 0$

$[x < -2 \vee x > 1]$

141 $2 - x^2 \geq 0$

$[-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}]$

142 $x^2 - 9 < 0$

$[-3 < x < 3]$

143 $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

$[x \leq -5 \vee x \geq 1]$

149 $x^2 - 3 > 0$

$[x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}]$

150 $-x^2 + 2x > 0$

$[0 < x < 2]$

151 $-x^2 - x + 2 > 0$

$[-2 < x < 1]$

152 $x^2 - 3 \geq 0$

$[x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3}]$

153 $2x^2 + 3x - 5 > 0$

$\left[x < -\frac{5}{2} \vee x > 1 \right]$

154 $-x^2 + 3 \geq 0$

$[-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}]$

155 $x^2 - 6x > 0$

$[x < 0 \vee x > 6]$

156 $x^2 + 3x - 4 < 0$

$[-4 < x < 1]$

157 $-x^2 + x + 20 > 0$

$[-4 < x < 5]$

158 $9 - x^2 \geq 0$

$[-3 \leq x \leq 3]$

159 $x^2 + 6x - 7 > 0$

$[x < -7 \vee x > 1]$

144 $x^2 + x \leq 0$

$[-1 \leq x \leq 0]$

145 $-x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$[-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}]$

146 $-x^2 + 4x - 3 \leq 0$

$[x \leq 1 \vee x \geq 3]$

147 $5x^2 + x \leq 0$

$\left[-\frac{1}{5} \leq x \leq 0\right]$

148 $2x^2 - x - 1 > 0$

$\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

160 $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

$[1 \leq x \leq 4]$

161 $5 - x^2 \geq 0$

$[-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}]$

162 $3x^2 - x < 0$

$\left[0 < x < \frac{1}{3}\right]$

163 $5x^2 + 4x - 1 > 0$

$\left[x < -1 \vee x > \frac{1}{5}\right]$

164 $x\sqrt{2} - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$

$[0 \leq x \leq 2\sqrt{2}]$

166 $x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$

$\forall x \in \mathbf{R}$

167 $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

$\left[x = \frac{3}{2} \right]$

168 $-9x^2 + 12x - 4 \leq 0$

$\forall x \in \mathbf{R}$

169 $2x - x^2 - 1 < 0$

$\forall x \in \mathbf{R} - \{1\}$

170 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 < 0$

[Impossibile]

171 $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

$[x = 3]$

172 $-x^2 + 4x - 4 < 0$

$\forall x \in \mathbf{R} - \{2\}$

173 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 > 0$

$\forall x \in \mathbf{R} - \{\sqrt{3}\}$

174 $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 < 0$

[Impossibile]

175 $4x^2 - 4x + 1 > 0$

$\left[\forall x \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \right]$

176 $-x^2 + 3x - \frac{9}{4} \geq 0$

$\left[x = \frac{3}{2} \right]$

177 $-x^2 + 10x - 25 > 0$

[Impossibile]

178 $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$

$\forall x \in \mathbf{R}$

179 $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \leq 0$

$[x = 2]$