

IL CALCOLO LETTERALE

I Polinomi

DEFINIZIONE. Il **polinomio** è la somma algebrica di più monomi non simili tra loro. Un polinomio che non contiene termini simili si dice **ridotto**.

ESEMPIO

$$3ab - 2b + ac$$

DEFINIZIONE. Si dice **grado relativo** di un polinomio rispetto ad una lettera il massimo esponente con cui quella lettera compare nel polinomio. Il maggiore fra i gradi dei monomi che costituiscono un polinomio rappresenta il **grado complessivo** del polinomio

ESEMPIO

$$4a^2bc^2 - a^3b^2c^2 + 3a^2bc^3$$

- Il grado relativo rispetto alla lettera a è 3
- Il grado relativo rispetto alla lettera b è 2
- Il grado relativo rispetto alla lettera c è 3
- Il grado complessivo del polinomio è 7

M I polinomi

DEFINIZIONE. Un polinomio si dice **ordinato secondo le potenze decrescenti (o crescenti) di una lettera**, quando gli esponenti della lettera stessa si succedono in modo decrescente (o crescente).

ESEMPIO

$$3x^5y + 5x^2y + 3xy + 7$$

Ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x.

DEFINIZIONE. Un polinomio si dice **completo rispetto ad una lettera** quando essa vi compare con tutte le potenze, da quella con esponente maggiore a quella con esponente di grado zero.

ESEMPIO

$$-2a^4 + \frac{3}{4}a^3b - a^2b^2 + \frac{6}{7}ab^3 - \frac{5}{4}b^4$$

Completo rispetto alle lettere a e b.

DEFINIZIONE. Un polinomio si dice **omogeneo** quando tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.

ESEMPIO

$$-2a^2b^2c + \frac{3}{4}ab^2c^2 - \frac{2}{3}a^2bc^2 + \frac{6}{5}a^3b^2$$

Omogeneo di quinto grado.

Riduci in forma normale i seguenti polinomi e stabilisci se si tratta di monomi, binomi, trinomi o quadrinomi.

3 $a^2 - 2a + 3a - 1$

4 $x^2 + 3x + x^3 - 5x$

5 $x^4y^4 - 3x^2y^2 + x^2y^2$

6 $8a^3x^2 - 7a^2x^3 + 8ax^2 - 3a^2x^3 - 8a^3x^2$

7 $-m^3n^3 - 2mn + m^2n^2 + 5mn - 7 + m^3n^3$

8 $\frac{8}{7}x^5 - \frac{7}{2} + x^4y + \frac{11}{6} - x^4y - \frac{3}{2}x^5$

9 $\frac{3}{4}c^3 - 9cz^2 + \frac{1}{3}c^2z - z^3$

10 $\frac{1}{6}s^4t - \frac{3}{5} - \frac{3}{8}s^4t + \frac{1}{10} - st^4 - \frac{2}{3}s^4t$

11 $\frac{1}{6}a^2 - \frac{7}{8}ab + b^2$

12 $\frac{5}{12}x^3 - 2xy - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}xy + \frac{5}{8}x^3 - \frac{2}{3}$

13 $x^4y^4 - 6x^4y^4 + x^2y^2$

14 $x^2 + 2x^2 + 2x - (-3x) - 2$

15 $-3x + y - 4x + 5y - (-y) + (-x)$

16 $(-2xy)^2 + (-2xy) + (3xy) + (-xy)^2$

17 $x^6 + x^5 + (x^3)^2 + (x^3)^3$

22 Completa la seguente tabella.

Polinomio	Grado rispetto ad x	Grado rispetto ad y	Grado complessivo	Coefficiente del termine di grado massimo
$2x^2 + 3x^3 - x^4$
$2xy + x^2y^2 + 3x^3y^2 - x^4 + 1$
$x^3y - x^2y + 3xy - 4$

Determina il grado rispetto a ogni variabile e il grado complessivo di ciascuno dei seguenti polinomi.

23 $a^3b^2 + a^4b^5 - 3a^2b^2$

28 $5c^3z^4 - c^3z^2 + 4cz^5 - 3c^2z^3 - 10c^6z$

24 $2a^2b - 4abc + 4ac^2 + 8abc^3$

29 $-m^8n^5 + 2m^6p^4 + n^4p - 7mn^3p$

25 $x^2 + y^4 - 3x^2y$

30 $-m^2s^4t^3 - m^3s^2t^4 + 6ms^5 - 3s^3t^3$

26 $x^2y^3 + 2xy^4 - 5x^2y + y^5$

31 $2x^3y^4 - 2x^2y^3z + 3x^4z^6 - 7y^3z$

27 $4x^5y^4 + 2x^6y^3 + x^3y^5 - 7xy^3$

32 $-rv^3z^3 - 2r^3v^2z^4 + 2r^2z^5 - 3v^3z^4$

33 Per quale valore di $n \in \mathbb{N}$ il polinomio $x^2y^n + x^3yz^n + xy^{n+1}$ ha grado 12? [$n = 8$]

34 Per quale valore di $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, i due polinomi $x^{n-2}y^5 + x^4y + x^7y$ e $x^2y^4 + x^4y^3 + x^5y^5$ hanno lo stesso grado? [$n = 7$]

Stabilisci se i polinomi sono completi rispetto a ciascuna delle variabili che vi compaiono e se sono omogenei.

44 $2a^2b + 3ab + 3$

45 $x^2 + y^2 + 2x + 1$

46 $a^2b - 2ab + b^2 - 2b + a^2b^3$

47 $a^4b + a^3b^3 + a^2b^2 + ab + a$

48 $-s^2t^3 + 5s^3t^2 + 12st^4 + t^5$

49 $12x^2 + 4x^3y^3 - 7y - 5xy^2$

49 $12x^2 + 4x^3y^3 - 7y - 5xy^2$

50 $5b^4 - 4a^3b + a^2b^2 + 12a^4 - 3ab^3$

51 $r^3v^2 + 3rv^4 + 4r^4v - r^2v^3 - 2v^5$

52 Determina per quale valore di $n \in \mathbf{N}$ il polinomio $x^ny^2 + xy^7 + x^2y^2z^4$ è omogeneo.

53 Determina, se esiste, un valore di $n \in \mathbf{N}$ per cui il polinomio $x^ny + x^3y + x + 1$ è completo rispetto alla variabile x .

$$y^4 - \frac{9}{4}y^3 + \frac{11}{8}y^2 - 1$$

Per ciascuno dei seguenti polinomi, determina i valori indicati a fianco e stabilisci quali sono eventuali zeri del polinomio.

64	$P(x) = 2x^2 - 3x + 2$	$P\left(-\frac{1}{2}\right), P(0), P\left(\frac{1}{3}\right)$	$\left[4; 2; \frac{11}{9}\right]$
65	$P(x) = 2x^2 - 2x - 1$	$P(-2), P\left(\frac{1}{2}\right), P(3)$	$\left[11; -\frac{3}{2}; 11\right]$
66	$P(x) = 3x^3 - 2x - 2$	$P(-1), P(1), P(3)$	$[-3; -1; 73]$
67	$P(a) = 3a^4 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{6}$	$P(-2), P(0), P\left(\frac{1}{3}\right)$	$\left[\frac{97}{2}; -\frac{1}{6}; -\frac{13}{54}\right]$
68	$P(y) = y^4 + \frac{5}{2}y^3 - \frac{5}{2}y - 1$	$P\left(-\frac{1}{2}\right), P(-1), P(2)$	$[0; 0; 30]$
69	$P(y) = y^4 - \frac{9}{4}y^3 + \frac{11}{8}y^2 - \frac{1}{8}$	$P\left(-\frac{1}{4}\right), P(0), P(2)$	$\left[0; -\frac{1}{8}; \frac{27}{8}\right]$
70	$P(b) = b^6 - \frac{63}{8}b^3 - 1$	$P\left(-\frac{1}{2}\right), P\left(\frac{1}{2}\right), P(2)$	$\left[0; -\frac{63}{32}; 0\right]$

M L' addizione algebrica di polinomi

ESEMPIO

Vogliamo risolvere l' espressione

$$\left(-a^2 + \frac{1}{2}ab - 5b^3\right) + \left(\frac{5}{3}a^2 - \frac{4}{3}ab - \frac{1}{5}b^3\right) - \left(\frac{3}{5}a^2 - \frac{1}{6}ab + b^3\right)$$

- Si tolgono le parentesi utilizzando le regole dei numeri relativi e del calcolo dei monomi:

$$\underline{-a^2} + \underline{\frac{1}{2}ab} - \underline{5b^3} + \underline{\frac{5}{3}a^2} - \underline{\frac{4}{3}ab} - \underline{\frac{1}{5}b^3} - \underline{\frac{3}{5}a^2} + \underline{\frac{1}{6}ab} - \underline{b^3}$$

- Si esegue la somma algebrica degli eventuali termini simili:

$$\frac{1}{15}a^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{31}{5}b^3$$

REGOLA. Per **moltiplicare un polinomio per un monomio** basta moltiplicare ciascun termine del polinomio per il monomio

ESEMPIO

$$\left(-ab^2c + 3a^2b - \frac{4}{5}bc\right) \cdot (-5ac) =$$

$$= -ab^2c \cdot (-5ac) + 3a^2b \cdot (-5ac) - \frac{4}{5}bc \cdot (-5ac) =$$

$$= 5a^2b^2c^2 - 15a^3bc + 4abc^2$$

M La moltiplicazione di due polinomi

REGOLA. Per **moltiplicare due polinomi** si moltiplica ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo e si esegue quindi la somma algebrica dei prodotti ottenuti.

ESEMPIO

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{5}{4}a^2b + \frac{3}{2}ac^2\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a^2c - \frac{8}{5}b^2c\right) = \\
 & = -\frac{5}{4}a^2b \cdot \left(\frac{4}{3}a^2c - \frac{8}{5}b^2c\right) + \frac{3}{2}ac^2 \cdot \left(\frac{4}{3}a^2c - \frac{8}{5}b^2c\right) = \\
 & = -\frac{5}{4}a^2b \cdot \left(\frac{4}{3}a^2c\right) - \frac{5}{4}a^2b \cdot \left(-\frac{8}{5}b^2c\right) + \frac{3}{2}ac^2 \cdot \left(\frac{4}{3}a^2c\right) + \frac{3}{2}ac^2 \cdot \left(-\frac{8}{5}b^2c\right) = \\
 & = -\frac{5}{3}a^4bc + 2a^2b^3c + 2a^3c^3 - \frac{12}{5}ab^2c^3
 \end{aligned}$$

La divisione di un polinomio per un monomio

REGOLA. Per **dividere un polinomio per un monomio** non nullo si divide ciascun termine del polinomio per il monomio

ESEMPIO

$$\left(-10a^3b^5c + 15a^2b^3c^4 - 20a^4b^3c^5\right) : \left(-5a^2b^2c\right) =$$

$$= -10a^3b^5c : \left(-5a^2b^2c\right) + 15a^2b^3c^4 : \left(-5a^2b^2c\right) - 20a^4b^3c^5 : \left(-5a^2b^2c\right) =$$

$$= +2ab^3 - 3bc^3 + 4a^2bc^4$$

M Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

ESEMPIO

$$\begin{aligned}(2x + 3y) \cdot (2x - 3y) &= \\ &= 4x^2 - \cancel{6xy} + \cancel{6xy} - 9y^2 = \\ &= 4x^2 - 9y^2\end{aligned}$$

REGOLA. Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale alla differenza tra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo monomio. In simboli:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

M Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

ESEMPIO

$$\begin{aligned}(2x + 3y) \cdot (2x - 3y) &= \\ &= 4x^2 - \cancel{6xy} + \cancel{6xy} - 9y^2 = \\ &= 4x^2 - 9y^2\end{aligned}$$

REGOLA. Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale alla differenza tra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo monomio. In simboli

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Semplifica le seguenti espressioni.

- | | | | | | |
|-----------|---|-------------------|-----------|--|------------------|
| 87 | $(2x - 1) - (3x + 1)$ | $[-x - 2]$ | 92 | $(t^2 - 5t + 4) + (3t^2 - 4)$ | $[4t^2 - 5t]$ |
| 88 | $(-5x - 2) - (2 - 3x)$ | $[-2x - 4]$ | 93 | $(2pq - 5p) + (4p - 7q) + (4q - 2pq)$ | $[-p - 3q]$ |
| 89 | $-2m - (2 - m) - (m - 3)$ | $[1 - 2m]$ | 94 | $(3a^3 - 7a^2 - 5) - (3a^3 + 7a^2 - 6)$ | $[-14a^2 + 1]$ |
| 90 | $(3a^2b + ab^2) + (-a^2b + 3ab^2)$ | $[2a^2b + 4ab^2]$ | 95 | $(x^4 - x^3y + y^4) - (2x^4 - x^3y - y^4)$ | $[-x^4 + 2y^4]$ |
| 91 | $(5a - 2b + c) + (-a + 2b - 5c)$ | $[4a - 4c]$ | 96 | $(5t - 1) - (2 - t) - (6t - 1)$ | $[-2]$ |
| <hr/> | | | | | |
| 97 | $(a + 3b - c) + (a - 2b - c) + (a - 4b)$ | | | | $[3a - 3b - 2c]$ |
| 98 | $(a + 3b - c) - (a - 2b - c) - (a - 4b)$ | | | | $[9b - a]$ |
| 99 | $(2a^3 - a^2c + 4ac^2 - 7c^3) - (5a^3 - 5a^2c + 8ac^2) + (3a^3 - 4a^2c + 6c^3)$ | | | | $[-4ac^2 - c^3]$ |

$$100 \quad \left(\frac{7}{10}z^2 - \frac{1}{3}z + \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{13}{15}z^2 + \frac{5}{6}z - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\right)$$

$$101 \quad (a - 3b - c) + (-a - 2b - c) - (3a - 4b)$$

$$[-3a - b - 2c]$$

$$102 \quad (5a - b - 3c) - (-a + b + 2c) - (3a - 2b)$$

$$[3a - 4b - 5c]$$

$$103 \quad (2x - x^2 + 3) - (x^2 - 4x - 5) + (-2x^2 + 3x - 4)$$

$$[-4x^2 + 9x + 4]$$

$$104 \quad (-x^3 + 4x^2 - 2x + 1) - (+x^2 - 2x^3 + 5x) + (4x - x^3 + x^2)$$

$$[4x^2 - 3x + 1]$$

$$105 \quad (mn - m^2n^2 - 1) + (m^2n^2 - mn + 4) - (-4m^2n^2 + 3mn - 1) + 3mn$$

$$[4m^2n^2 + 3mn + 4]$$

$$106 \quad -(-x^2 + 4x - 3) + (2x^2 - x - 1) + (x^2 - 2x + 4) - (2x)^2$$

$$[6 - 3x]$$

$$107 \quad (a - 2b) + \left(-\frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b - 2\right) - \left(\frac{7}{2}a + \frac{3}{2}b - 5\right) - (-2)(+2a)$$

$$[3 - 2b]$$

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

124 ESERCIZIO SVOLTO

Eseguiamo la moltiplicazione $-\frac{2}{3}x^2y(-9xy + 12y - 6xy^2)$.

—
Dobbiamo moltiplicare il monomio per ogni termine del polinomio scritto dentro le parentesi tonde, come indicato dalle frecce:

$$\begin{aligned}
 &-\frac{2}{3}x^2y(-9xy + 12y - 6xy^2) = \\
 &= \left(-\frac{2}{3}x^2y\right)(-9xy) + \left(-\frac{2}{3}x^2y\right)(12y) + \left(-\frac{2}{3}x^2y\right)(-6xy^2) = && \text{Proprietà distributiva} \\
 &= 6x^3y^2 - 8x^2y^2 + 4x^3y^3 && \text{Eseguendo le moltiplicazioni tra monomi}
 \end{aligned}$$

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

Esegui le seguenti moltiplicazioni tra polinomi e monomi.

127 $3x^2(1 + 2x)$

$2x(1 + x^2)$

128 $2a(3a + 5)$

$3a^2(2a + 3)$

129 $5x(x^2 + 2x + 1)$

$2x(2 - x^3)$

130 $a^3(a^2 + 7)$

$-2a^2(a^2 - 4)$

131 $3a(2a^2 - 2b)$

$(x^2 - 2x)(-3x)$

132 $2x(-2x^2 + x)$

$(2x^2 - 1)(-2x)$

133 $\frac{1}{2}a^2(a + ab)$

$(a - 2b)(-3ab)$

134 $3xy(x^3 - y^2 - 2xy)$

$2m(m + n + mn)$

135 $-2x(x^3 - 4x^2 - 3x)$

$ab(-a + b)$

136 $(-x^3 + 2x^3y)(-6xy^2)$

$-3ac^3(4a^4c^3 - ac^2 + c)$

137 $9m^2n(-2m^3n^2 + 4m^4n)$

$(2a^2z - 3az^2 + z^3)(-7a^3z)$

138 $-5a^3b(2a^4 - 12a^3b + a^2b^2 - 4ab^3 + 9b^4)$

139 $-\frac{1}{2}abx(4a^2 - ax^2 - 2b^3x)$

$\frac{2}{3}xy(9x - 12y - 6xy)$

140 $-\frac{5}{3}mn^2(-3m - 6n + 12mn)$

$\frac{1}{2}ab(-6a + 4b)$

141 $3x^3y(-2x^2 + xy - 1)$

$-a^3(-3a^2 + 2a - 5)$

142 $\frac{1}{2}x^2(1 - 2x - 4x^3)$

$3a^2b^5\left(6a - \frac{2}{3}a^2b + \frac{4}{3}ab^2\right)$

143 $\frac{3}{5}x^2\left(\frac{5}{3}x^3 - 10x^2 + \frac{25}{3}x\right)$

$0,3x^2y(10x^4y^2 - 3,3xy^4 + 6,6x)$

