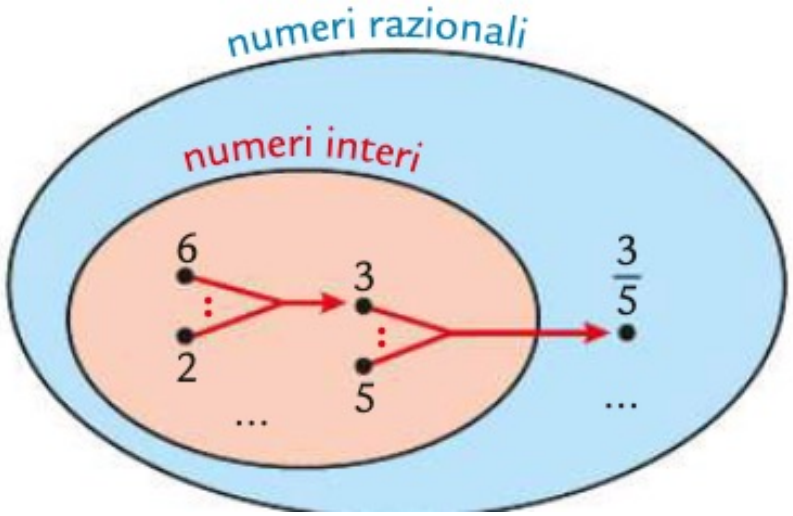
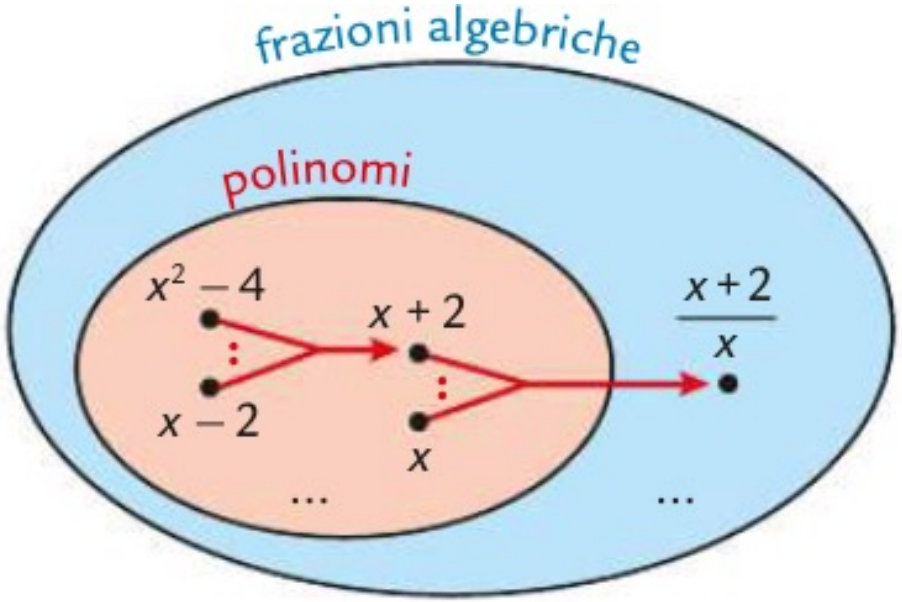
Mathematica ML

Prof. Domenico Lo Iacono

Frazione algebrica





Abbiamo ampliato l'insieme Z dei numeri interi, passando all'insieme Q dei numeri razionali, per rendere sempre possibile la divisione

Ampliamo l'insieme dei polinomi, passando all'insieme delle frazioni algebriche, per rendere sempre possibile la divisione.

Definizione e caratteristiche

Frazione algebrica:

espressione letterale del tipo $\frac{A}{B}$, con A e B monomi o polinomi e $B \neq 0$

ESEMPIO

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 3} \quad ; \quad \frac{6x}{5y^2}$$

Frazioni equivalenti

Due **frazioni algebriche**, funzioni delle stesse variabili, sono **equivalenti** se diventano numeri uguali in corrispondenza di ogni valore che è possibile attribuire alle variabili.

Regola per individuare l'equivalenza: $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ sono equivalenti se $A \cdot D = B \cdot C$

ESEMPIO

$$\frac{2a}{a^2 - a} \quad \text{è equivalente a} \quad \frac{2a + 2}{a^2 - 1}$$

Infatti: $2a\,(a^2 - 1) = (2a + 2)\,(a^2 - a) \Rightarrow [2a\,(a - 1)\,(a + 1) = 2(a + 1)\,a\,(a - 1)]$

LAVAGNA

Condizione di Esistenza. CE

Insieme di definizione o **dominio della frazione**: insieme dei valori che è possibile attribuire alle lettere.

condizione di esistenza: condizioni che indicano quali valori delle lettere devono essere esclusi.

ESEMPI

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 3}$$

C. E. $x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

LAVAGNA

Esercizi introduttivi

1 **Vero o falso?**

a. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ è una frazione algebrica V F

b. un polinomio non è una frazione algebrica V F

c. una frazione algebrica è definita per tutti i valori per cui non si annulla il denominatore V F

d. due frazioni algebriche opposte sono equivalenti V F

e. una frazione algebrica è uguale a zero per tutti i valori che annullano il numeratore (ma non il denominatore) V F

f. due frazioni algebriche $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ sono equivalenti se $AC = BD$ V F

[2 affermazioni vere e 4 false]

Esercizi introduttivi

2 Una delle seguenti quattro frazioni algebriche è definita per ogni numero reale x. Quale?

A $\dfrac{1}{x-64}$

B $\dfrac{1}{x+64}$

C $\dfrac{1}{x^2-16}$

D $\dfrac{1}{x^2+16}$

3 Una delle seguenti frazioni algebriche è definita per ogni numero reale diverso da 2. Quale?

A $\dfrac{1}{2x-2}$

B $\dfrac{1}{2x+2}$

C $\dfrac{1}{2x+4}$

D $\dfrac{1}{2x-4}$

4 Quale delle seguenti frazioni algebriche **non** è equivalente a $\dfrac{x-3}{x-4}$?

A $\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x}$

B $\dfrac{3-x}{4-x}$

C $\dfrac{x^2-3x}{4x-x^2}$

D $\dfrac{2x-6}{2x-8}$

5 Quale delle seguenti frazioni algebriche **non** è l'*opposta* di $\dfrac{x-3}{x-4}$?

A $-\dfrac{x-3}{x-4}$

B $\dfrac{3-x}{x-4}$

C $\dfrac{3-x}{4-x}$

D $\dfrac{x-3}{4-x}$

Esercizi introduttivi

6 Completa la seguente tabella.

Frazione algebrica	Frazione con il denominatore fattorizzato	Condizioni di esistenza (C.E.)
$\frac{1}{x-2}$	$\frac{1}{x-2}$ il denominatore è irriducibile	$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
$\frac{1}{x^2-4}$	$\frac{1}{(x-\ldots\ldots)(x+\ldots\ldots)}$	$(x-\ldots\ldots)(x+\ldots\ldots) \neq 0 \Rightarrow x \neq \ldots\ldots$ e $x \neq \ldots\ldots$
$\frac{1}{x^2+2}$	$\frac{1}{x^2+2}$ il denominatore è irriducibile	Nessuna, perché il denominatore risulta sempre .....
$\frac{1}{2x^2+10x}$	$\frac{1}{2x(x+\ldots\ldots)}$	$2x(x+\ldots\ldots) \neq 0 \Rightarrow x \neq \ldots\ldots$ e $x \neq \ldots\ldots$

ESERCIZI - Determina le C.E. delle seguenti frazioni algebriche.

7 $\dfrac{1}{x-1}$

8 $\dfrac{1}{x+2}$

9 $\dfrac{1}{4-x}$

10 $\dfrac{1}{3x}$

11 $\dfrac{1}{2x-8}$

12 $\dfrac{1}{3x-12}$

13 $\dfrac{1}{4x+20}$

20 $\dfrac{2x+1}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}}$

21 $\dfrac{1}{a^3+2a^2-3a}$

ESERCIZI - Determina le C.E. delle seguenti frazioni algebriche.

14 $\dfrac{a+5}{3a+1}$

15 $\dfrac{1}{4a+5}$

16 $\dfrac{x}{\dfrac{x}{2}-1}$

17 $\dfrac{x+2}{3-\dfrac{x}{3}}$

18 $\dfrac{1}{k^2-(k+1)^2}$

19 $\dfrac{1}{(k+2)^2-k^2}$

ESERCIZI - Determina le C.E. delle seguenti frazioni algebriche.

22 $\dfrac{1}{x^2 - 3x}$

23 $\dfrac{1}{x^2 - 4x}$

24 $\dfrac{x}{8x^2 + 8}$

25 $\dfrac{1}{x^2 + 4x}$

26 $\dfrac{x - 1}{9 - x^2}$

27 $\dfrac{a - 3}{2a^2 - 2}$

28 $\dfrac{1}{a^2 + 16}$

1

ESERCIZI - Determina le C.E. delle seguenti frazioni algebriche.

29 $\dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$

30 $\dfrac{1}{a^2 + 10a + 25}$

31 $\dfrac{1}{x^3 - x^2}$

32 $\dfrac{2x + 1}{\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}}$

33 $\dfrac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$

34 $\dfrac{1}{(x - 3)^2 - 25}$

35 $\dfrac{1}{(x - 1)^2 - 36}$

Proprietà invariantiva

Per la **proprietà invariantiva**, possiamo moltiplicare o dividere numeratore e denominatore di una **frazione algebrica** per uno stesso polinomio non nullo ottenendo una **frazione algebrica equivalente** a quella di partenza

Proprietà invariantiva Esercizi

Completa le seguenti uguaglianze in modo che risultino corrette: presta attenzione ai segni!

42 $\dfrac{a-2b}{x-3}=\dfrac{2b-a}{3-x}$ $\qquad \dfrac{a-2b}{x-3}=-\dfrac{2b-a}{3-x}$ $\qquad -\dfrac{a-2b}{x-3}=\dfrac{2b-a}{3-x}$

43 $\dfrac{x^2-y^2}{x-2y}=-\dfrac{x^2-y^2}{2y-x}$ $\qquad \dfrac{x^2-y^2}{x-2y}=\dfrac{y^2-x^2}{2y-x}$ $\qquad -\dfrac{x^2-y^2}{x-2y}=\dfrac{y^2-x^2}{x-2y}$

Proprietà invariantiva Esercizi

44 $\dfrac{a-2}{(a-3)^2} = \dfrac{\ldots\ldots}{(3-a)^2}$ $\qquad \dfrac{a-2}{(a-3)^2} = -\dfrac{2-a}{(a-3)^2}$ $\qquad -\dfrac{a-2}{(a-4)^2} = \dfrac{2-a}{(4-a)^2}$

45 $\dfrac{m-2}{3-n+m} = \dfrac{2-m}{\ldots\ldots}$ $\qquad \dfrac{m-2}{3-n+m} = \dfrac{\ldots\ldots}{n-m-3}$ $\qquad -\dfrac{m-2}{3-n+m} = \dfrac{2-m}{\ldots\ldots}$

46 $\dfrac{x-2}{(x-5)^3} = \dfrac{\ldots\ldots}{(5-x)^3}$ $\qquad -\dfrac{x-2}{(x-5)^3} = \dfrac{\ldots\ldots}{(x-5)^3}$ $\qquad \dfrac{x-2}{(x-5)^3} = -\dfrac{2-x}{\ldots\ldots}$

Riduzione allo stesso denominatore Esercizi

Trasformiamo le seguenti **frazioni in altre tre equiv**alenti, che abbiano come denominatore il m.c.m. dei denominatori delle frazioni date:

$$\frac{x}{x+1}, \quad \frac{1}{x^2-1}, \quad \frac{1}{x^2-x}$$

Scomponiamo anzitutto i denominatori

$$\frac{x}{x+1}, \quad \frac{1}{(x-1)(x+1)}, \quad \frac{1}{x(x-1)}$$

mcm: $x(x-1)(x+1)$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore delle frazioni date per un fattore opportuno (colorato in rosso): **proprieta`invarianti va**

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x \cdot x \cdot (x-1)}{(x+1)x(x-1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1 \cdot x}{(x-1)(x+1) \cdot x}$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1 \cdot (x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{x^2(x-1)}{x(x-1)(x+1)}, \quad \frac{x}{x(x-1)(x+1)}, \quad \frac{x+1}{x(x-1)(x+1)}$$

Mathematica

Riduzione allo stesso denominatore Esercizi

mcm: $x(x-1)(x+1)$

$$\times \quad \frac{x}{x+1} = \frac{x \cdot x \cdot (x-1)}{(x+1)x(x-1)} = \frac{x \cdot x \cdot (x-1)}{(x+1)x(x-1)}$$

$$: \quad = x(x-1)$$

$$\times \quad \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1 \cdot x}{(x+1)x(x-1)}$$

$$: \quad = x$$

$$\times \quad \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1 \cdot (x+1)}{(x+1)x(x-1)}$$

$$: \quad = (x+1)$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore delle frazioni date per un fattore opportuno

proprieta`invariantiva

Frazioni ridotti allo stesso denominatore

$$\frac{x \cdot x \cdot (x-1)}{(x+1)x(x-1)} \qquad \frac{1 \cdot x}{(x+1)x(x-1)} \qquad \frac{1 \cdot (x+1)}{(x+1)x(x-1)}$$

Riduzione allo stesso denominatore Esercizi

Trasforma le seguenti frazioni in altre equivalenti, che abbiano come denominatore il m.c.m. dei denominatori delle frazioni date.

50 $\dfrac{1}{a^2-a}$; $\dfrac{1}{a^3+a^2}$; $\dfrac{1}{a}$

51 $\dfrac{a}{a+1}$; $\dfrac{1}{a^2+a}$; $\dfrac{2}{a^2-1}$

52 $\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{1}{x^4-4x^2}$; $\dfrac{1}{x^2+2x}$

Riduzione allo stesso denominatore Esercizi

Trasforma le seguenti frazioni in altre equivalenti, che abbiano come denominatore il m.c.m. dei denominatori delle frazioni date.

53 $\frac{1}{x-1}; \quad \frac{x}{x^4-1}; \quad \frac{x}{x^2+1}$

54 $\frac{1}{x^2-1}; \quad \frac{1}{x-x^2}; \quad \frac{1}{x^2-3x-4}$

55 $\frac{a}{a^2-b^2}; \quad \frac{1}{a^2+ab}; \quad \frac{1}{a}$

56 $\frac{1}{a}; \quad \frac{1}{b}; \quad \frac{1}{a^2-ab}$

Semplificazione

L'algoritmo per semplificare una frazione è il seguente:

- si scompongono numeratore e denominatore
- si individuano i divisori comuni, cioè il *M.C.D.*
- si dividono il numeratore e il denominatore per il loro *M.C.D.*

Se il numeratore e il denominatore non hanno divisori comuni si dice che la frazione è **irriducibile**.

ESEMPI

1.

$$\frac{3a^2x^2 - 9a^3x}{ax^3 - 3a^2x^2} = \frac{3\cancel{a^2}\cancel{x}\cancel{(x-3a)}}{\cancel{a}x^{\cancel{2}}\cancel{(x-3a)}} = \frac{3a}{x}$$

Il numeratore e il denominatore hanno divisori comuni al di fuori dell'unità e quindi la frazione è **riducibile**.

2.

$$\frac{a+2b}{a^2-b^2} = \frac{a+2b}{(a-b)(a+b)}$$

Il numeratore e il denominatore non hanno divisori comuni al di fuori dell'unità e quindi la frazione è **irriducibile**.

Semplificazione frazioni algebriche Caccia all'errore

Semplificazione	È corretta?	Eventuale correzione
$\frac{2x-3y}{2x+3y}=\frac{x-y}{x+y}$	☐ Sì ☐ No	.....
$\frac{x+y}{x-y}=-1$	☐ Sì ☐ No	.....
$\frac{2x-y}{x}=2-y$	☐ Sì ☐ No	.....
$\frac{(2-x)^2}{x(x-2)}=\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}=\frac{x-2}{x}$	☐ Sì ☐ No	.....
$\frac{(3-t)^3}{t^2-3t}=\frac{(3-t)^3}{t(t-3)}=\frac{(t-3)^2}{t}$	☐ Sì ☐ No	.....
$\frac{2z^2-2y^2}{y-z}=\frac{2(z-y)(z+y)}{y-z}=-2(z+y)$	☐ Sì ☐ No	.....

Semplificazione frazioni algebriche Esercizi

61 Quale delle seguenti frazioni è *irriducibile*?

A $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$

B $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$

C $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$

D $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}$

62 Quale delle seguenti semplificazioni è corretta?

A $\dfrac{t^2-4}{4t-t^3}=0$

B $\dfrac{t^2-4}{4t-t^3}=\dfrac{1}{t}$

C $\dfrac{t^2-4}{4t-t^3}=\dfrac{t-2}{t+2}$

D $\dfrac{t^2-4}{4t-t^3}=-\dfrac{1}{t}$

Semplificazione frazioni algebriche Esercizi

63 Quale delle seguenti semplificazioni è corretta?

A $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$

B $\dfrac{a-b}{a+b}=-1$

C $\dfrac{x^4-y^2}{x^2-y}=x^2+y$

D $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a-b$

64 Quale delle seguenti semplificazioni **non** è corretta?

A $\dfrac{1-x^2}{1-x}=1+x$

B $\dfrac{x^2-1}{x-1}=1+x$

C $\dfrac{4-x^2}{2+x}=2-x$

D $\dfrac{4+x^2}{2+x}=2+x$

Semplificazione frazioni algebriche Esercizi

Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

a. $\dfrac{3a^2b^3c^4}{15ab^5c^6}$ **b.** $\dfrac{15x^2-15x}{6x-6}$ **c.** $\dfrac{a^3-a^2}{a^3-a}$ **d.** $\dfrac{a^2b-ab^2}{a^2b-a^3}$

Semplificazione frazioni algebriche Esercizi

66 $\dfrac{4a^2b^3c^4}{12ab^5c^6}$

67 $\dfrac{a^6+a^4}{a^3}$

68 $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$

69 $\dfrac{2a^6b^2c^7}{5ab^5c^6}$

70 $\dfrac{2a^2+4a}{8a^3}$

71 $\dfrac{x^2+2x}{8x+16}$

72 $\dfrac{12a^6b^9c^{10}}{20a^7b^5c^6}$

Semplificazione frazioni algebriche Esercizi

73 $\dfrac{a^7 + a^5}{a^2 + 1}$

74 $\dfrac{6x^2 + 3x}{36x^2 - 9}$

75 $\dfrac{10a^4b^3c^4}{15ab^3c^6d}$

76 $\dfrac{x^2 - 9}{3x + 9}$

77 $\dfrac{2a + 1}{4a + 2}$

78 $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25}$

79 $\dfrac{t^2 - 1}{t^2 - t}$

LAVAGNA

LAVAGNA

Operazioni Addizione e sottrazione

Per sommare o sottrarre due o più frazioni algebriche, si deve seguire questa procedura:

- Scomporre i denominatori delle frazioni e porre le condizioni di esistenza
- Semplificare le frazioni che non sono irriducibili
- Trovare il *m.c.m.* fra i denominatori
- *R*idurre tutte le frazioni allo stesso denominatore
- Eseguire le addizioni e le sottrazioni e semplificare la frazione ottenuta se necessario

ESEMPIO

$$\frac{3b}{2x+y}+\frac{b}{2x-y}=$$

C.E. : $2x+y\neq 0$ $\quad 2x-y\neq 0$

m.c.m = (2*x* + *y*) (2*x* − *y*)

$$\frac{3b(2x-y)+b(2x+y)}{(2x+y)(2x-y)}=\frac{6bx-3by+2bx+by}{(2x+y)(2x-y)}=\frac{8bx-4by}{(2x+y)(2x-y)}$$

Addizione e sottrazione Esercizi

Semplifica le seguenti espressioni in cui compaiono addizioni e sottrazioni di frazioni algebriche.

165 $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}$ $\left[\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right]$

166 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2-a}$ $\left[\frac{1}{a-1}\right]$

167 $\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2+2x}$ $\left[\frac{4}{x(x^2-4)}\right]$

168 $\frac{3y}{4x-2y}-\frac{y}{x}-\frac{1}{2}$ $\left[\frac{y^2-x^2}{x(2x-y)}\right]$

169 $\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2+a}-\frac{1}{a^2-4}$ $\left[-\frac{5}{a^2-4}\right]$

170 $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$ $[1]$

171 $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2x^2-2x}$ $\left[-\frac{1}{2x^2-2x}\right]$

172 $\frac{y^3}{2x-2y}-\frac{y^3}{2x+2y}+x^2+y^2$ $\left[\frac{x^4}{x^2-y^2}\right]$

173 $\frac{y}{x^2-xy}-\frac{x}{xy-y^2}+\frac{x-y}{xy}$ $\left[-\frac{2}{x}\right]$

174 $\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{a^2-a}-\frac{1}{a^2+a}$ $\left[-\frac{1}{a^2-1}\right]$

175 $\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{x^2y-xy^2}-\frac{x+y}{x^2y^2}$ $\left[\frac{1}{xy(y-x)}\right]$

176 $\frac{1}{2x^2-2}-\frac{1}{4x-4}+\frac{1}{2x+2}$ $\left[\frac{1}{4(x+1)}\right]$

177 $\frac{1}{a^3-2a^2}-\frac{1}{a^2-4}-\frac{1}{a^2}$ $\left[-\frac{2a+3}{a^2(a+2)}\right]$

178 $\frac{1}{2a-a^2}-\frac{1}{a^2+2a}-\frac{1}{a^2-4a+4}$ $\left[\frac{2-3a}{(a+2)(a-2)^2}\right]$