Mathematica ML

I numeri razionali Q

Le Frazioni

Prof. Domenico Lo Iacono

Divisione tra due numeri

Quando eseguo una divisione tra due numeri naturali

$$n \quad : \quad m$$

ho due possibilità

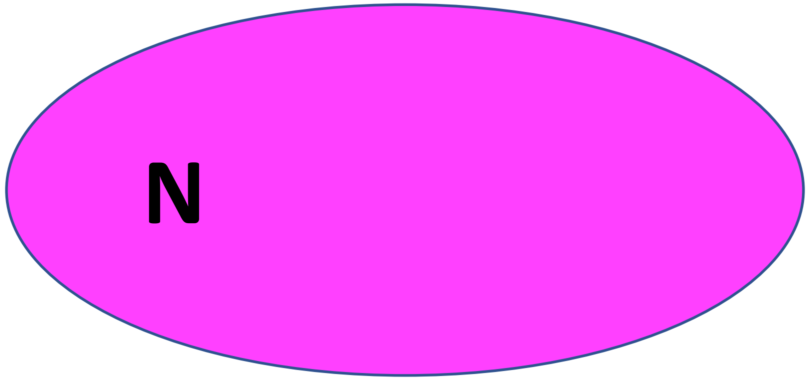
n è multiplo di m	n non è multiplo di m
Il resto è 0	Il resto è diverso da 0
Il risultato è un numero naturale	Il risultato non esiste nell'insieme N
24 : 4 =6	27 : 4 = ?

La divisione non è un'operazione interna ad N

In una divisione in cui il resto = 0

Esempio: 24 : 4 =6

il risultato fa parte dell’insieme dei naturali N o degli interi Z



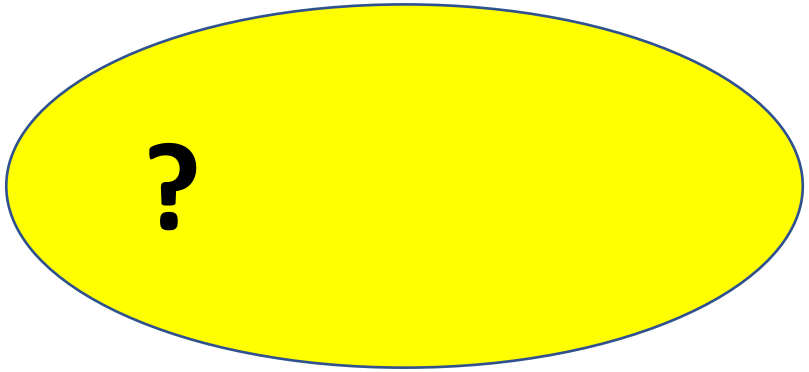
In una divisione il cui

resto è **diverso** da 0

Il risultato non esiste nell’insieme N

27 : 4 = ?

QUINDI DOVE VADO A INSERIRLO?

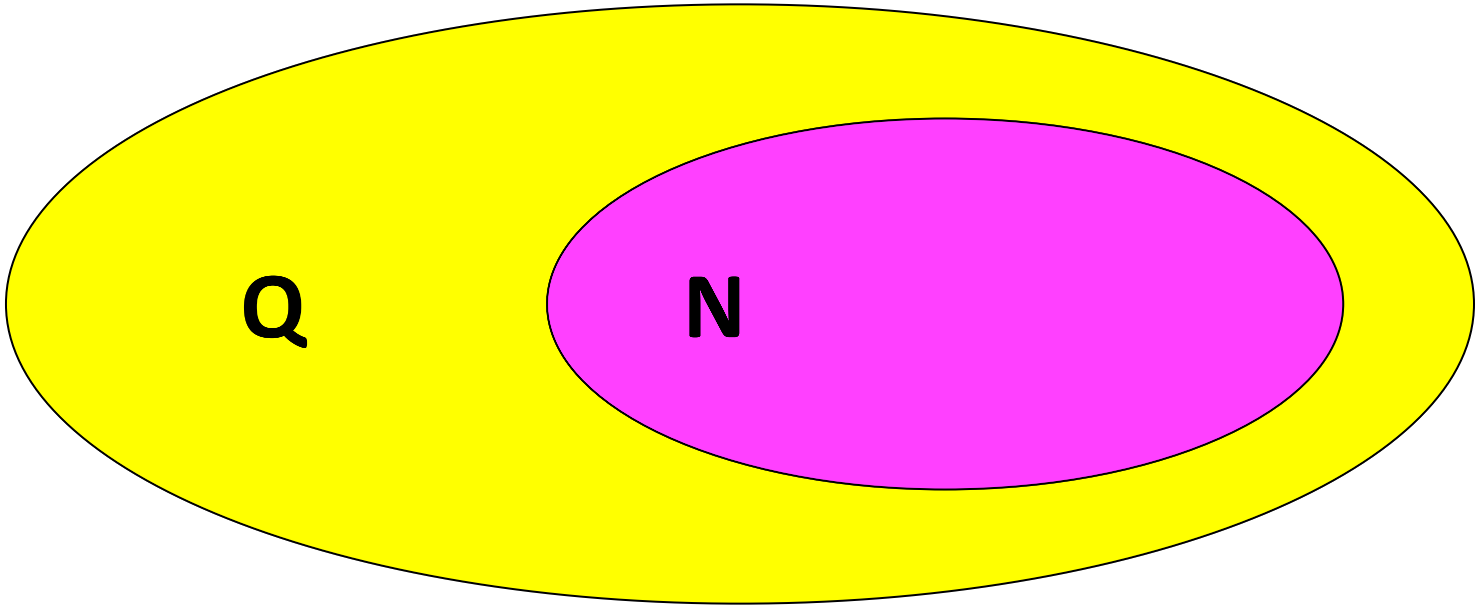


QUINDI COSA FACCIAMO ?

Mathematica ML

Ampliamo l’insieme **N** e **Z**

all’insieme **Q** dei numeri razionali assoluti.



Mathematica ML

Ora, quando eseguo una divisione tra due numeri razionali

$$\frac{r \quad : \quad s}{}$$

Il risultato esiste sempre!!!

Ho tre possibilità

Il resto = 0

54 : 6 = 9

Il risultato è un numero naturale

N

Il resto ≠ 0

25 : 2 = 13,5

Il risultato è numero decimale limitato

Q

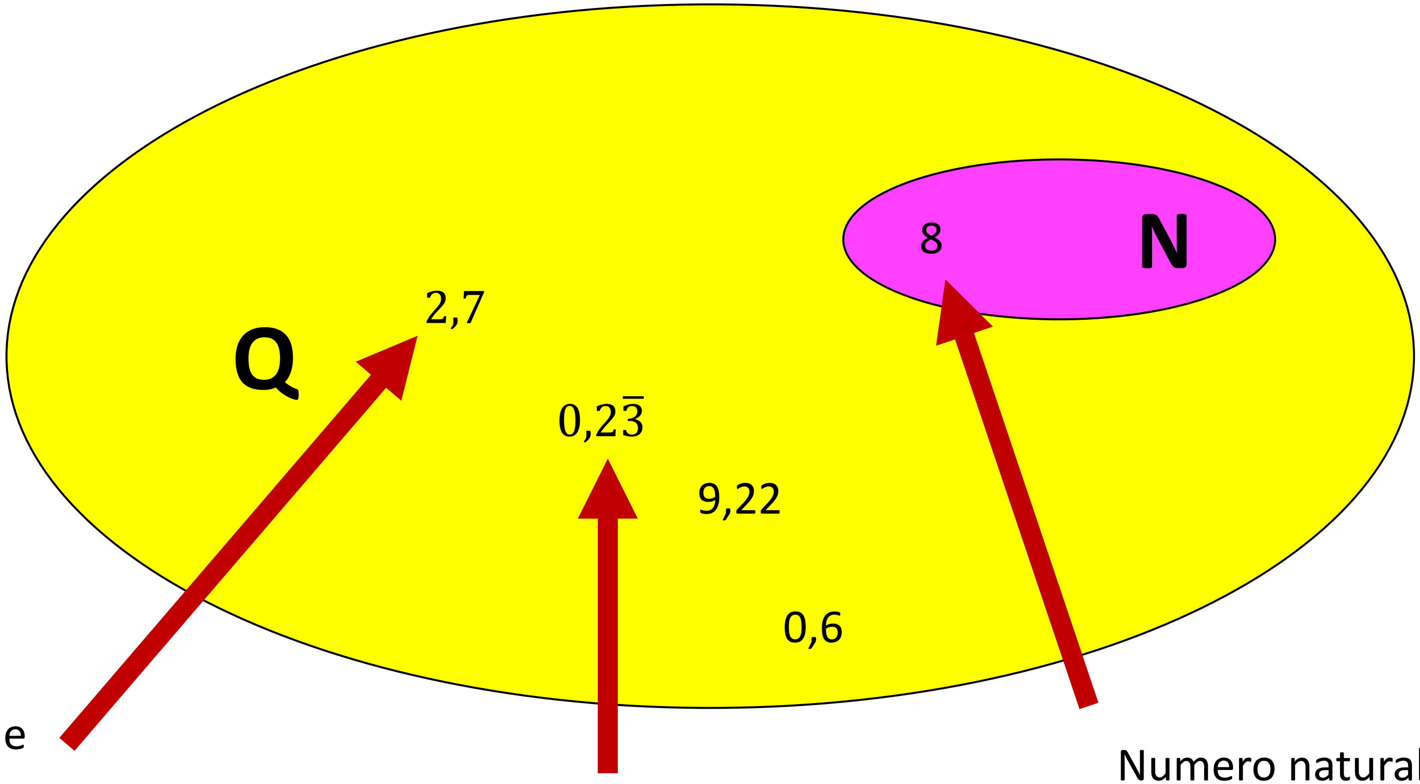
Il resto ≠ 0

25 : 3 = 8,33333…

Il risultato è numero decimale illimitato

Q

L'insieme dei Numeri razionali Q



Numero decimale limitato
2: parte intera
7: parte decimale

Numero periodico
0: parte intera
2: antiperiodo
3: periodo

Numero naturale

I numeri razionali sono i risultati delle divisioni

Quindi possono essere scritti

come **numero decimale**

$$3:5 = 0,6$$

o come **frazione**

$$3:5 = \frac{3}{5}$$

Come si scrive ?

Esempio

Termini → $\dfrac{3}{4}$

3 → **NUMERATORE**

4 → **DENOMINATORE**

→ Si chiama Frazione

e rappresenta la divisione tra due numeri

Mathematica

Le Frazioni

Prof. Domenico Lo Iacono

Frazione PROPRIA, IMPROPRIA e APPARENTE.

La frazione $\dfrac{a}{b}$ **si dice:** **Propria** se $\mathbf{0 < a < b}$

Esempio

$\dfrac{2}{4}$ Frazione **propria**

$\dfrac{3}{5}$

NUMERATORE $<$ DENOMINATORE

$3 < 5$

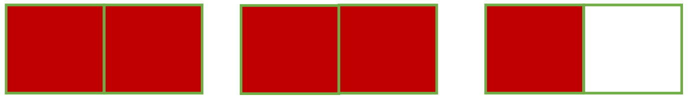
Propria

Frazione PROPRIA, IMPROPRIA e APPARENTE.

La frazione $\dfrac{a}{b}$ **si dice: Impropria** se $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ $\quad (\boldsymbol{b}\ non\ multiplo\ di\ \boldsymbol{a})$

Esempio

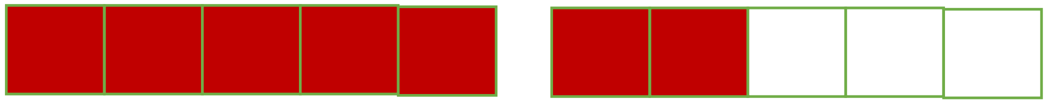
$\dfrac{5}{2}$ Frazione **impropria**



$\dfrac{7}{5}$

Numeratore > Denominatore

$7 > 5$



Impropria

Frazione PROPRIA, IMPROPRIA e APPARENTE.

La frazione $\dfrac{a}{b}$ **si dice: Apparente** se Se $\boldsymbol{a}$ è $multiplo\ di$ $\boldsymbol{b}$

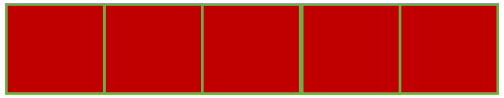
Esempio

$\dfrac{4}{2}$ Frazione **apparente**

$$\frac{5}{5}$$

Numeratore = Denominatore

$$5 = 5$$

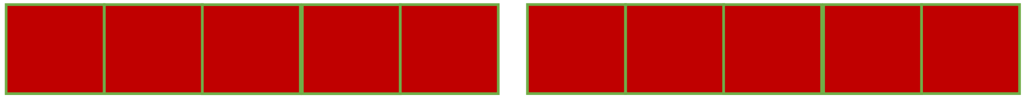


Apparente

$$\frac{10}{5}$$

Numeratore <u>multiplo</u> Denominatore

10 <u>multiplo</u> 5



Frazioni equivalenti

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono **equivalenti** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

se si verifica: $a \cdot d = b \cdot c$

Esempio

$\frac{6}{7}$ e $\frac{12}{14}$ Sono equivalenti, Infatti: $\underbrace{6 \cdot 14}_{84} = \underbrace{12 \cdot 7}_{84}$

Proprietà invariantiva per le frazioni

Moltiplicando entrambi i termini di una frazione per uno stesso numero

diverso da zero si ottiene una frazione equivalente a quella data

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} \qquad \text{con } \ m \neq 0$$

Esempio:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{12}{16}$$

$\frac{3}{4}$ è equivalente a $\frac{12}{16}$

Proprietà invariantiva per le frazioni

Dividendo entrambi i termini di una frazione per uno stesso numero

diverso da zero si ottiene una frazione equivalente a quella data

$$\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m} \qquad \text{con } \ m\neq 0$$

Esempio:

$$\frac{15}{35}=\frac{15:5}{35:5}=\frac{3}{7}$$

$\frac{15}{35}$ è equivalente a $\frac{3}{7}$

$\frac{15}{35}$ è semplificata a $\frac{3}{7}$

Riduzioni ai minimi termini

La frazione $\frac{a}{b}$ si dice ridotta ai minimi termini quando:

NUMERATORE e il DENOMINATORE sono primi tra loro

Il loro **MDC =1**

È sempre utile ridurre ai minimi termini
perché si eseguono le operazioni
con numeri più piccoli

Esempio $\frac{15}{20}$ MCD(15,20) =5 $\rightarrow$ $\frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$

Esercizi

Con GeoGebra Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

10 $\frac{44}{55}$ $\quad \frac{27}{12}$ $\quad \frac{16}{54}$ **16**

11 $\frac{12}{36}$ $\quad \frac{35}{70}$ $\quad \frac{36}{24}$ **17**

12 $\frac{100}{35}$ $\quad \frac{120}{80}$ $\quad \frac{18}{30}$ **18**

13 $\frac{80}{44}$ $\quad \frac{65}{15}$ $\quad \frac{66}{18}$ **19**

14 $\frac{11}{35}$ $\quad \frac{36}{16}$ $\quad \frac{30}{72}$ **20**

15 $\frac{13}{52}$ $\quad \frac{80}{30}$ $\quad \frac{39}{15}$ **21**

PAUSA…

Confronto tra frazioni con stesso denominatore

Le Frazioni come i numeri interi si possono confrontare.

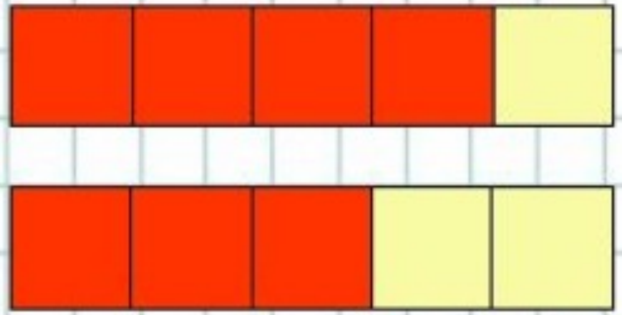
Nel caso di frazioni che hanno lo stesso denominatore:

Es. $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{6}$.

Tra le frazioni che hanno il denominatore uguale, è maggiore quella che ha il numeratore maggiore

Confronto tra frazioni con stesso denominatore

Se due frazioni hanno lo **stesso denominatore** è maggiore quella **con numeratore maggiore**



$$\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$$

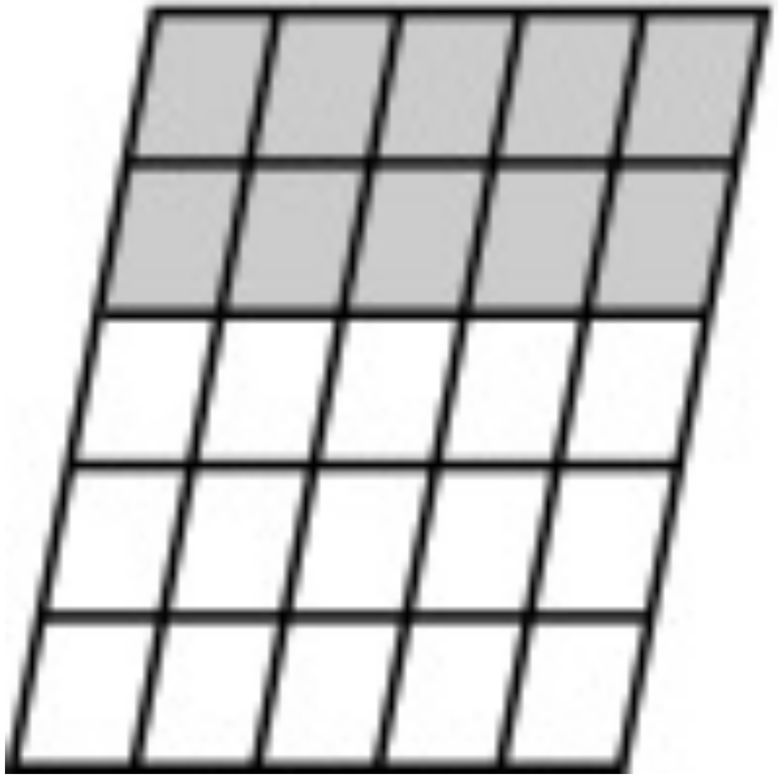
$$\frac{2}{5}$$

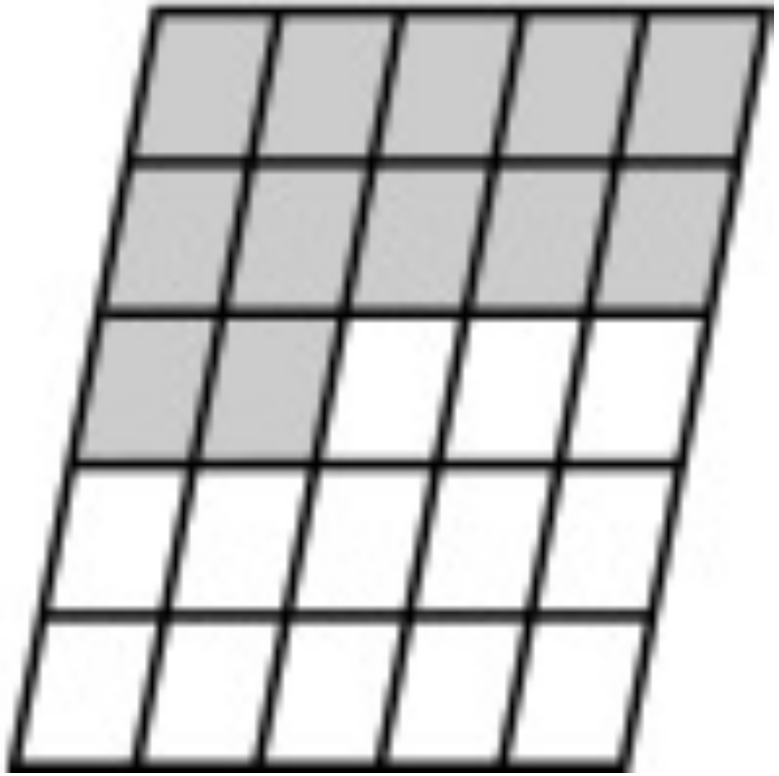
$$\frac{4}{5}$$

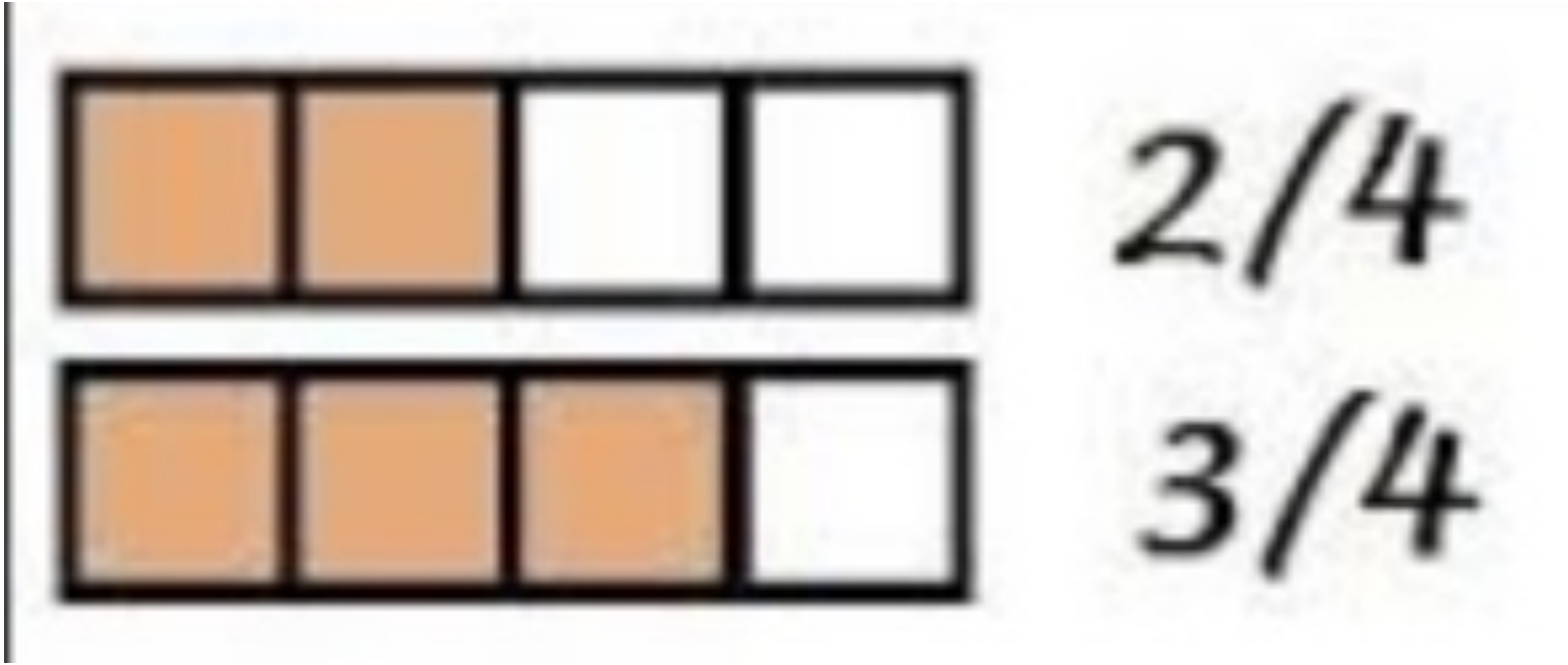
$$\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$$

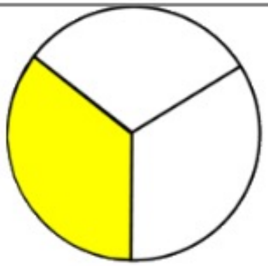
Mathematica

$$\frac{10}{20} < \frac{12}{20}$$

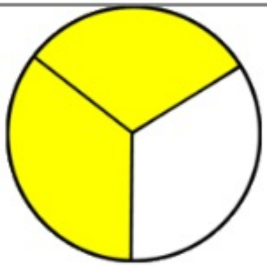




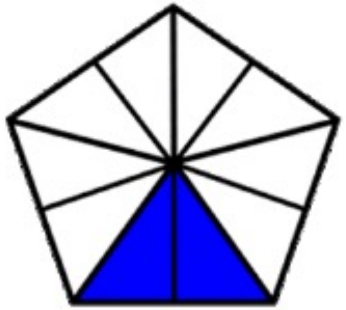

2/4
3/4



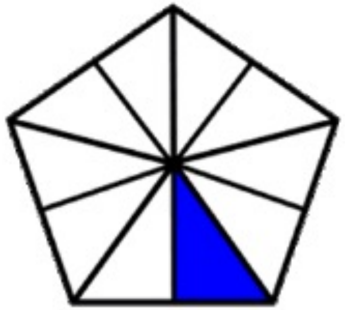
$\frac{1}{3}$



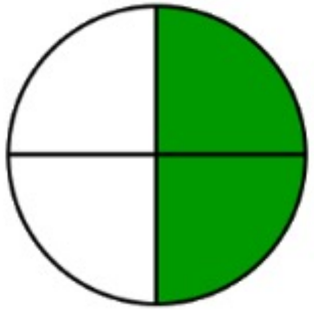
$\frac{2}{3}$



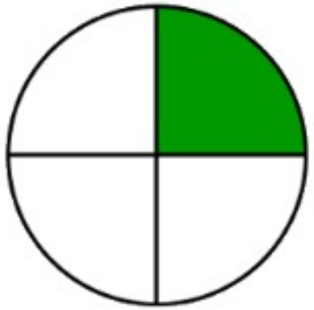
$\frac{2}{10}$



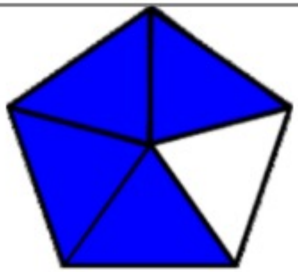
$\frac{1}{10}$



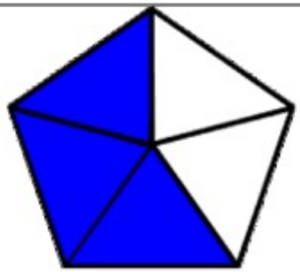
$\frac{2}{4}$



$\frac{1}{4}$



$\frac{4}{5}$



$\frac{3}{5}$

Confronto tra frazioni con stesso numeratore

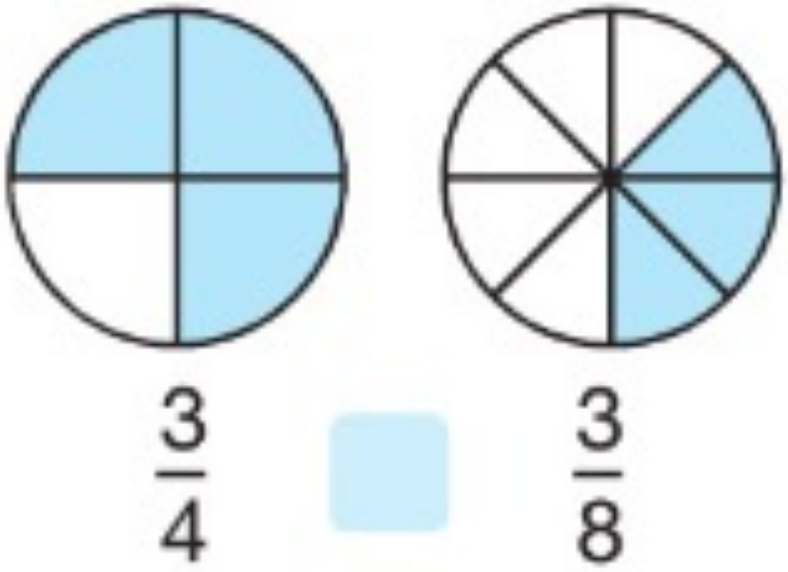
Vediamo come possiamo confrontare frazioni che hanno uguale numeratore.

Es. $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$.

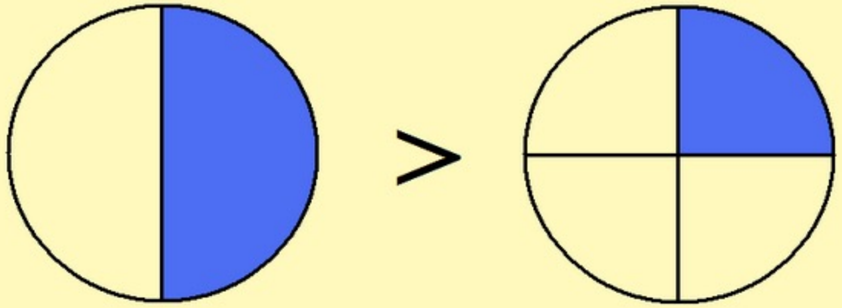
Tra le frazioni che hanno uguale numeratore, è maggiore quella che ha il denominatore minore

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

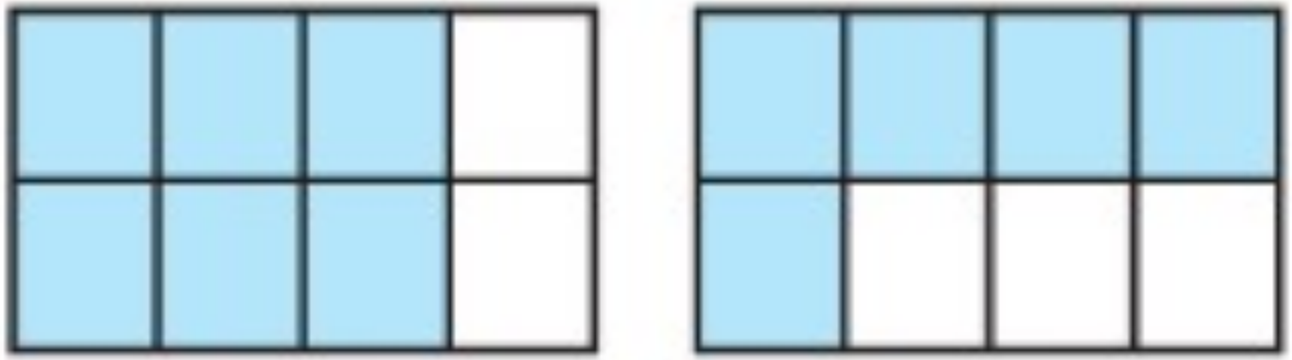
$$\frac{7}{6} < \frac{7}{2}$$



$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$



$$\frac{3}{5} \quad \square \quad \frac{3}{4}$$



$$\frac{6}{8} \quad \square \quad \frac{5}{8}$$

Confronto tra frazioni IN GENERALE:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se e solo se: $ad < bc$

$\frac{9}{11} < \frac{7}{8}$ perchè: $\underbrace{9 \cdot 8}_{72} < \underbrace{7 \cdot 11}_{77}$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e solo se: $ad = bc$

$\frac{5}{4} < \frac{10}{8}$ perchè: $\underbrace{5 \cdot 8}_{40} = \underbrace{4 \cdot 10}_{40}$

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ se e solo se: $ad > bc$

$\frac{5}{3} > \frac{7}{5}$ perchè: $\underbrace{5 \cdot 5}_{25} > \underbrace{7 \cdot 3}_{21}$

Confronto tra frazioni

Completa ponendo al posto dei puntini il simbolo opportuno (<, =, >).

25 $\frac{2}{3} \ldots\ldots \frac{5}{4}$ $\qquad$ $\frac{10}{15} \ldots\ldots \frac{8}{12}$

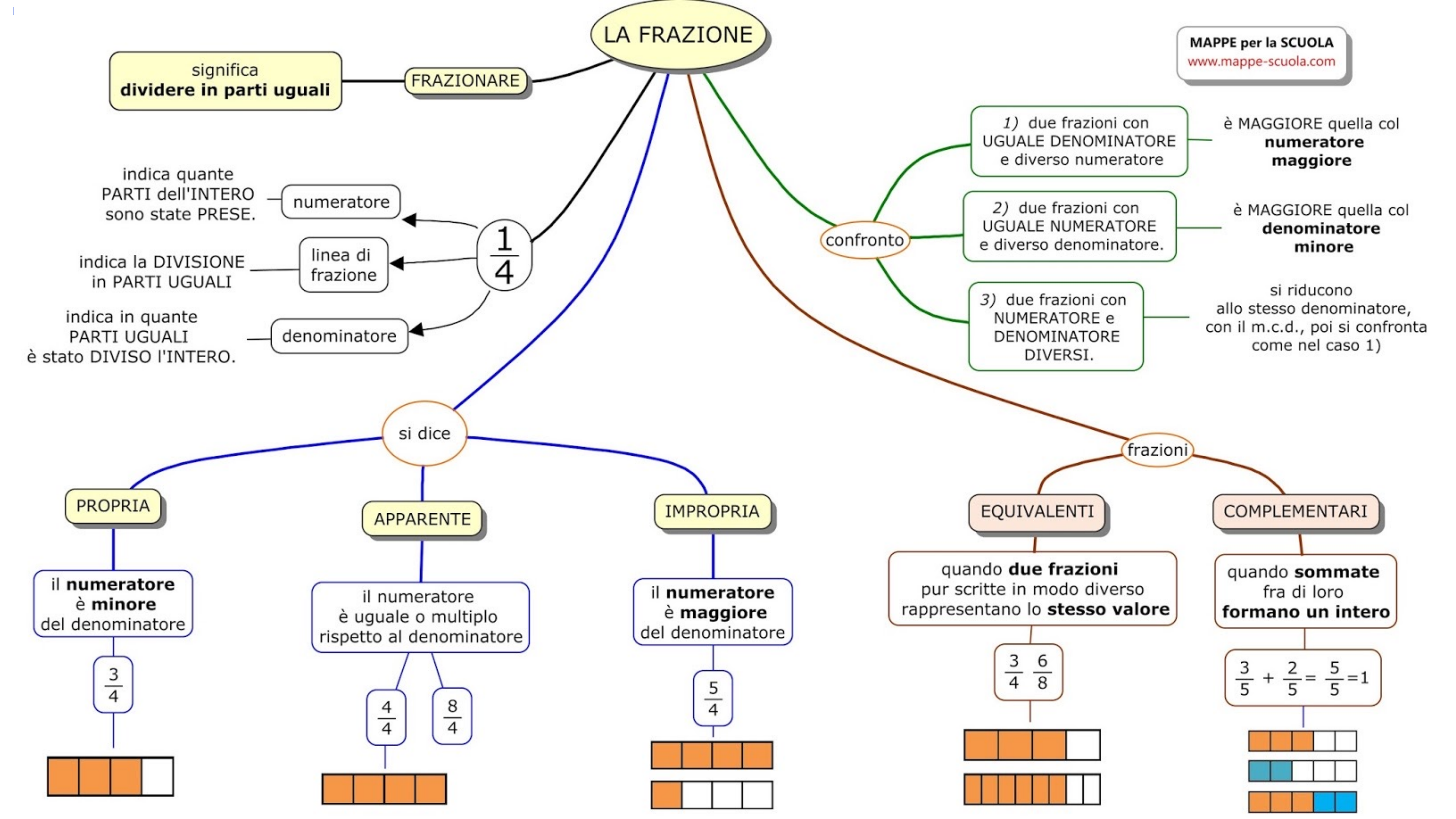
26 $\frac{5}{6} \ldots\ldots \frac{6}{7}$ $\qquad$ $\frac{12}{13} \ldots\ldots \frac{3}{4}$

27 $\frac{8}{7} \ldots\ldots \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\frac{11}{10} \ldots\ldots \frac{7}{5}$

28 $\frac{11}{22} \ldots\ldots \frac{7}{14}$ $\qquad$ $\frac{13}{4} \ldots\ldots \frac{19}{6}$

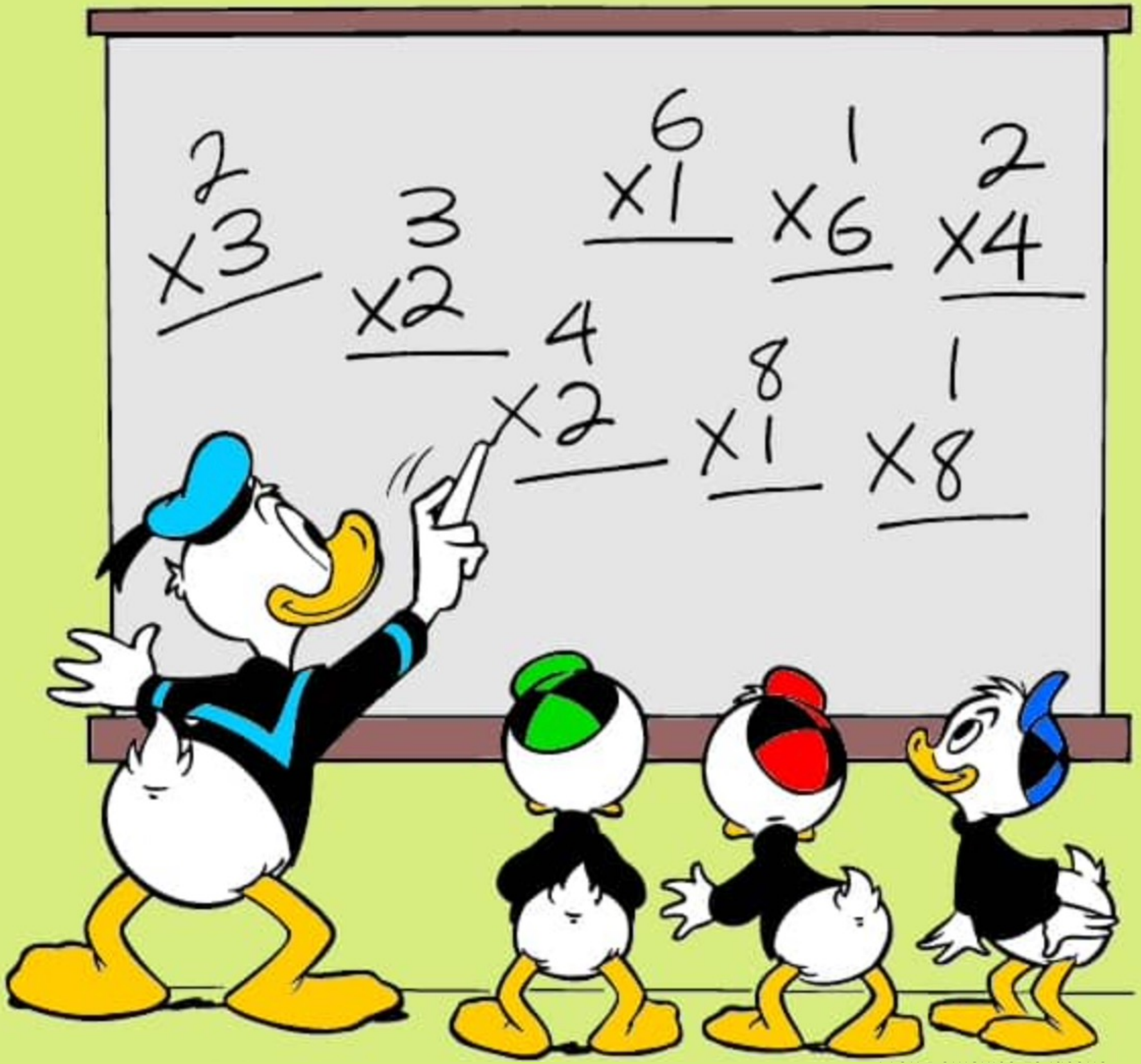
29 $\frac{7}{3} \ldots\ldots \frac{8}{5}$ $\qquad$ $\frac{5}{4} \ldots\ldots \frac{15}{12}$

30 $\frac{11}{12} \ldots\ldots \frac{12}{11}$ $\qquad$ $\frac{100}{111} \ldots\ldots \frac{10}{11}$



LA FRAZIONE
MAPPE per la SCUOLA
www.mappe-scuola.com
FRAZIONARE
significa **dividere in parti uguali**
$\frac{1}{4}$
numeratore
indica quante PARTI dell'INTERO sono state PRESE.
linea di frazione
indica la DIVISIONE in PARTI UGUALI
denominatore
indica in quante PARTI UGUALI è stato DIVISO l'INTERO.
confronto
1) due frazioni con UGUALE DENOMINATORE e diverso numeratore
è MAGGIORE quella col **numeratore maggiore**
2) due frazioni con UGUALE NUMERATORE e diverso denominatore.
è MAGGIORE quella col **denominatore minore**
3) due frazioni con NUMERATORE e DENOMINATORE DIVERSI.
si riducono allo stesso denominatore, con il m.c.d., poi si confronta come nel caso 1)
si dice
PROPRIA
il **numeratore** è **minore** del denominatore
$\frac{3}{4}$
APPARENTE
il numeratore è uguale o multiplo rispetto al denominatore
$\frac{4}{4}$
$\frac{8}{4}$
IMPROPRIA
il **numeratore** è **maggiore** del denominatore
$\frac{5}{4}$
frazioni
EQUIVALENTI
quando **due frazioni** pur scritte in modo diverso rappresentano lo **stesso valore**
$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$
COMPLEMENTARI
quando **sommate** fra di loro **formano un intero**
$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$

BUON VIAGGIO!



La Moltiplicazione

Operazioni con le frazioni

IL PRODOTTO DI DUE O PIÙ FRAZIONI
È LA FRAZIONE AVENTE COME
NUMERATORE IL PRODOTTO DEI NUMERATORI
E COME
DENOMINATORE IL PRODOTTO DEI DENOMINATORI

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

Semplifico

Semplifico ancora

$$\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{21}=\frac{7\cdot 6}{8\cdot 21}=\frac{\cancel{42}^{\,21}}{\cancel{168}_{\,84}}=\frac{21}{84}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Vedo che il risultato può essere semplificato

Semplifico

Semplifico ancora

$$\frac{15}{18}\cdot\frac{16}{35}=\frac{15\cdot 16}{18\cdot 35}=\frac{\cancel{240}^{\,24}}{\cancel{630}_{\,63}}=\frac{24}{63}=\frac{8}{21}$$

Vedo che il risultato può essere semplificato

La Moltiplicazione: semplificazione verticale e semplificazione a croce

Eseguiamo la semplificazioni PRIMA di calcolare la moltiplicazione

$$\frac{7}{8}\cdot\frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{21}_{\,7}} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{4}{\cancel{8}}\cdot\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{1}{4}$$

Semplificazione verticale

Semplificazione a croce

La Moltiplicazione: semplificazione verticale e semplificazione a croce

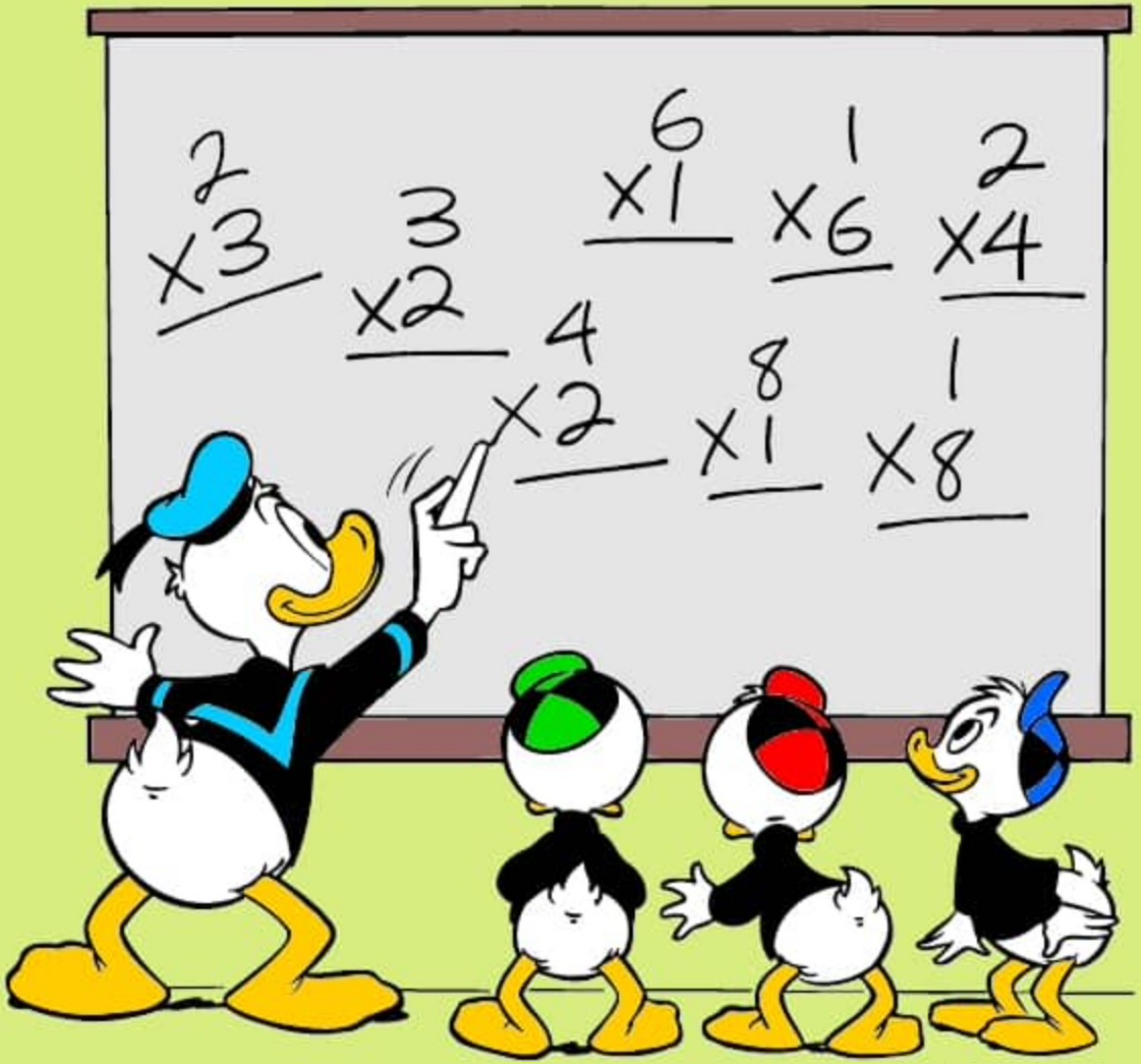
Semplificazione a croce

$$\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{3}{\cancel{21}}} = \frac{1 \cdot \cancel{3}}{4 \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{9}{\cancel{18}}} \cdot \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\underset{7}{\cancel{35}}} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 8}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot 7} = \frac{8}{21}$$

Semplificazione a croce

Pausa



La divisione

Operazioni con le frazioni

IL DIVISIONE TRA DUE FRAZIONI AVVIENE SCAMBIANDO NUMERATORE E DENOMINATORE DELLA FRAZIONE DOPO IL SEGNO DI DIVISIONE E TRASFORMANDO LA DIVISIONE IN MOLTIPLICAZIONE

$$\frac{7}{8} \div \frac{3}{2} = \frac{7 \cdot \cancel{2}^{\,1}}{\cancel{8}_{\,4} \cdot 3} = \frac{7 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12}$$

Capovolgo la seconda frazione

semplifico

Mathematica

La Divisione: semplificazione verticale e semplificazione a croce

$$\frac{12}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{\overset{6}{\cancel{12}} \cdot 3}{8 \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{6 \cdot 3}{8 \cdot 1} = \frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\underset{4}{\cancel{8}}}$$

$$\frac{12}{8} \div \frac{16}{14} \cdot \frac{7}{4} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} \cdot \frac{7}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{147}{64}$$

La Divisione: semplificazione verticale e semplificazione a croce

$$\frac{12}{54} \div \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{4} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{2}{\cancel{54}}} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{27}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} = 6$$

Capovolgo la seconda frazione

La Divisione: semplificazione verticale e semplificazione a croce

$$\frac{60}{49} \div 15 \cdot \frac{21}{4} = \frac{\overset{4}{\cancel{60}}}{\underset{7}{\cancel{49}}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{15}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{4} =$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{7} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{7}$$

Capovolgo la seconda frazione

La Divisione: Percorso da seguire

Divisione

Invertire la frazione dopo il segno :

Moltiplicazione

Semplificazione

Semplificazione a croce

Moltiplicare i numeratori
E
Moltiplicare i denominatori

Pausa

Mathematica

La Divisione: Esercitazione in aula

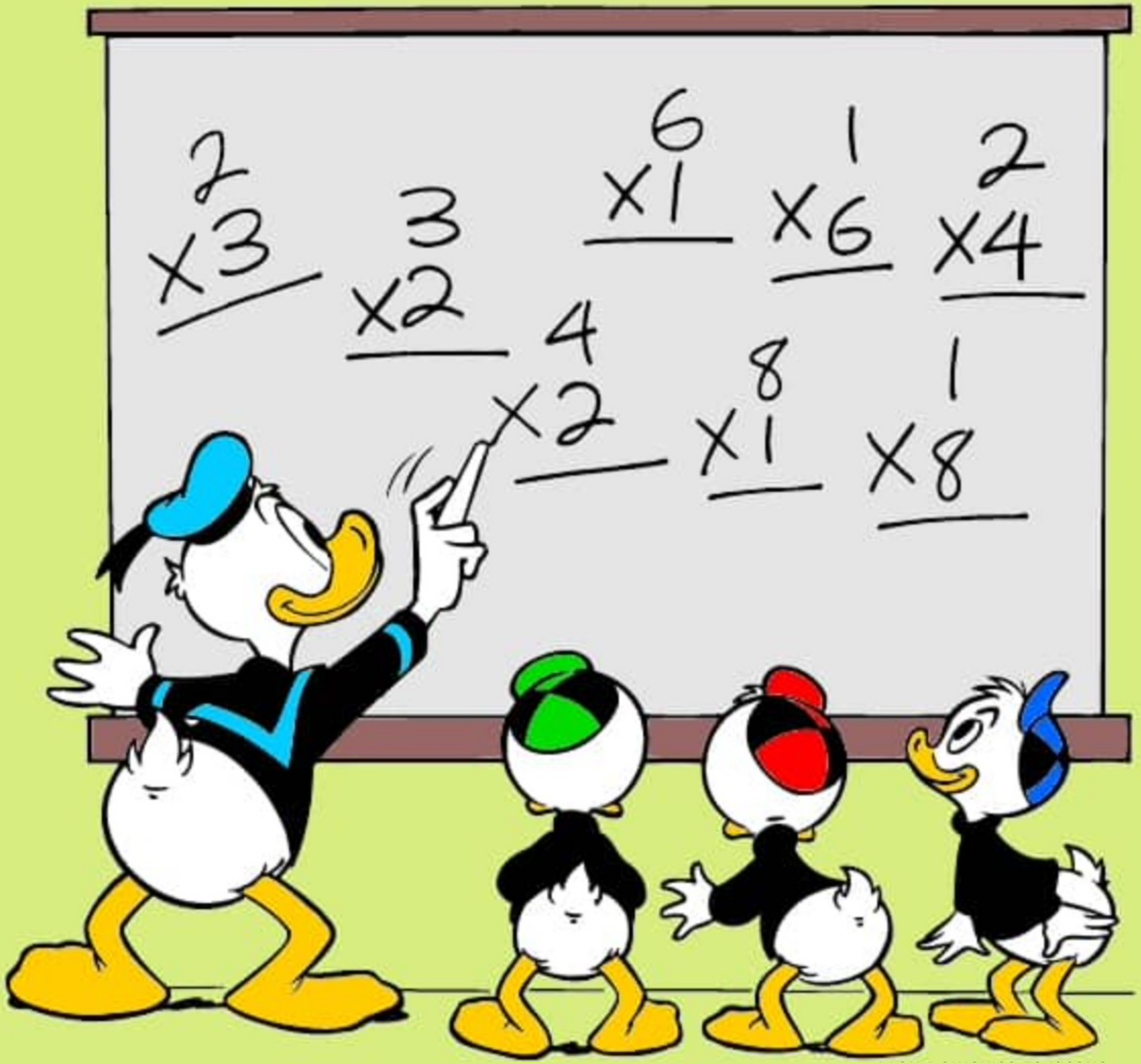
Completa.

64 $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{20}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot \dots}=\frac{\dots}{\dots}$ $\qquad$ $\frac{2}{5_1}\cdot\frac{10^2}{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\dots}{\dots}$ $\qquad$ $\frac{5}{4}:2=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\dots}{\dots}$

65 $3\cdot\frac{8}{7}=\frac{3\cdot 8}{1\cdot 7}=\frac{\dots}{7}$ $\qquad$ $\frac{21^{\dots}}{5}\cdot\frac{11}{35_{\dots}}=\frac{\dots}{5}\cdot\frac{11}{\dots}=\frac{\dots}{\dots}$ $\qquad$ $4:\frac{2}{5}=4\cdot\frac{5}{2}=\frac{\dots}{\dots}$

66 $\frac{22^{\dots}}{55_{\dots}}\cdot\frac{7}{9}=\frac{\dots}{\dots}\cdot\frac{7}{9}=\frac{\dots}{\dots}$ $\qquad$ $\frac{13}{36_{\dots}}\cdot\frac{81^{\dots}}{10}=\frac{13}{\dots}\cdot\frac{\dots}{10}=\frac{\dots}{\dots}$ $\qquad$ $\frac{9}{4}:\frac{3}{2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\dots}{\dots}$

67 $\frac{25}{12}:\frac{10}{9}=\frac{25}{12}\cdot\frac{9}{10}=\frac{\dots}{\dots}$ $\qquad$ $\frac{125}{16}:\frac{50}{8}=\frac{125}{16}\cdot\frac{8}{50}=\frac{\dots}{\dots}$ $\qquad$ $\frac{45^{\dots}}{26_{\dots}}\cdot\frac{13^{\dots}}{18_{\dots}}=\frac{\dots}{\dots}$



Addizione e sottrazione

Operazioni con le frazioni

Addizione e sottrazione

$$\frac{7}{5}+\frac{4}{5}$$

L' ADDIZIONE FRA DUE FRAZIONI
AVENTI LO STESSO DENOMINATORE
SI OTTIENE
SOMMANDO I NUMERATORI
E RISCRIVENDO IL
DENOMINATORE COMUNE

$$\frac{7}{5}+\frac{4}{5}=\frac{7+4}{5}=\frac{11}{5}$$

$$\frac{7}{5}-\frac{4}{5}$$

LA SOTTRAZIONE FRA DUE FRAZIONI
AVENTI LO STESSO DENOMINATORE
SI OTTIENE
SOTTRAENDO I NUMERATORI
E RISCRIVENDO IL
DENOMINATORE COMUNE

$$\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=\frac{7-4}{5}=\frac{3}{5}$$

Mathematica ML

Addizione e sottrazione (denominatore differente)

$$\frac{5}{12}+\frac{2}{3}$$

SE I DENOMINATORE SONO DIFFERENTI
SI PUO' OTTENERE IL
DENOMINATORE COMUNE

Mcm (12; 3)=4

$$\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=$$

Divido per il denominatore
E
Moltiplico per un numeratore

$$=\frac{5+8}{12}=\frac{13}{12}$$

Mathematica ML

Addizione e sottrazione (denominatore differente)

$$\frac{6}{49}+\frac{3}{7}=$$

Mcm (49; 7)=49

Divido per il denominatore
E
Moltiplico per un numeratore

$$=\frac{6}{49}+\frac{21}{49}+$$

$$=\frac{6+21}{49}=\frac{27}{49}$$

$$49 \div 49 = 1$$

$$49 \div 7 = 7$$

$$1 \cdot 6 = 6$$

$$7 \cdot 3 = 21$$

Mathematica ML

Addizione e sottrazione (denominatore differente)

$$\frac{9}{16} - \frac{1}{2} =$$

Mcm (16; 2)=16

Divido per il denominatore

E

Moltiplico per un numeratore

$$= \frac{9}{16} - \frac{8}{16} = \frac{9-8}{16} = \frac{1}{16}$$

$$16 \div 16 = 1$$

$$1 \cdot 9 = 9$$

$$16 \div 2 = 8$$

$$8 \cdot 1 = 8$$

Addizione e sottrazione (denominatore differente)

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{6}-\frac{17}{24}=$$

Mcm (12; 6; 24)=24

Divido per il denominatore
E
Moltiplico per un numeratore

$$=\frac{10}{24}+\frac{28}{24}-\frac{17}{24}=$$

$$=\frac{10+28-17}{24}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$$

Addizione e Sottrazione: Percorso da seguire

Addizione sottrazione

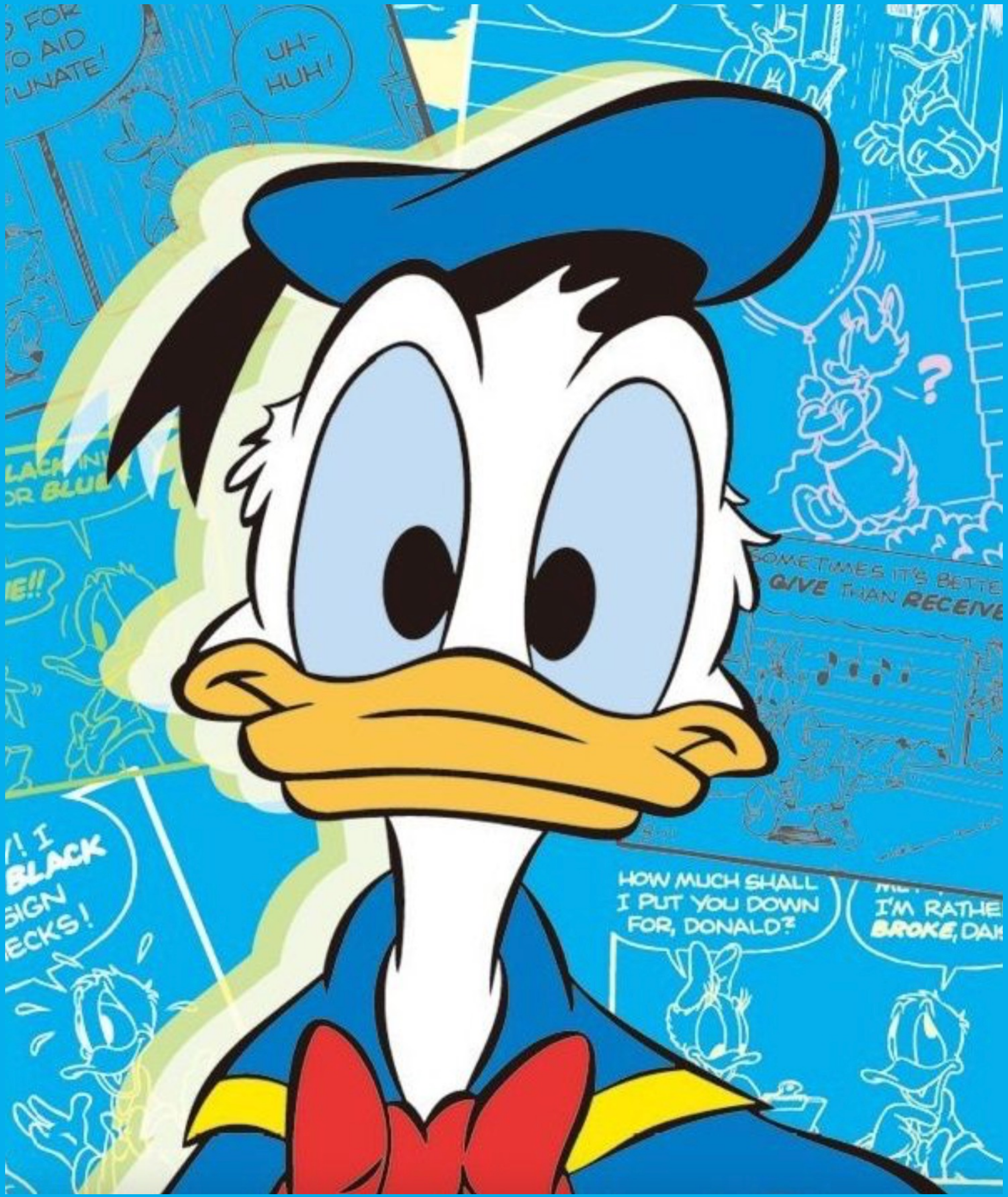
Minimo Comune Multiplo

Frazioni Equivalenti

addizionare sottrarre numeratori
e
ricopiare i denominatori

Potenze in Q

Operazioni con le frazioni



Potenza di una frazione

Bisogna porre molta attenzione se la potenza si riferisce a:

SOLO NUMERATORE
SOLO DENOMINATORE
INTERA FRAZIONE

$$\frac{2^3}{7}$$

SOLO NUMERATORE:
Si eleva a potenza solo il numeratore

$$\frac{8}{7}$$

$$\frac{7}{5^2}$$

SOLO DENOMINATORE:
Si eleva a potenza solo il denominatore

$$\frac{7}{25}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

INTERA FRAZIONE:
Si eleva a potenza sia il numeratore che il denominatore

$$\frac{9}{25}$$

Mathematica ML

Potenza di una frazione

INTERA FRAZIONE:

Si eleva a potenza sia il numeratore. che il denominatore

SE L'ESPONENTE E NEGATIVO:

1. si scambiano numeratore e denominatore
2. si cambia segno all'esponente
3. si svolge la potenza

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{2} = \frac{49}{9}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = (4)^{3} = 64$$

$$(15)^{-2} = \left(\frac{1}{15}\right)^{2} = \frac{1}{225}$$

Proprietà delle potenze in Q.

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{5+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^8$$

- $a^m : a^n = a^{m-n}$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{24} : \left(\frac{3}{5}\right)^{22} = \left(\frac{3}{5}\right)^{24-22} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]^4 = \left(\frac{3}{5}\right)^{3 \cdot 4} = \left(\frac{3}{5}\right)^{12}$$

- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

- $a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$, con $b \neq 0$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 : \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{2}{3} : \frac{1}{5}\right)^6 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1}\right)^6 = \left(\frac{10}{3}\right)^6$$

Potenza di una frazione. (esercitazione)

Calcola le seguenti potenze.

91 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ $\left(\frac{19}{7}\right)^0$ $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

92 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ $\left(\frac{9}{4}\right)^0$ $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

93 $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ $\left(\frac{1}{16}\right)^0$ $\left(\frac{1}{100}\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}\right)^6$

94 $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$ $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)^3$ $\left(\frac{3}{4}-\frac{6}{8}\right)^0$ $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^5$

95 $\left(\frac{1}{10}\right)^2$ $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ $\left(\frac{100}{9}\right)^0$ $\left(\frac{1}{10}\right)^4$

96 $\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\right)^{15}$ $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)^0$ $\left(\frac{10}{3}-\frac{5}{6}\right)^3$ $\left(\frac{7}{5}-\frac{2}{955}\right)^0$

97 $\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(\frac{7}{6}-\frac{1}{3}\right)^1$ $\left(1-\frac{1}{2}\right)^5$ $\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^0$

Mathematica ML

Potenza di una frazione. (esercitazione)

Semplifica applicando le proprietà delle potenze e lasciando il risultato sotto forma di potenza.

105 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^4$ $\quad$ $\left[\left(\frac{5}{4}\right)^4\right]^3$

106 $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$ $\quad$ $\left(\frac{5}{3}\right)^{17} : \left(\frac{5}{3}\right)^{11}$ $\quad$ $\left[\left(\frac{9}{4}\right)^5\right]^4$

107 $\left(\frac{7}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^8 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^3$ $\quad$ $\left[\left(\frac{1}{13}\right)^{39} : \left(\frac{1}{13}\right)^{11}\right] : \left(\frac{1}{13}\right)^8$ $\quad$ $\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{10}\right]^{10}\right\}^2$

108 $\left(\frac{1}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$ $\quad$ $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{20} : \left(\frac{1}{3}\right)^5\right] : \left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ $\quad$ $\left\{\left[\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\right]^{10}\right\}^{10}$

109 $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right] : \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$ $\quad$ $\left(\frac{3}{5}\right)^8 \cdot \left[\left(\frac{3}{5}\right)^8 : \left(\frac{3}{5}\right)^6\right]$

110 $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right] : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^4$ $\quad$ $\left[\left(\frac{8}{7}\right)^{18} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^{14}\right] : \left[\left(\frac{8}{7}\right)^{16}\right]^2$

Pausa

I numeri razionali e le frazioni che li generano

I numeri razionali e le frazioni che li generano.

Si chiama numero razionale, quel numero decimale che può essere trasformato in frazione.

Parte intera

Parte periodica

$$754{,}48\overline{953} = 754{,}\underbrace{48953953953}\ldots$$

Antiperiodo

Parte decimale

Parte intera: la parte del numero che si trova prima della virgola

Parte decimale: parte del numero che si trova dopo la virgola

Parte periodica o periodo: parte del numero che si ripete nello stesso ordine fino all'infinito

Antiperiodo: parte del numero compresa tra la virgola e la parte periodica

I numeri razionali e le frazioni che li generano.

- Numero decimale
  - limitato
  - illimitato
    - periodico
      - semplice
      - misto
    - Non periodico

I numeri razionali e le frazioni che li generano.

Tipo di decimale	Caratteristiche	Esempio
Decimale limitato	Dopo la virgola un numero limitato di cifre	$2,45$
Decimale periodico semplice	Il periodo inizia subito dopo la virgola	$7,\overline{36}$
Decimale periodico misto	Tra la virgola e il periodo ci sono cifre non periodiche	$6,41\overline{6}$
Illimitato non periodico	Dopo la virgola le cifre continuano all'infinito senza	$\pi = 3,1415\ldots$

Classificazione dei numeri decimali

1) Numero decimale limitato: è un numero decimale la cui parte decimale è composta da un numero finito di cifre. Alcuni esempi di numeri decimali limitati sono 21,54; 65,874; 0,032.

2) Numero decimale illimitato: è un numero decimale la cui parte decimale è composta da un numero infinito di cifre. A loro volta i numeri decimali illimitati si dividono in:

2a) Numeri decimali periodici semplici: sono numeri decimali illimitati la cui parte decimale è composta da un gruppo di cifre che si ripete all'infinito. Questo gruppo di cifre viene detto **periodo** e si indica con una barra orizzontale riportata sul gruppo di cifre o racchiudendo le cifre tra una coppia di parentesi tonde.

Esempi di numeri decimali periodici semplici sono: 1,3333...; 5,212121...; 84,123123123... che scriveremo in forma compatta come segue:

$$1,3333... = 1,\overline{3}$$

$$5,212121... = 5,\overline{21}$$

Classificazione dei numeri decimali

2b) Numeri decimali periodici misti: sono numeri decimali illimitati la cui parte decimale è composta da due elementi: l'antiperiodo ed il periodo. Del periodo abbiamo già discusso, il nuovo elemento è l'**antiperiodo** ed è quel gruppo di cifre compreso tra la parte intera ed il periodo.

Esempi di numeri decimali periodici misti sono:

$$4,36666... = 4,3\overline{6}$$

$$12,15212121... = 12,15\overline{21}$$

$$0,11141514151415... = 0,11\overline{1415}$$

Possiamo notare come in ogni numero vi sia un gruppo di cifre, il periodo, che si ripete all'infinito ed un altro gruppo di cifre compreso tra la parte intera ed il periodo, il così detto antiperiodo.

Mathematica ML

Classificazione dei numeri decimali

2c) Numeri decimali illimitati non periodici: sono numeri decimali la cui parte decimale è composta da un numero infinito di cifre di cui nessuna periodica, ovvero nei numeri decimali illimitati non periodici nessun gruppo di cifre si ripete infinitamente. Tali numeri son talmente particolari da meritare un vero e proprio nome; sono infatti conosciuti con il nome di numeri irrazionali.

Frazione generatrice di un numero decimale limitato

Per determinare la frazione generatrice di un numero decimale limitato scriveremo una frazione avente:

- a numeratore il numero senza virgola:

- a denominatore un 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali.

Esempi

$$1,01 = \frac{101}{100}$$

$$0,11 = \frac{11}{100}$$

$$32,1 = \frac{321}{10}$$

Frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice

La frazione generatrice di un numero decimale periodico semplice è una frazione avente:

- al numeratore la differenza tra l'intero numero scritto senza la virgola e la parte intera;

- al denominatore tanti nove quante sono le cifre che compongono il periodo.

Esempi

$$22,\overline{3} = \frac{223-22}{9} = \frac{201}{9}$$

$$0,\overline{29} = \frac{29-0}{99} = \frac{29}{99}$$

$$1,\overline{213} = \frac{1213-1}{999} = \frac{1212}{999} = \frac{404}{333}$$

Frazione generatrice di un numero decimale periodico misto

La frazione generatrice di un numero decimale periodico misto è una frazione con:

- a numeratore la differenza tra l'intero numero senza virgola e tutto ciò che non fa parte del periodo;
- a denominatore tanti nove quante sono le cifre che compongono il periodo, seguiti da tanti zeri quanti sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempi

$$2,2\overline{3} = \frac{223-22}{90} = \frac{201}{90} = \frac{67}{30}$$

$$0,2\overline{3} = \frac{23-2}{90} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

$$1,21\overline{3} = \frac{1213-121}{900} = \frac{1092}{900} = \frac{91}{75}$$

Frazione generatrice di un numero decimale periodico misto

Tipo di decimale	Dopo la virgola	Esempio	Come si trova la frazione
Limitato	Solo cifre non periodiche	$3{,}145 = \dfrac{3145}{1000}$	**Numeratore**: Tutto il numero senza la virgola **Denominatore**: Un uno seguito da Tanti zeri quanto sono le cifre dopo la virgola
Illimitato periodico semplice	**Solo cifre periodiche**	$2,\overline{14} = \dfrac{217-2}{99}$	**Numeratore: Tutto il numero senza la virgola meno la parte non periodica** **Denominatore: tanti 9 quanto le cifre periodiche seguiti da tanti zeri quante le cifre dell'antiperiodo**
Illimitato periodico misto	Sia cifre non periodiche che periodiche	$29{,}45\overline{65} = \dfrac{294865-2948}{9900}$	
Illimitato non periodico	**Solo cifre non periodiche**	**Non esiste una frazione generatrice**	**Numero irrazionale (Numero trascendente)**

Frazione generatrice. Esercizi.

Dalle frazioni ai numeri decimali

182 Individua la parte intera e la parte decimale di ciascuno dei seguenti numeri decimali finiti:

4,43 2,2 3,02 123,1 0,456 0,075

183 Scrivi il numero decimale che ha:

a. parte intera 5, parte decimale 78

b. parte intera 6, periodo 5

c. parte intera 4, antiperiodo 3, periodo 7

d. parte intera 3, antiperiodo 12, periodo 43

Frazione generatrice. Esercizi.

184 Completa la seguente tabella.

Numero	Tipo	Periodo	Antiperiodo
0,255555.....	Periodico misto	5	2
0,252525.....	....	....	....
5,78585858.....	....	....	....
8,11133333.....	....	....	....
0,3788888	....	....	....

Mathematica ML

Frazione generatrice. Esercizi.

Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali.

200 $0,\overline{32}$ $\quad$ $1,0\overline{4}$ $\quad$ $2,4$ $\quad$ $\left[\frac{32}{99}; \frac{47}{45}; \frac{12}{5}\right]$

201 $5,\overline{2}$ $\quad$ $3,4$ $\quad$ $0,32$ $\quad$ $\left[\frac{47}{9}; \frac{17}{5}; \frac{8}{25}\right]$

202 $0,3\overline{6}$ $\quad$ $0,\overline{36}$ $\quad$ $2,2$ $\quad$ $\left[\frac{11}{30}; \frac{4}{11}; \frac{11}{5}\right]$

203 $1,\overline{4}$ $\quad$ $2,45$ $\quad$ $5,1\overline{5}$ $\quad$ $\left[\frac{13}{9}; \frac{49}{20}; \frac{232}{45}\right]$

Frazione generatrice. Esercizi.

204	$1,\overline{3}$	$3,6$	$1,2\overline{6}$	$\left[\frac{4}{3};\ \frac{18}{5};\ \frac{19}{15}\right]$
205	$0,20\overline{5}$	$0,0\overline{3}$	$1,05$	$\left[\frac{37}{180};\ \frac{1}{30};\ \frac{21}{20}\right]$
206	$0,1\overline{3}$	$2,0\overline{4}$	$0,12$	$\left[\frac{2}{15};\ \frac{92}{45};\ \frac{3}{25}\right]$
207	$0,004$	$5,\overline{25}$	$3,9$	$\left[\frac{1}{250};\ \frac{520}{99};\ \frac{39}{10}\right]$

Frazione generatrice. Esercizi.

208 $2{,}8$ $\quad 2{,}\overline{8}$ $\quad 2{,}10\overline{8}$ $\quad \left[\frac{14}{5};\ \frac{26}{9};\ \frac{949}{450}\right]$

209 $0{,}\overline{123}$ $\quad 1{,}0\overline{5}$ $\quad 5{,}45$ $\quad \left[\frac{41}{333};\ \frac{19}{18};\ \frac{109}{20}\right]$

210 $7{,}08\overline{3}$ $\quad 3{,}0625$ $\quad 3{,}2\overline{27}$ $\quad 0{,}\overline{09}$ $\quad \left[\frac{85}{12};\ \frac{49}{16};\ \frac{71}{22};\ \frac{1}{11}\right]$

211 $5{,}6\overline{81}$ $\quad 0{,}125$ $\quad 4{,}91\overline{6}$ $\quad 1{,}\overline{75}$ $\quad \left[\frac{125}{22};\ \frac{1}{8};\ \frac{59}{12};\ \frac{58}{33}\right]$

Frazione generatrice. Esercizi.

212 $0,\overline{592}$ $\quad 0,20\overline{8}$ $\quad 5,625$ $\quad 6,\overline{09}$

$\left[\frac{16}{27}; \frac{47}{225}; \frac{45}{8}; \frac{67}{11}\right]$

213 $0,0075$ $\quad 0,00\overline{75}$ $\quad 0,\overline{370}$ $\quad 7,7\overline{12}$

$\left[\frac{3}{400}; \frac{1}{132}; \frac{10}{27}; \frac{509}{66}\right]$

Frazione generatrice. Esercizi.

Esegui le seguenti operazioni, dopo aver trasformato i numeri decimali in frazioni.

214 $0,3 - 0,2$ $\quad$ $0,2 : 0,\overline{3}$ $\quad$ $0,1\overline{2} : 1,1$

215 $0,2 + 0,\overline{2}$ $\quad$ $0,2 : 0,\overline{2}$ $\quad$ $0,3 \cdot 0,\overline{6}$

216 $0,05 + 0,0\overline{5}$ $\quad$ $0,12 \cdot 0,25$ $\quad$ $0,2\overline{5} : 0,\overline{1}$

217 $0,\overline{12} + 0,\overline{1}$ $\quad$ $0,\overline{12} \cdot 2,25$ $\quad$ $0,5 : 0,\overline{5}$

Frazione generatrice. Esercizi.

Poni il simbolo corretto (<, =, >).

218 $2{,}3 \ldots\ldots 2{,}\overline{3}$ $\qquad 0{,}4 \ldots\ldots \dfrac{2}{5}$ $\qquad 0{,}\overline{25} \ldots\ldots 0{,}25$

219 $0{,}6 \ldots\ldots \dfrac{7}{9}$ $\qquad 0{,}\overline{6} \ldots\ldots \dfrac{3}{5}$ $\qquad 1{,}5\overline{6} \ldots\ldots 1{,}57$

Ordina in senso crescente.

220 $0{,}4;\quad \dfrac{7}{5};\quad 0{,}\overline{4};\quad \dfrac{1}{0{,}4};\quad \dfrac{5}{7};\quad \dfrac{1}{0{,}\overline{4}};\quad \dfrac{13}{9};\quad \dfrac{1}{1{,}\overline{4}}$

221 $\dfrac{13}{20};\quad 0{,}\overline{6};\quad \dfrac{3}{5};\quad 0{,}6\overline{5};\quad \dfrac{1}{0{,}6\overline{5}}$

Frazione generatrice. Esercizi.

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

222 $\left\{\left[\left(0,3-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{2}\right]:\left[(1-0,4):\left(3-\frac{5}{2}\right)\right]\right\}\cdot\frac{6}{25}$

223 $(0,\overline{5}-0,5):0,\overline{1}+(0,\overline{4}-0,4):0,2$

224 $(1,2+0,\overline{2}-1)\cdot\left(2-\frac{33}{19}\right)+(1+0,25)\cdot(1+0,\overline{3})$

225 $(1,\overline{7}+1,\overline{2}):0,\overline{9}+\left(0,\overline{2}-\frac{1}{1,\overline{5}}\right)\cdot\left(0,2-\frac{1}{5}\right)$

226 $\frac{1-0,8\overline{3}}{1+0,\overline{3}}+\frac{0,125}{3-0,5}$

Mathematica ML

RAPPORTI E PROPORZIONI

Rapporti

Il concetto di rapporto

DEFINIZIONE. Il **rapporto** fra due valori numerici *a* e *b* è costituito dal loro **quoziente**;
a e *b* sono i termini del rapporto, il primo termine si chiama **antecedente**,
il secondo si chiama **conseguente**.

Si può scrivere nelle forme

antecedente *conseguente*

$$a : b$$

Termini del rapporto

antecedente

Termini del rapporto

$$\frac{a}{b}$$

conseguente

Il **rapporto inverso** dei due numeri si ottiene semplicemente invertendo l'antecedente con il conseguente.

Il rapporto tra grandezze omogenee

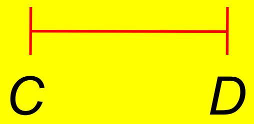
PROPRIETÀ. Il **rapporto** tra due **grandezze omogenee** dà origine a un **numero puro**, senza cioè unità di misura e che può essere *naturale*, *razionale* o *irrazionale*.

Primo caso **Il rapporto dà origine ad un numero naturale.**

ESEMPIO

Calcoliamo il rapporto tra due segmenti lunghi rispettivamente 10 cm e 2 cm.

$\overline{AB} = 10$ cm



$\overline{CD} = 2$ cm

Il rapporto tra la prima e seconda grandezza è $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\cancel{10}^{\,5}\ \cancel{\text{cm}}}{\cancel{2}_{\,1}\ \cancel{\text{cm}}} = 5$

La proprietà fondamentale del rapporto

PROPRIETÀ. Moltiplicando o dividendo l'antecedente e il conseguente per uno stesso numero, diverso da 0, si ottiene un rapporto equivalente a quello dato.

Consideriamo il rapporto

$$20:4=5$$

equivale a

$$(20\cdot 3):(4\cdot 3)=60:12=5$$

Il valore del rapporto. non cambia

oppure equivale a

$$(20:2):(4:2)=10:2=5$$

Il rapporto tra grandezze omogenee

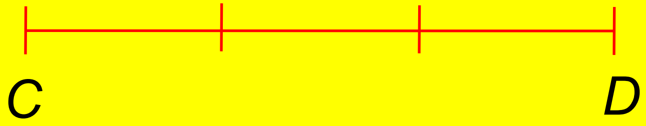
La proprietà fondamentale del rapporto

Secondo caso **Il rapporto dà origine ad un numero razionale.**

ESEMPIO

Calcoliamo il rapporto tra due segmenti lunghi rispettivamente 10 cm e 6 cm.

$\overline{AB} = 10$ cm



$\overline{CD} = 6$ cm

Il rapporto tra la prima e la seconda grandezza è $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\cancel{10}^{\,5}\ \cancel{\text{cm}}}{\cancel{6}^{\,3}\ \cancel{\text{cm}}} = \dfrac{5}{3}$

Il rapporto tra grandezze omogenee

La proprietà fondamentale del rapporto

Per questi due primi casi possiamo concludere che:

DEFINIZIONE. Due grandezze che hanno per rapporto un numero naturale o un numero razionale si dicono **commensurabili** (ammettono cioè un sottomultiplo comune).

La proprietà fondamentale del rapporto

Terzo caso **Il rapporto dà origine ad un numero irrazionale.**

ESEMPIO

Consideriamo un quadrato il cui lato è 2 cm. In base al teorema di Pitagora la diagonale è lunga:

$$d = \sqrt{2^2 + 2^2}\ \text{cm} = \sqrt{4+4}\ \text{cm} = \sqrt{8}\ \text{cm} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\ \text{cm} = 2\cdot\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Eseguiamo il rapporto tra la diagonale e il lato del quadrato:

$$\frac{d}{\ell} = \frac{\left(\cancel{2}\cdot\sqrt{2}\right)\ \text{cm}}{\cancel{2}\ \text{cm}} = \sqrt{2}$$

In questo caso possiamo dire che:

DEFINIZIONE. Due grandezze che hanno per rapporto un numero irrazionale si dicono **incommensurabili** (non ammettono cioè un sottomultiplo comune).

Esercizi

Calcola il rapporto e, se esiste, il rapporto inverso tra le seguenti coppie di numeri.

248	13; 26	10; 45	3; 27	0; 54	88; 22	36; 216
249	27; 45	78; 65	25; 42	45; 75	80; 96	51; 34
250	35; 56	121; 66	85; 136	72; 132	90; 144	88; 96

Proporzioni

Il concetto di Proporzione

Consideriamo il seguente esempio:

- Stefano ha realizzato 60 punti in 4 partite di pallacanestro, con una media di

$$\frac{60}{4} = 15$$ punti per partita

- Paolo ha realizzato 30 punti in 2 partite di pallacanestro, con una media di

$$\frac{30}{2} = 15$$ punti per partita

I due giocatori hanno realizzato in media lo stesso numero di punti **in proporzione** alle partite giocate.

È possibile dunque scrivere la seguente uguaglianza: **60 : 4 = 30 : 2**

Si legge 60 sta a 4 come 30 sta a 2.

Il concetto di proporzione

DEFINIZIONE. Si dice **proporzione** un'uguaglianza tra due rapporti. I quattro numeri si chiamano **termini della proporzione**; il primo e il terzo si dicono **antecedenti**, il secondo e il quarto **conseguenti**.

Secondo un'altra classificazione possiamo dire che:

DEFINIZIONE. Il primo e il quarto numero si chiamano **estremi**; il secondo e il terzo si chiamano **medi**.

conseguenti

antecedenti

$$60 : 4 = 30 : 2$$

medi

Il concetto di Proporzione

DEFINIZIONE. Si dice **proporzione** un’ uguaglianza tra due rapporti.

I quattro numeri si chiamano **termini della proporzione**;

il primo e il terzo si dicono **antecedenti**,

il secondo e il quarto **conseguenti**.

Secondo un’ altra classificazione possiamo dire che:

DEFINIZIONE. Il primo e il quarto numero si chiamano **estremi**; il secondo e il terzo si chiamano **medi**.

conseguenti

antecedenti

$$60 : 4 = 30 : 2$$

medi

estremi

Le proporzioni continue

DEFINIZIONE. Tutte le proporzioni che hanno i medi uguali prendono il nome di **proporzioni continue**.

Il termine che occupa il posto dei medi si chiama **medio proporzionale**.

Ad esempio, nella proporzione:

$$125 : \underbrace{25 = 25}_{\textit{medio proporzionale}} : 5$$

Il numero 25 è il medio proporzionale.

La proprietà fondamentale delle proporzioni

PROPRIETÀ. In ogni proporzione il prodotto dei medi è sempre uguale al prodotto degli estremi.

Consideriamo la seguente proporzione: $25 : 5 = 10 : 2$

Si ha che:

$25 \cdot 2 = 50$ → ***Prodotto degli estremi***

$5 \cdot 10 = 50$ → ***Prodotto dei medi***

Proprietà dell'invertire

PROPRIETÀ. Se in una proporzione si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente, si ha ancora una proporzione.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente proporzione: $\underbrace{16 : 4}_{\text{antecedenti}} = \underbrace{8 : 2}_{\text{conseguenti}}$

Riscriviamola scambiando ogni antecedente con il proprio conseguente $4 : 16 = 2 : 8$

che è ancora una proporzione perché

$16 \cdot 2 = 32$ e $4 \cdot 8 = 32$

In generale possiamo affermare che

se $a : b = c : d$ allora anche $b : a = d : c$

Proprietà del permutare

PROPRIETÀ. Se in una proporzione si scambiano tra loro i due medi, i due estremi o entrambi, si ha ancora una proporzione.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente proporzione: $16:18=8:9$

- Scambiando i due medi si ha $16:8=18:9$ — $8\cdot18=144$, $16\cdot9=144$ — I prodotti sono uguali
- Scambiando i due estremi si ha $9:18=8:16$ — $18\cdot8=144$, $9\cdot16=144$ — I prodotti sono uguali
- Scambiando i due medi e i due estremi si ha $9:8=18:16$ — $8\cdot18=144$, $9\cdot16=144$ — I prodotti sono uguali

In generale se $a:b=c:d$ allora

$$a:c=b:d$$
$$d:b=c:a$$
$$d:c=b:a$$

Proprietà del comporre

PROPRIETÀ. In una proporzione la somma tra il primo e il secondo termine sta al primo (o al secondo) termine come la somma tra il terzo e il quarto termine sta al terzo (o al quarto) termine.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente proporzione: $10:5=12:6$

- Se sostituiamo al primo termine la somma tra il primo e il secondo termine, al terzo termine la somma tra il terzo e il quarto termine, e sostituiamo il secondo e il quarto termine con il primo e il terzo termine, otteniamo

$$(10+5):10=(12+6):12 \quad \text{cioè} \quad 15:10=18:12$$

- Se sostituiamo al primo termine la somma tra il primo e il secondo termine, al terzo termine la somma tra il terzo e il quarto termine, e scegliamo come secondo e quarto termine il secondo e il quarto termine, otteniamo

$$(10+5):5=(12+6):6 \quad \text{cioè} \quad 15:5=18:6$$

In generale, se $a : b = c : d$ allora

$$(a + b) : a = (c + d) : c$$
$$(a + b) : b = (c + d) : d$$

Mathematica ML

Proprietà dello scomporre

PROPRIETÀ. In una proporzione (avente gli antecedenti maggiori dei rispettivi conseguenti) la differenza tra il primo e il secondo termine sta al primo (o al secondo) termine come la differenza tra il terzo e il quarto termine sta al terzo (o al quarto) termine.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente proporzione: $56:24=28:12$

- Se sostituiamo al primo termine la differenza tra il primo e il secondo termine, al terzo termine la differenza tra il terzo e il quarto termine, e sostituiamo il secondo e il quarto termine con il primo e il terzo termine, otteniamo

$(56-24):56=(28-12):28$ cioè $32:56=16:28$

- Se sostituiamo al primo termine la differenza tra il primo e il secondo termine, al terzo termine la differenza tra il terzo e il quarto termine, e scegliamo come secondo e quarto termine il secondo e il quarto termine, otteniamo

$(56-24):24=(28-12):12$ cioè $32:24=16:12$

In generale, se $a:b=c:d$ con $a>b$ e $c>d$ allora $(a-b):a=(c-d):c$
$(a-b):b=(c-d):d$

Proprietà da Ricordare:

Proprietà Prodotto dei medi è sempre uguale al prodotto degli estremi.

Se. $a : b = c : d$ allora: $a \cdot d = b \cdot c$

Proprietà dell'invertire *Se.* $a : b = c : d$ allora anche $b : a = d : c$

Proprietà del permutare In generale se $a : b = c : d$ allora

$$a : c = b : d$$
$$d : b = c : a$$
$$d : c = b : a$$

La risoluzione di una proporzione

Risolvere una proporzione significa calcolare il **termine incognito** conoscendo il valore degli altri tre termini.

Primo caso **Calcolare un estremo di una proporzione.**

REGOLA. In una proporzione il valore di un estremo incognito si ricava moltiplicando i due medi e dividendo il prodotto ottenuto per l'estremo noto.

ESEMPIO

$$\mathbf{25 : 2 = 100 : \mathit{x}}$$

$$x = \frac{2 \cdot \cancel{100}^{\,4}}{\cancel{25}_{\,1}} = \frac{2 \cdot 4}{1} = 8$$

Quindi la proporzione è: $25 : 2 = 100 : 8$

Secondo caso **Calcolare un medio di una proporzione.**

REGOLA. In una proporzione il valore di un medio incognito si ricava moltiplicando i due estremi e dividendo il prodotto ottenuto per il medio noto.

ESEMPIO

$$\mathbf{48 : x = 36 : 60}$$

$$x = \frac{\cancel{48}^{16} \cdot \cancel{60}^{\cancel{15}^{5}}}{\cancel{36}_{\cancel{9}_{\cancel{3}_{1}}}} = \frac{16 \cdot 5}{1} = 80$$

Quindi la proporzione è: $48 : 80 = 36 : 60$

Terzo caso **Calcolare il medio proporzionale di una proporzione continua.**

REGOLA. In una proporzione continua il valore del medio proporzionale si ottiene calcolando la radice quadrata del prodotto dei due estremi.

ESEMPIO

$$\mathbf{4 : \mathit{x} = \mathit{x} : 49}$$

$$x = \sqrt{4 \cdot 49} = \sqrt{196} = 14$$

Quindi la proporzione è:

$$4 : 14 = 14 : 49$$

Esempio

Stabiliamo se i seguenti gruppi di numeri formano una proporzione:

a. 54, 126, 39, 91

$$54,\ 126,\ 39,\ 91 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{54}{126} = \dfrac{3}{7} \\[2ex] \dfrac{39}{91} = \dfrac{3}{7} \end{array} \right. \qquad \text{oppure} \qquad \left\langle \begin{array}{r} 126 \cdot 39 = 4914 \\ 54 \cdot 91 = 4914 \end{array} \right.$$

quindi sussiste la proporzione $54 : 126 = 39 : 91$.

Esempio

Stabiliamo se i seguenti gruppi di numeri formano una proporzione:

b. 69, 115, 70, 120

$$69,\ 115,\ 70,\ 120 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{69}{115} = \dfrac{3}{5} \\[2ex] \dfrac{70}{120} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 115 \cdot 70 = 8050 \\ 69 \cdot 120 = 8280 \end{cases}$$

Poiché si sono ottenuti risultati diversi, i numeri non formano una proporzione.

Esercizi

Riconosci tra i seguenti gruppi di numeri quelli che formano una proporzione.

252 28, 21, 60, 45 — 27, 99, 33, 121 — 54, 63, 108, 126 — 108, 180, 45, 70

253 80, 88, 30, 33 — 70, 74, 20, 24 — 56, 66, 36, 46 — 64, 84, 96, 126

Verifica che le seguenti proporzioni soddisfano le proprietà dell'invertire, del permutare,

254 $24 : 12 = 64 : 32$ — $38 : 4 = 57 : 3$ — $44 : 4 = 121 : 11$ — $12 : 5 = 108 : 45$

255 $42 : 14 = 99 : 33$ — $128 : 36 = 64 : 18$ — $17 : 35 = 68 : 140$ — $85 : 90 = 17 : 18$

256 $105 : 60 = 41 : 12$ — $28 : 49 = 48 : 84$ — $54 : 58 = 135 : 145$ — $6 : 50 = 9 : 75$

Determina il termine incognito nelle seguenti proporzioni.

258 $x : 75 = 72 : 30$ $\quad 87 : x = 20 : 12$ $\quad 57 : 21 = x : 14$

259 $68 : 51 = 30 : x$ $\quad 63 : 21 = 21 : x$ $\quad 27 : 18 = x : 12$

260 $\frac{36}{25} : x = \frac{63}{20} : \frac{35}{8}$ $\quad \frac{7}{8} : \frac{5}{12} = \frac{42}{5} : x$ $\quad \frac{15}{16} : \frac{35}{9} = x : \frac{56}{27}$

261 $12 : x = 5 : 20$ $\quad x : 6 = 7 : 21$

262 $12 : 60 = 3 : x$ $\quad \frac{1}{2} : x = \frac{5}{4} : \frac{3}{4}$

263 $0{,}2 : x = 4 : 84$ $\quad x : 11 = 2 : 22$

264 $16 : 12 = x : 4$ $\quad x : \frac{1}{2} = \frac{3}{5} : \frac{1}{10}$

265 $x : \frac{7}{4} = 10 : 2$ $\quad 0{,}2 : \frac{1}{2} = x : 10$

Risoluzione di particolari proporzioni

Primo caso

REGOLA. In una proporzione il valore di uno dei due medi, che è anche una parte da aggiungere al corrispondente estremo, si ottiene applicando prima la proprietà dello scomporre e poi moltiplicando gli estremi della proporzione ottenuta e dividendo il prodotto per l'altro medio.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente proporzione: $(15+x):x=8:2$

applichiamo la proprietà dello scomporre $(15+\cancel{x}-\cancel{x}):x=(8-2):2$

e otteniamo $15:x=6:2$ $\quad x=\dfrac{\overset{5}{\cancel{15}}\cdot\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{6}}}=5$

Quindi la proporzione è: $(15+5):5=8:2$ cioè $20:5=8:2$

Risoluzione di particolari proporzioni

Secondo

REGOLA. In una proporzione il valore di uno dei due medi, che è anche la parte da sottrarre al corrispondente estremo, si ottiene applicando prima la proprietà del comporre e poi moltiplicando gli estremi della proporzione ottenuta e dividendo il prodotto per l’altro medio.

ESEMPIO

Consideriamo la seguente proporzione: $(64-x):x=31:1$

applichiamo la proprietà del comporre $(64-\cancel{x}+\cancel{x}):x=(31+1):1$

e otteniamo $64:x=32:1$ $\qquad x=\dfrac{\overset{2}{\cancel{64}}\cdot 1}{\underset{1}{\cancel{32}}}=2$

Quindi la proporzione è: $(64-2):2=31:1$ cioè $62:2=31:1$

Problemi della realtà risolvibili applicando le proporzioni

Problemi dalla realtà. Le proporzioni

279 Un'automobile percorre mediamente 24 km con un litro di benzina. Quanti litri di benzina occorrono in media per percorrere 100 km?
[Circa 4,2 litri (arrotondando ai decimi)]

280 Da un rubinetto di una vasca fuoriescono 60 litri di acqua in 4 minuti. Quanti litri di acqua escono dal rubinetto in mezz'ora? [450]

281 Compro 8 penne e spendo 10 euro. Quanto spenderei se comprassi 15 penne dello stesso tipo delle precedenti? [18 euro e 75 centesimi]

282 Per dipingere una parete rettangolare larga 5 m e alta 2 m occorrono 1,5 kg di vernice. Quanta vernice occorre per dipingere una parete rettangolare larga 6 m e alta 3 m? [2,7 kg]

Mathematica ML

Percentuali

Percentuali

La scrittura **P%** , nella quale il simbolo % si legge ''per cento'', è un modo equivalente di esprimere $\frac{P}{100}$ e si chiama percentuale

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$7\% = \frac{7}{100}$$

Esempio

IN UNA SCUOLA DI 870 STUDENTI NE SONO STATI PROMOSSI 640.

CALCOLARE LA PERCENTUALE DEI PROMOSSI

Impostiamo la Proporzione:

$x \div 100 = 640 \div 870$

$$x = \frac{100 \cdot 640}{870} = \frac{64000}{870} = 73{,}56\ \%$$

La scuola ha promosso il 73,56 % degli alunni

Esempio

PAPEROGA MANGIA IL 40% DI UNA TORTA RETTANGOLARE DI AREA $200\ cm^2$

Calcoliamo il 40% di $200\ cm^2$

Impostiamo la Proporzione:

$$40 \div 100 = x \div 200\ cm^2$$

$$x = \frac{40 \cdot 200\ cm^2}{100} = \frac{8000\ cm^2}{100} = 80\ cm^2$$

PAPEROGA MANGIA UN PEZZO DI TORTA GRANDE $80\ cm^2$

Esempio

Qual è quel numero che aumentato de 16 % diventa 1890.

$$x + 16\ \%\ x = 1890$$

$$x + \frac{16}{100}x = 1890$$

$$x(1 + \frac{16}{100}) = 1890$$

$$x(\frac{100 + 116}{100}) = 1890$$

$$x(\frac{116}{100}) = 1890$$

$$x = \left(\frac{1890 \cdot 100}{116}\right) = \frac{189000}{116} = 1629{,}3$$

Percentuali

Esercizi

308 Confronta il 13% di 5000 con la somma del 10% di 2000 e del 15% di 3000. [Sono uguali]

309 Qual è il numero che aumentato del 18% diventa 1416? [1200]

310 Qual è il numero che diminuito del 16% diventa 1386? [1650]

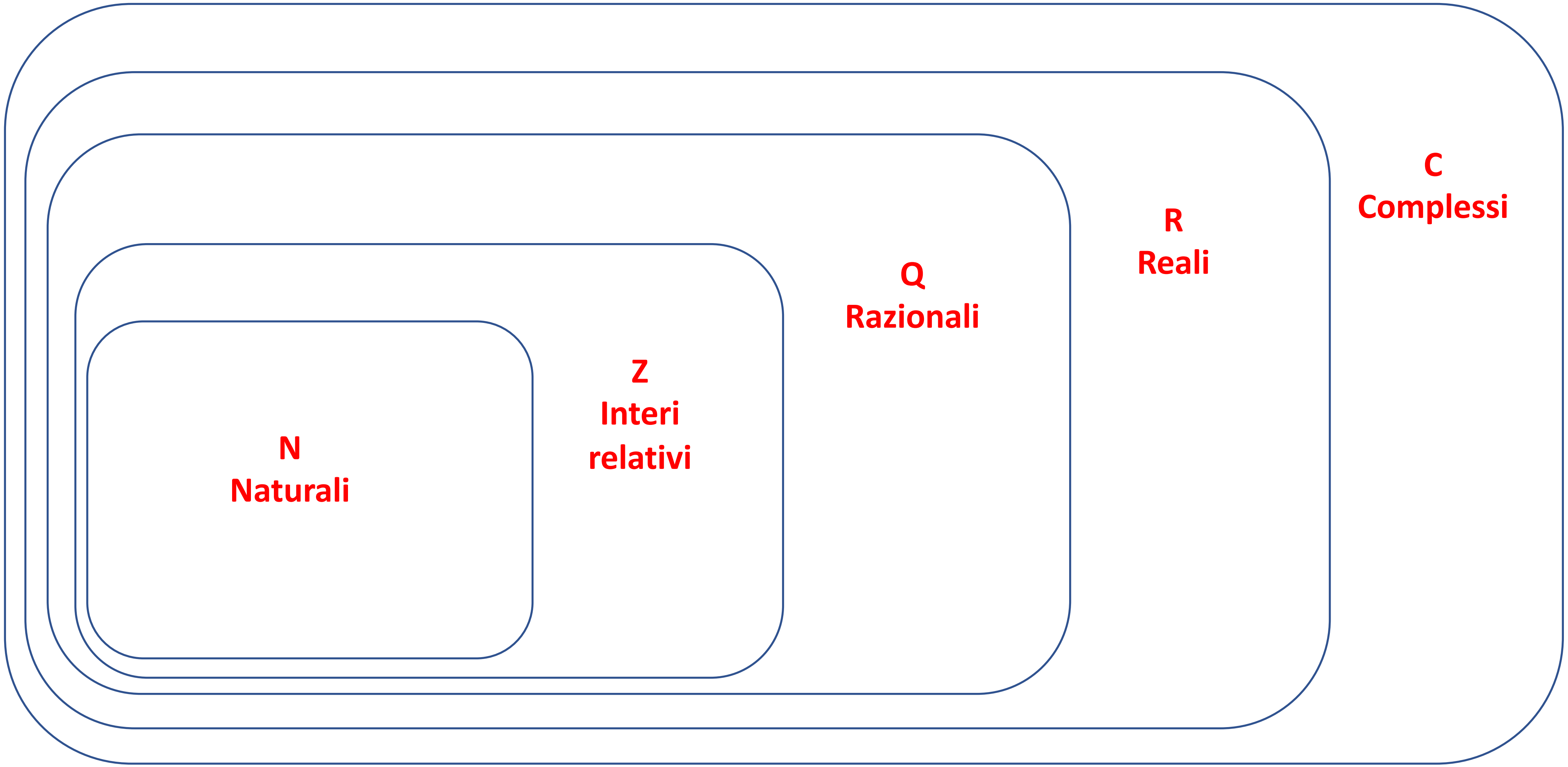
311 Quanto è lungo il lato di un quadrato se la misura della sua area è il 64% di quella di un altro quadrato di lato 40 cm? [32 cm]

312 Quale numero ricavi se aumenti 1600 del 10% e poi diminuisci del 10% il numero che ottieni? [1584]

Pausa

I numeri Reali

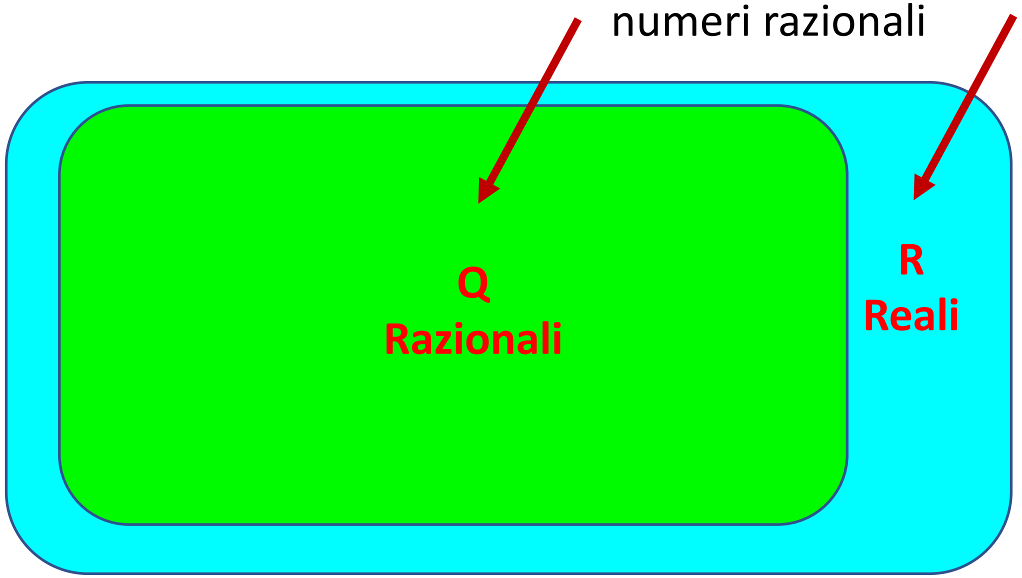
I numeri Reali



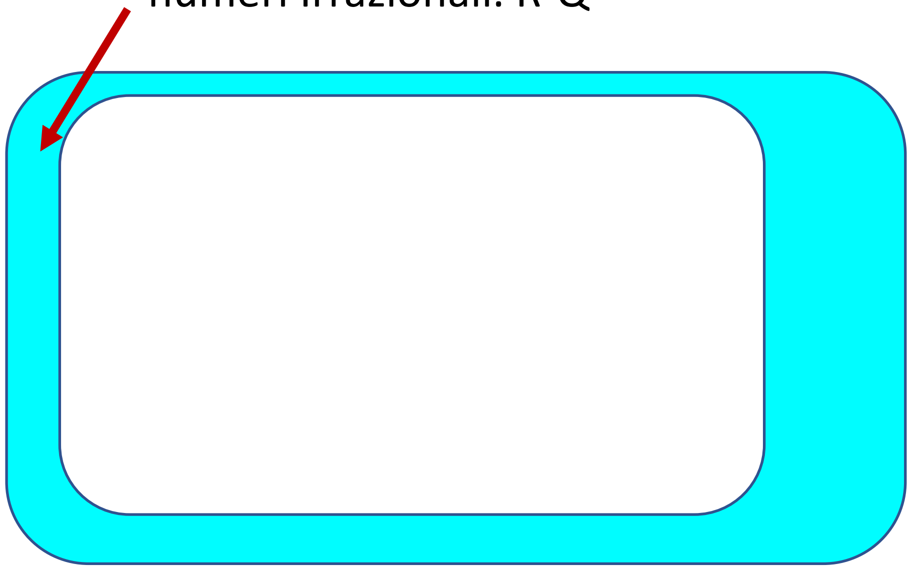
I numeri irrazionali

Insieme dei numeri razionali

Insieme dei numeri reali



Insieme dei numeri Irrazionali. R-Q



Si chiama **numero irrazionale** ogni numero (relativo) la cui rappresentazione decimale è illimitata e non periodica

$\sqrt{2} = 1{,}41412\ldots.$ $\quad\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots.$ $\quad\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots.$ Sono numeri irrazionali

Ogni $\sqrt{n}$ dove n non è un quadrato perfetto è un numero irrazionali

$\pi = 3{,}1415\ldots..$ $\quad$ È $\mathit{un\ numero\ irrazionale}$

I numeri reali

Si chiama numero reale ogni **numero razionale o irrazionale**.

L'insieme dei numeri reali si indica con la lettera R

L' insieme R è:

- infinito,
- ordinato,
- completo,

ossia a ogni numero reale corrisponde un solo punto sulla retta e a ogni punto sulla retta corrisponde un solo numero reale (proprietà di cui invece non gode l'insieme Q).

Per ogni numero, barra la casella corrispondente al più piccolo insieme numerico a cui tale numero appartiene.

567 $(-2)^3$ ☐ N ☐ Z ☐ Q ☐ R

568 $(-2)^4$ ☐ N ☐ Z ☐ Q ☐ R

569 $0{,}1\overline{5}$ ☐ N ☐ Z ☐ Q ☐ R

570 $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ ☐ N ☐ Z ☐ Q ☐ R

571 $\sqrt{11}$ ☐ N ☐ Z ☐ Q ☐ R

572 $1{,}\overline{9}$ ☐ N ☐ Z ☐ Q ☐ R

573 $\sqrt{3^{-2}}$ ☐ N ☐ Z ☐ Q ☐ R

574 $\pi + 2$ ☐ N ☐ Z ☐ Q ☐ R

Individua, fra i seguenti numeri, quali numeri sono razionali e quali irrazionali.

575	2^0	$2{,}\overline{3}$	$\sqrt{2^{-2}}$	$\sqrt{2^{-3}}$
576	$\sqrt{\frac{9}{4}}$	$-\pi$	$\sqrt{7}$	$(-2)^{-3}$
577	$-\frac{2}{3}$	$1{,}2\overline{3}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{9^{11}:9^9}$
578	-1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}$	2π
579	3^0	7^{-2}	$\sqrt{64}$	$\sqrt{\frac{1}{7}}$
580	-5	5^{-1}	$\sqrt{5^0}$	$\sqrt{5}$
581	$(-2)^{-3}$	$\sqrt{2^{-2}}$	$\sqrt{2\cdot 2^3}$	$\sqrt{2^5:2^2}$

Individua, fra i seguenti numeri, quali numeri sono razionali e quali irrazionali.

575	2^0	$2,\overline{3}$	$\sqrt{2^{-2}}$	$\sqrt{2^{-3}}$
576	$\sqrt{\frac{9}{4}}$	$-\pi$	$\sqrt{7}$	$(-2)^{-3}$
577	$-\frac{2}{3}$	$1,2\overline{3}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{9^{11}:9^9}$
578	-1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}$	2π
579	3^0	7^{-2}	$\sqrt{64}$	$\sqrt{\frac{1}{7}}$
580	-5	5^{-1}	$\sqrt{5^0}$	$\sqrt{5}$
581	$(-2)^{-3}$	$\sqrt{2^{-2}}$	$\sqrt{2\cdot 2^3}$	$\sqrt{2^5:2^2}$

Esercitazione per la verifica

Libro di testo
Sasso-Fragni
Colori della matematica Edizione Bianca. Vol.1
Ed. Petrini.

Esercizi per la verifica (fate quello che potete):

Pag. 80	dal 261	al 265
Pag. 90	dal 405	al 407
Pag. 91	dal 408	al 415
Pag. 95	dal 485	al 489
Pag. 100	dal 575	al 580

BUON VIAGGIO!