Mathematica ML

Sistemi Lineari

Sistemi di equazioni di I grado

Argomenti

Sistema di equazioni lineari

- Metodo grafico
- Metodo si sostituzione

Requisiti

Equazioni di I^ grado

Introduzione ai sistemi lineari

Teoria - esercizi

Il Piano cartesiano

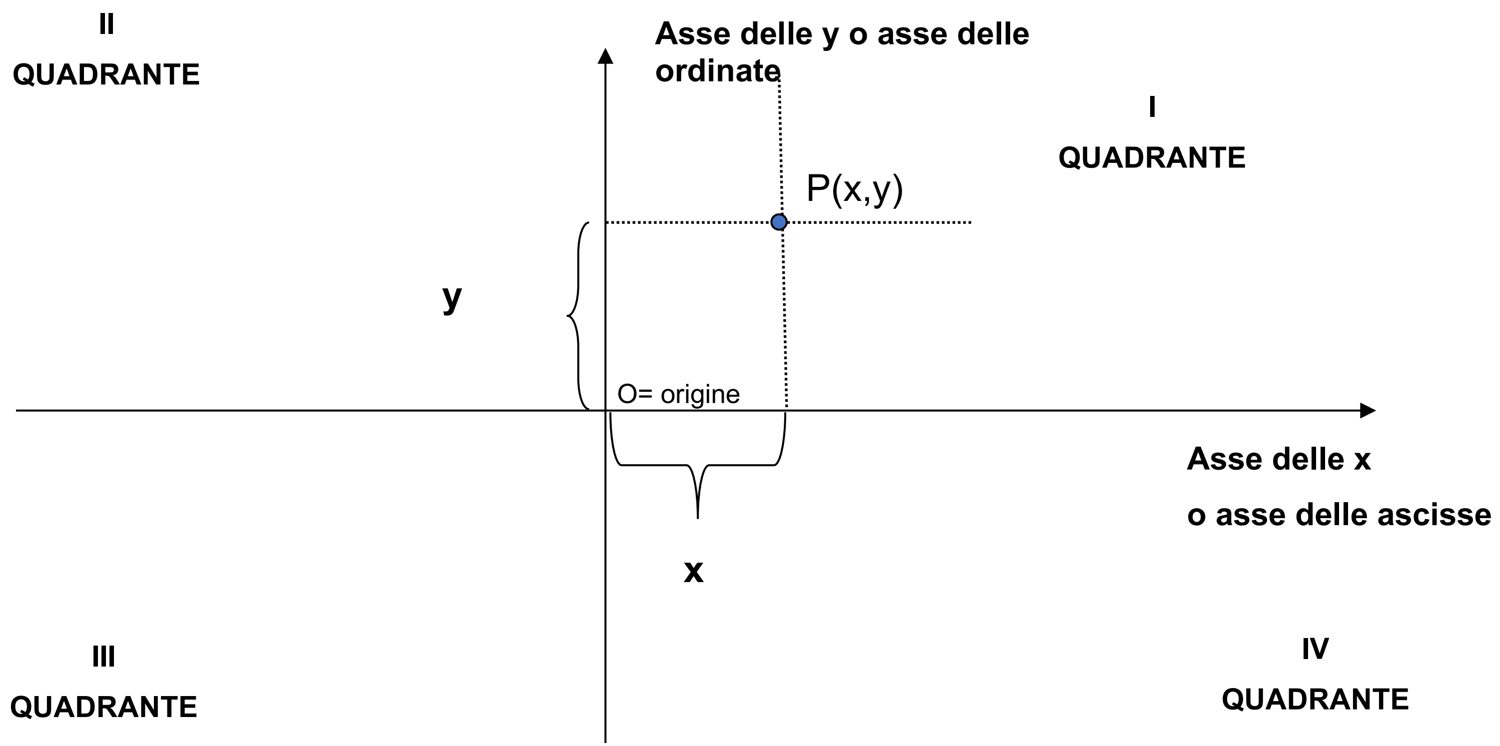
SUDDIVISO IN 4 QUADRANTI   NUMERATI IN SENSO ANTIORARIO

E' POSSIBILE DEFINIRE LA POSIZIONE DI UN PUNTO SUL PIANO CARTESIANO FORNENDO LE SUE COORDINATE P(x,y)

IL PRIMO NUMERO
RAPPRESENTA L'ASCISSA

P(x,y)

IL SECONDO NUMERO
RAPPRESENTA L'ORDINATA



Dall'Equazione al sistema

$$2x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1}{2}$$

Equazione di 1^ grado ad una sola incognita *x*

Equazione di 1^ grado a due incognite, **x** e **y**

$$y - 2x = 0$$

$$y = 2x$$

Variabile indipendente

Variabile dipendente

I valori da assegnare li decido io

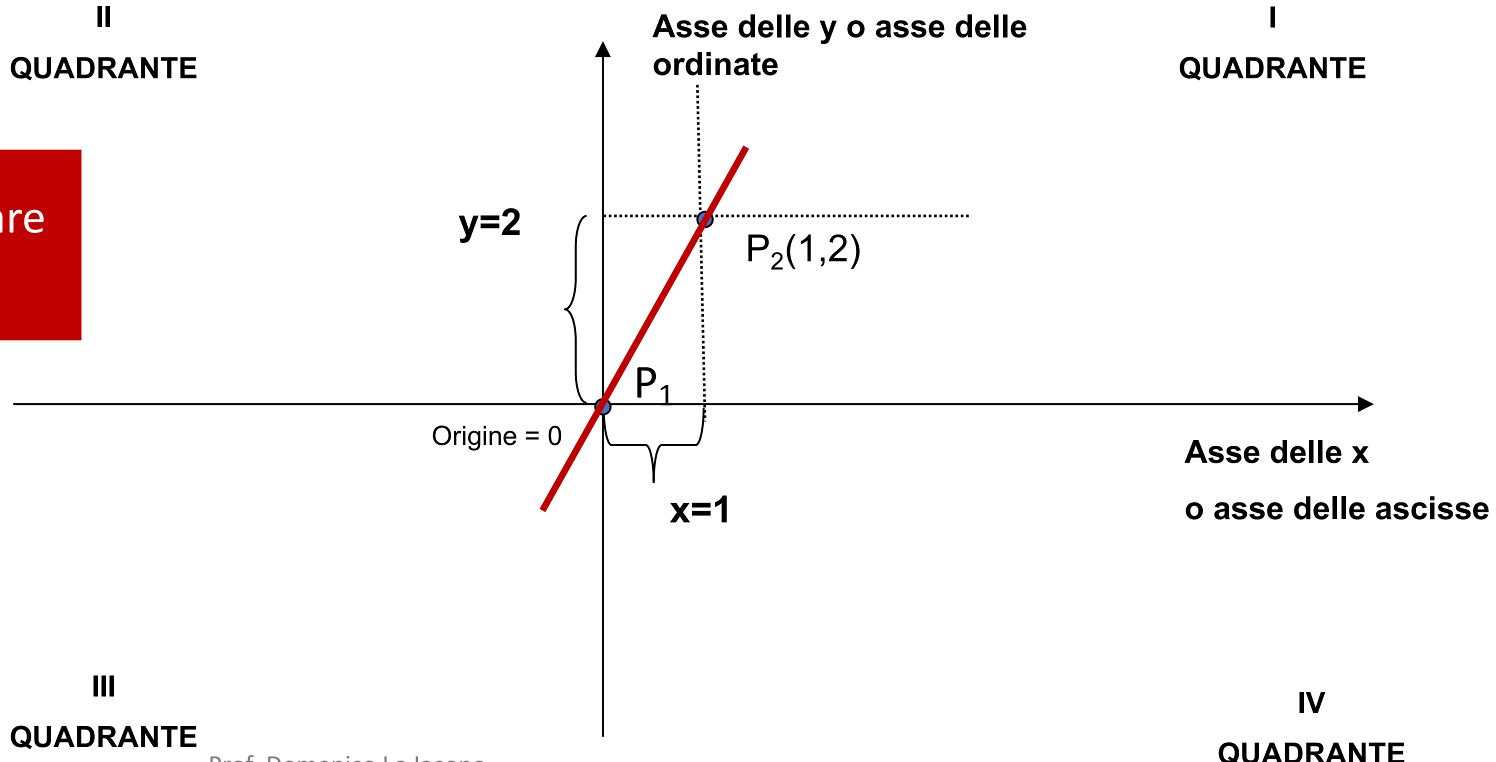
x	y	
0	0	P_1
1	2	P_2

$P_1(x,y)=P_1(0, 0)$

$P_2(x,y)=P_2(1, 2)$

IL PRIMO NUMERO RAPPRESENTA L'ASCISSA

IL SECONDO NUMERO RAPPRESENTA L'ORDINATA



Esercizi equazioni di primo grado a due incognite

Per ciascuna delle seguenti equazioni, stabilisci se la coppia ordinata indicata a fianco è una sua soluzione.

2 $x - 2y - 1 = 0$ $(1, 1)$

3 $3x - 2y + 1 = 0$ $(7, 11)$

4 $x - y + 4 = 0$ $(-6, -2)$

5 $x - 2y + 5 = 0$ $(-3, 1)$

6 $7x - 6y - 1 = 0$ $(1, 1)$

7 $x - 4y + 8 = 0$ $(-1, 2)$

TORNIAMO ALL'ESEMPIO DI PRIMA

TORNIAMO ALL’ESEMPIO DI PRIMA

Aggiungo un’altra retta nel grafico,

vediamo cosa succede.

Metodo Grafico

Dall'Equazione al sistema

Equazione di 1^ grado a due incognite, **x** e **y**

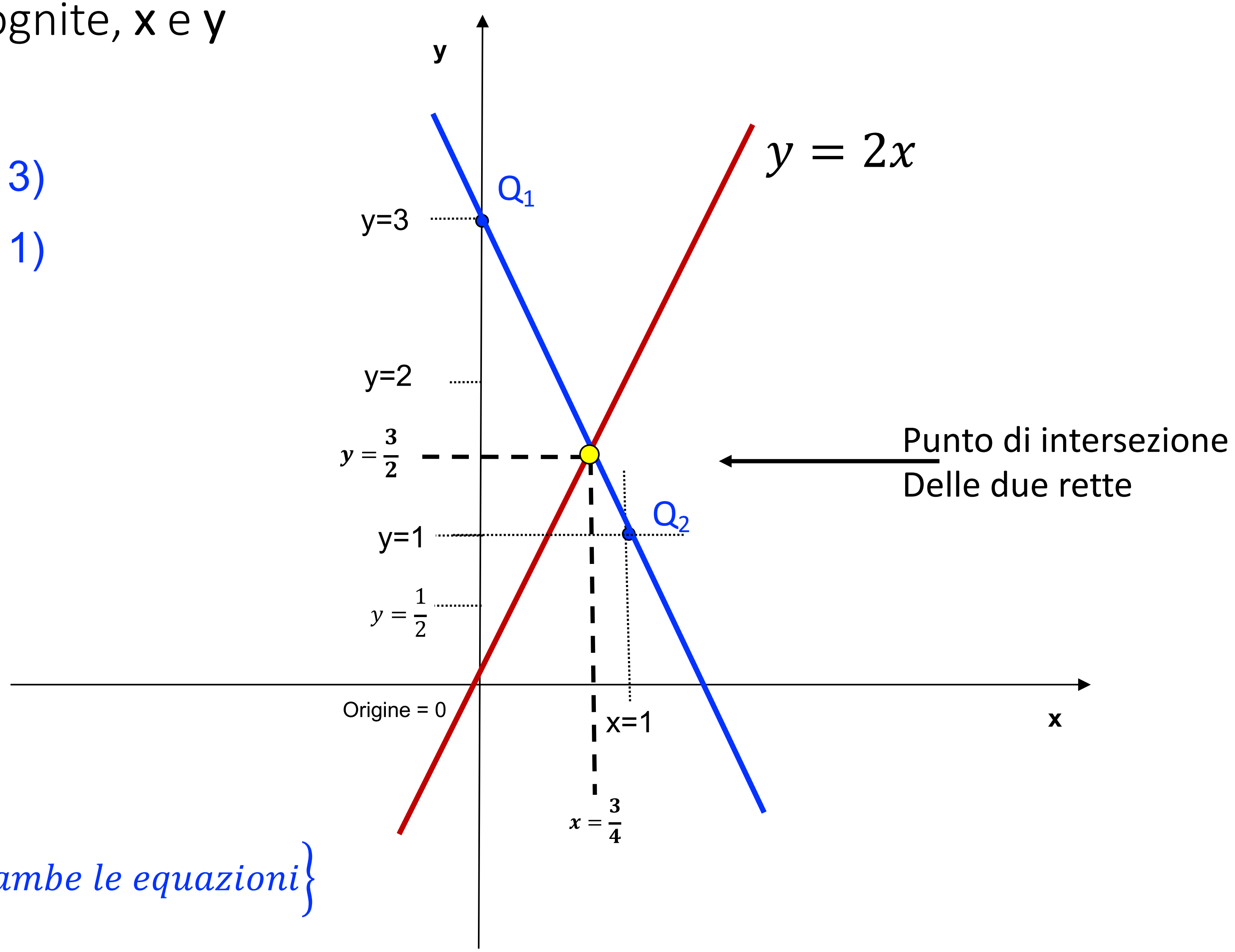
$$y = 2x$$

$$y = 3 - 2x$$

$Q_1(x,y) = Q_1(0, 3)$

$Q_2(x,y) = Q_2(1, 1)$

x	y	
0	3	Q_1
1	1	Q_2



$$S = \left\{\frac{3}{4}; \frac{1}{2} \ \textit{sono } \textbf{\textit{soluzioni}} \textit{ per entrambe le equazioni}\right\}$$

Dall'Equazione al sistema

Equazione di 1^ grado a due incognite, **x** e **y**

$y = 2x \longrightarrow -2x + y = 0$

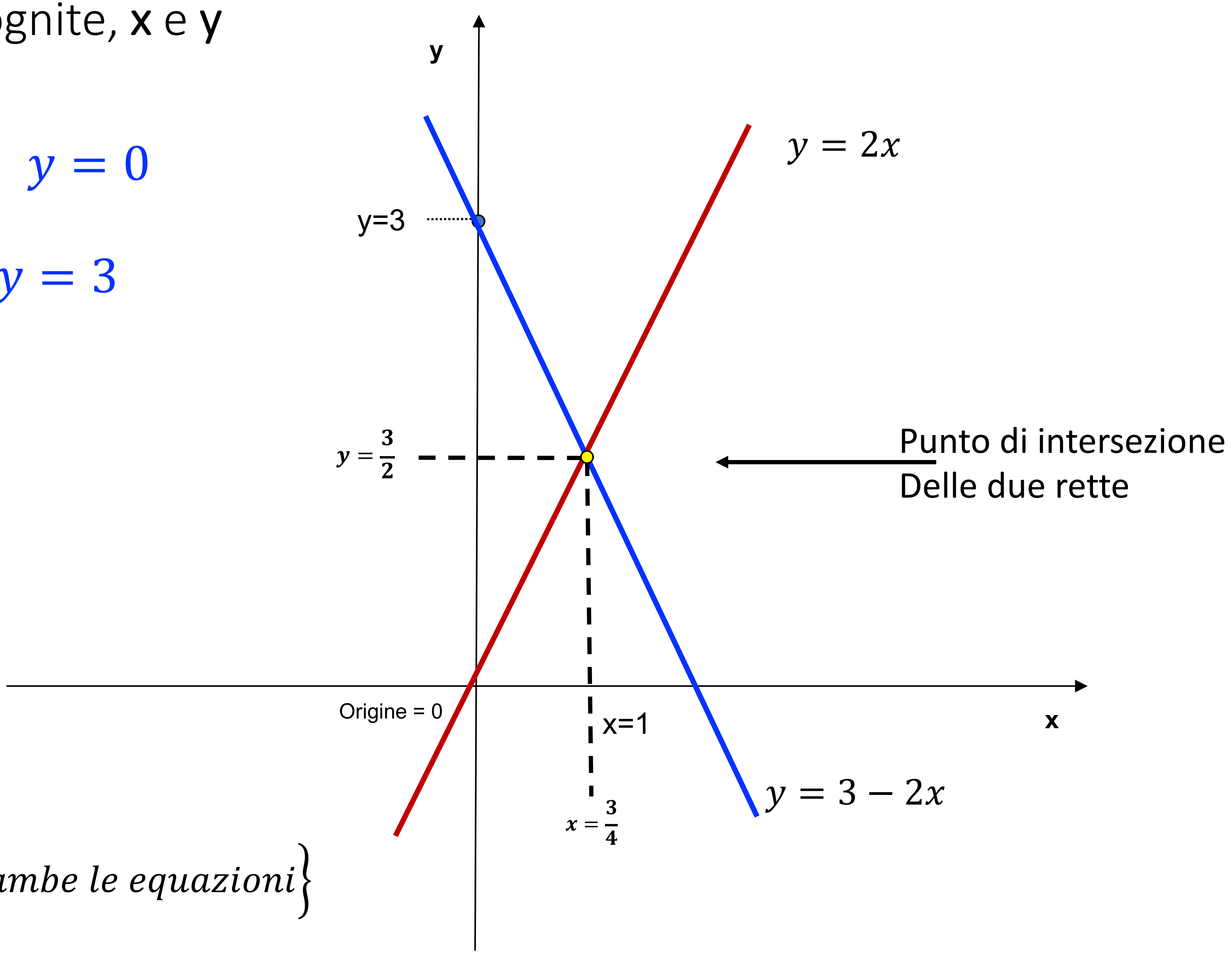
$y = 3 - 2x \longrightarrow 2x + y = 3$

Entrambi li posso scrivere in questa forma

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$S = \left\{ \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \text{ sono } \textbf{soluzioni} \text{ per entrambe le equazioni} \right\}$

GRAFICAMENTE



sistemi lineari

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Sistema lineare , ridotto a forma normale.

In Generale: $$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Prenderemo in considerazione sistemi di due equazioni in due incognite

Un sistema lineare ,ridotto a forma normale, si presenta così:

$$\begin{cases} a\underline{x} + b\underline{y} = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Attento:

- le incognite sono *x* e *y*
- le altre lettere che compaiono sono costanti

$$\begin{cases} -2x + y = 0 & 1) \\ 2x + y = 3 & 2) \end{cases}$$

Sistema di 1° grado poiché le sue equazioni sono entrambe di primo grado.

Ciascuna delle due equazioni nel piano cartesiano rappresenta una retta

Definizione:

Un sistema di equazioni è:

un insieme di due o più equazioni, tutte nelle stesse incognite, di cui cerchiamo soluzioni comuni.

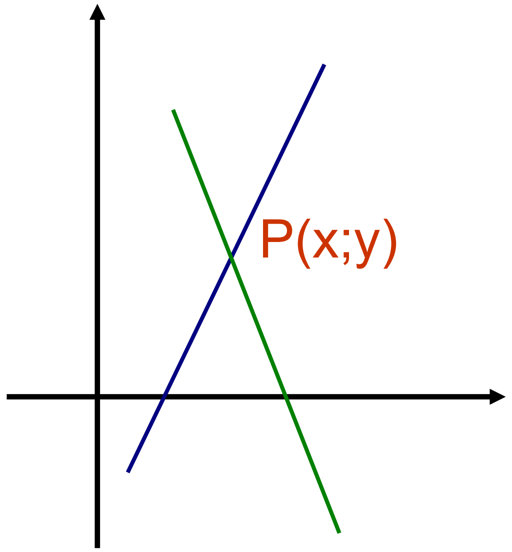
L'insieme delle soluzioni di un sistema è formato da:

i valori delle incognite che soddisfano tutte le equazioni che compongono il sistema.

Criterio del rapporto

Le soluzioni di un sistema
di due equazioni in due incognite
possono essere

Una soluzione si ha quando le rette che rappresentano le equazioni del sistema sono incidenti



1 punto in comune

Il sistema ha

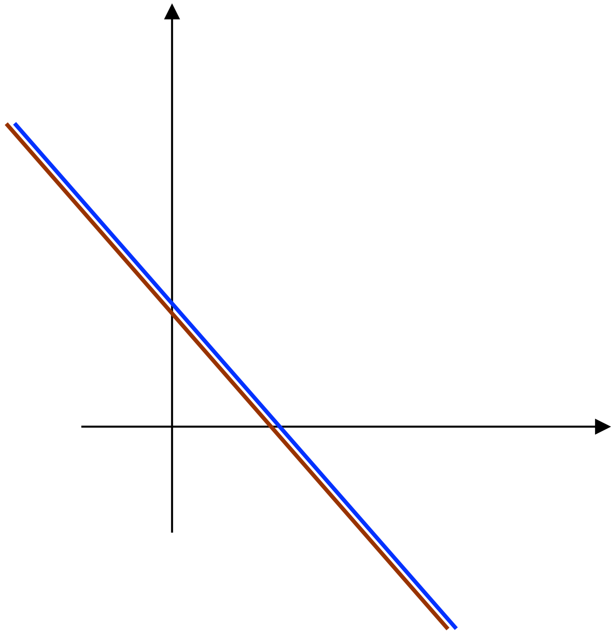
Una sola soluzione P(x ; y)

SISTEMA DETERMINATO

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

Sistema determinato

Infinite soluzioni se le rette sono parallele e coincidenti



Il sistema ha. **Infinite soluzioni;**

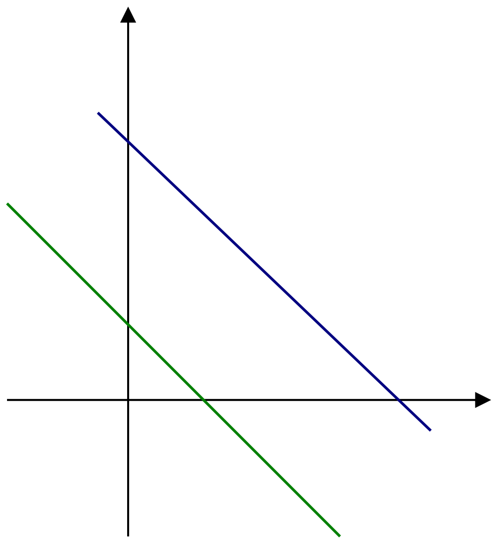
Il sistema è **INDETERMINATO**

Infiniti punti in comune

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$ **Sistema Indeterminato**

Nessuna soluzione se le rette che rappresentano le equazioni del sistema sono parallele e distinte



Nessun punto in comune

Il sistema **Non ha soluzione;**

Il sistema è **IMPOSSIBILE**

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

Sistema Impossibile

Quante soluzioni ha un sistema di questo tipo?

Un sistema può avere:

- Una soluzione $(x\,;\,y)$ e in tal caso si dice determinato;
- Infinite soluzioni e in tal caso si dice indeterminato
- Nessuna soluzione e in tal caso si dice impossibile;

Mathematica

Metodi algebrici
per risolvere un sistema lineare

METODO
Grafico

METODO DI
sostituzione

METODO DEL
confronto

METODO DI
riduzione
o di
eliminazione

METODO
Di
CRAMER

Per ciascuno dei seguenti sistemi, stabilisci se la coppia ordinata indicata a fianco è una soluzione.

9 $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ $(-2, -1)$ [No]

10 $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$ $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ [Sì]

11 $\begin{cases} 4x-y+5=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases}$ $(-1, 1)$ [Sì]

12 $\begin{cases} 5x-2y+7=0 \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$ $(1, 1)$ [No]

---

13 Sapendo che il sistema $\begin{cases} Ax-y=-1 \\ x+By=3 \end{cases}$ ammette come soluzione $(-1, 2)$, determina A e B. $[A=-1, B=2]$

14 Sapendo che il sistema $\begin{cases} Ax+y=-1 \\ x-By=3 \end{cases}$ ammette come soluzione $(-2, 1)$, determina A e B. $[A=1, B=-5]$

Esercitazione

Pag 180 vol 2

Determina l'eventuale soluzione dei seguenti sistemi, interpretandoli graficamente.

20 $\begin{cases} y = 2x \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ [Impossibile; $(-1, 1)$]

21 $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ [$(2, 3)$; impossibile]

22 $\begin{cases} y = -2x + 6 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2x \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$ [$(5, -4)$; impossibile]

23 $\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ [$(-1, -2)$; $(-2, 3)$]

Mathematica ML

Esercizio 20a svolto.

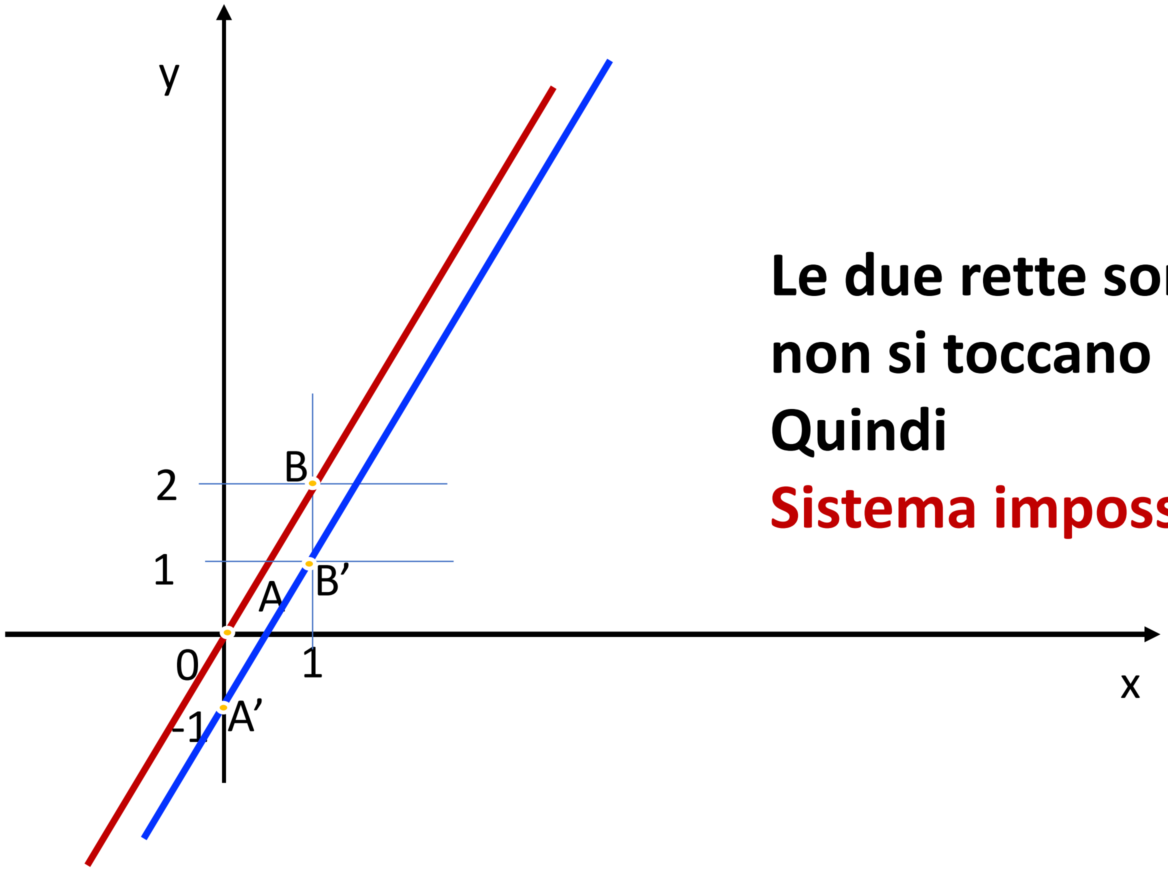
$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -y = 1 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$y = 2x$

x	y	
0	0	A
1	2	B

$y = 2x$-1

x	y	
0	-1	A’
1	1	B’



Le due rette sono parallele,
non si toccano mai,
Quindi
Sistema impossibile

Esercizio 20b svolto.

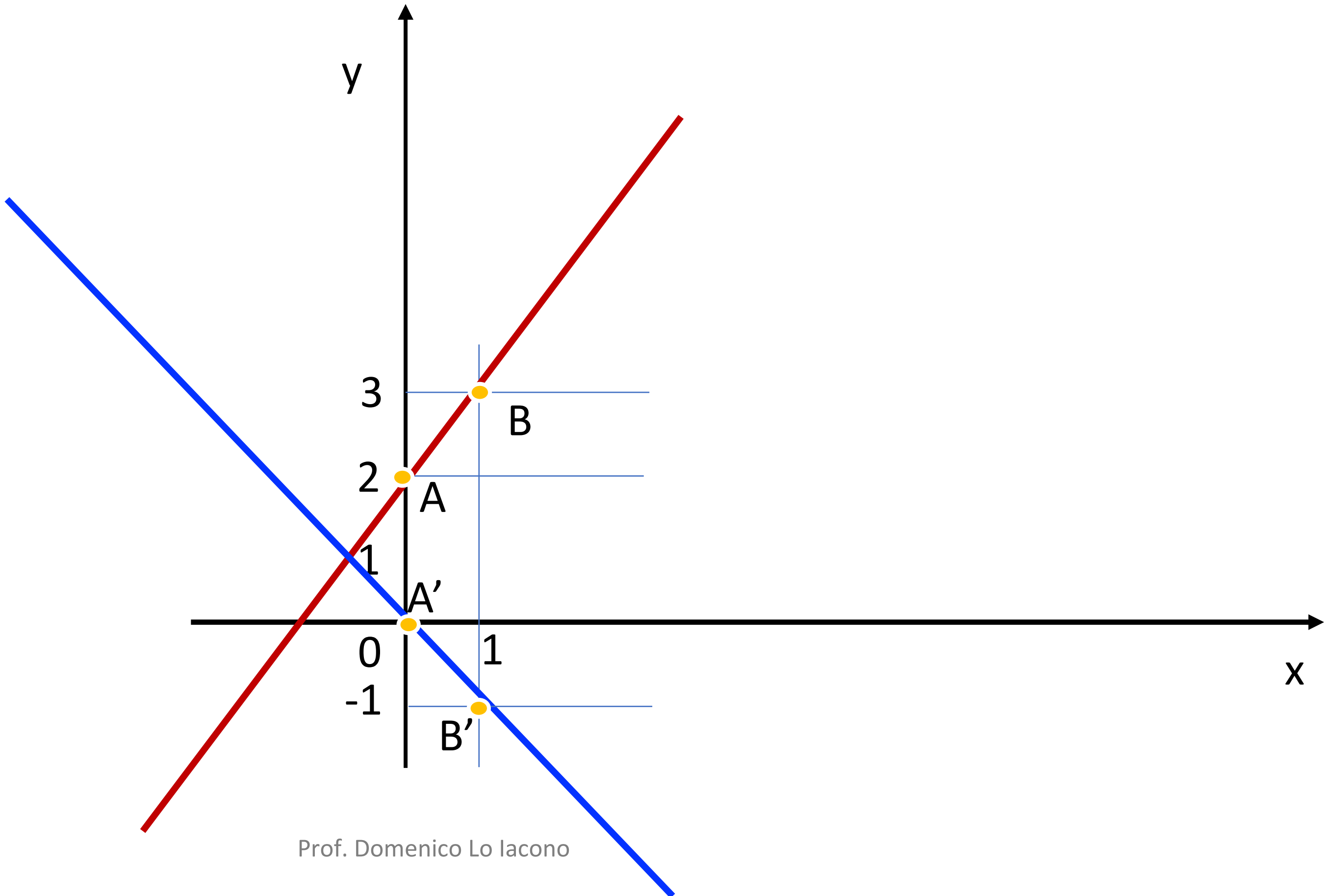
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$y = x + 2$$

x	y	
0	2	A
1	3	B

$$y = -x$$

x	y	
0	0	A’
1	-1	B’



Le due rette si intersecano nel punto
x=-1 e y=1

Il sistema è determinato

Mathematica ML

Metodo Analitico

di Sostituzione

Metodo di Sostituzione

$$\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ y - 3x + 2 = 0 \end{cases} \qquad \cancel{x = \frac{4y-1}{2}} \qquad y = 3x - 2$$

Sostituisco nell'equazione precedente al posto della *y*

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - 4\,(3x - 2) = 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 12x + 8 = 1 \\ V \end{cases}$$

È otteniamo una equazione con una sola incognita, la *x*

$$\begin{cases} -10x = 1 - 8 \\ V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -10x = -7 \\ V \end{cases} \qquad \frac{-10x}{-10} = \frac{-7}{-10} \qquad x = \frac{-7}{-10}$$

Applico il 2^ principio di equivalenza

Sostituisco il valore della *x* nell'equazione successiva e otteniamo il valore della *y*

$$y = 3\left(\frac{7}{10}\right) - 2 = \frac{21}{10} - 2 = \frac{21-20}{10} = \frac{1}{10}$$

Soluzioni del sistema

$$x = \frac{7}{10}\,; \qquad y = \frac{1}{10}$$

Mathematica ML

Metodo di Sostituzione

Sostituisco nell'equazione precedente al posto della *y*

È otteniamo una equazione con una sola incognita, la *x*

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad x = 2y - 1 \qquad y = 1 - x$$

$$\begin{cases} x = 2(1 - x) - 1 \\ y = 1 - x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2x - 1 \\ V \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 1 \\ V \end{cases} \rightarrow$$

Applico il 2^ principio di equivalenza

$$\frac{3x}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Sostituisco il valore della *x* nell'equazione successiva e otteniamo il valore della *y*

$$y = 1 - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

Soluzioni del sistema

$$x = \frac{1}{3}. ; \qquad y = \frac{2}{3}$$

Metodo di sostituzione - Esercitazione

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x + 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ \underbrace{x + 3(2x - 1) - 4 = 0}_{\text{equazione risolvente}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = \ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(\ldots) - 1 \\ x = \ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow$$

equazione risolvente

risolvendo l'equazione risolvente

sostituendo il valore trovato per x nella prima equazione

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \ldots\ldots \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la soluzione del sistema è la coppia ordinata $(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - \ldots\ldots \\ \underbrace{3(2y - \ldots\ldots) - 4y = 2}_{\text{equazione risolvente}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - \ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2(\ldots) - \ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

equazione risolvente

risolvendo l'equazione risolvente

sostituendo il valore trovato per y nella prima equazione

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \ldots\ldots \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la soluzione del sistema è la coppia ordinata $(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$

Metodo di sostituzione - Esercitazione

33 $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right]$

34 $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{4}\right)\right]$

35 $\begin{cases} 5x - 2y = -10 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ $[(-4, -5)]$

36 $\begin{cases} x = 5 - 2y \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ $[(1, 2)]$

37 $\begin{cases} y = -x + 1 \\ x = -2y - 1 \end{cases}$ $[(3, -2)]$

38 $\begin{cases} x + 2(y - 1) = 6 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)\right]$

Dall’Equazione al sistema

Mathematica

Dall'Equazione al sistema

Dall’Equazione al sistema