Le equazioni di primo grado

PART 1

Prof. Domenico Lo Iacono

Indice

Mathematica ML

- Pensa un numero,
- aggiungi 7
- moltiplica il risultato per 3.

- Che numero hai ottenuto?”

“Ho ottenuto ______”
“Allora il numero che hai pensato è ______

Il gioco che proposto si risolve mediante un’**equazione**: ________________

1. IDENTITA’

DEFINIZIONE -

Si definisce identità un’uguaglianza che è sempre verificata, qualunque sia il valore che viene attribuito all’incognita x.

Esempio: $5x - 1 = 3x + 2x - 1$

Domanda: qual è il valore dell’incognita x che rende il primo membro uguale al secondo?

Verifichiamo:

$x = 1 \longrightarrow 5 \cdot 1 - 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \longrightarrow$ **4 = 4 uguaglianza verificata**

$x = 2 \longrightarrow 5 \cdot 2 - 1 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 1 \longrightarrow$ **9 = 9 uguaglianza verificata**

Conclusione: l’uguaglianza sarà sempre verificata, per cui l’espressione si chiama *identità*.

2. DEFINIZIONE DI EQUAZIONE

Coefficiente — Incognita — Termine noto

$$10\,x = 20$$

1° membro — 2° membro

Domanda: qual è quel numero x che moltiplicato per 10 dà 20 ?

Risposta: **2**

Perché: $10 \cdot 2 = 20$

DEFINIZIONE -

Un'equazione è una uguaglianza tra due membri che è verificata quando l'incognita x assume solo un particolare valore.

2. DEFINIZIONE DI EQUAZIONE

In generale

Coefficiente

Incognita

Termine noto

$$a\,x = b$$

1° membro

2° membro

$$a, b, x \in \Re$$

Esempio

Applicando il concetto di equazione, verificare se i numeri a fianco indicati sono soluzioni delle equazioni:

Esempio N.1

$3x - 2 = x$ $\quad x = 1;\ x = 0$ → **Sostituiamo i valori $x = 1$ e $x = 0$ nell'equazione:**

$3 \cdot 1 - 2 = 1$ → **$1 = 1$ l'equazione è soddisfatta per cui $x = 1$ è la soluzione**

$3 \cdot 0 - 2 = 0$ → **$2 = 0$ l'equazione non è soddisfatta per cui $x = 0$ non è la soluzione**

Esempio

Applicando il concetto di equazione, verificare se i numeri a fianco indicati sono soluzioni delle equazioni:

Esempio N.2

$x - 7x = -10 \qquad x = 1;\ x = 2$ → **Sostituiamo i valori $x = 1$ e $x = 2$ nell'equazione:**

$1 - 7 \cdot 1 = -10$ → **$-6 = -10$ l'equazione non soddisfatta, per cui $x = 1$ non è la soluzione**

$2 - 7 \cdot 2 = -10$ → **$-12 = -10$ l'equazione soddisfatta, per cui $x = 2$ è la soluzione**

3. Dominio e soluzioni di un'equazione

Il dominio o insieme di definizione di un'equazione.
È l'insieme numerico dove si cercano le soluzioni di un'equazione.

Salvo avviso contrario, risolveremo le equazioni assumendo come dominio **l'insieme R dei numeri reali.**

Se l'insieme delle soluzioni di una equazione è		**L'equazione si dice**	**Esempio**
Finito	→	Determinata	$8 \cdot x = 32$
Infinito	→	Indeterminata	$0 \cdot x = 0$
Vuoto	→	Impossibile	$x^2 = -1$

Dominio o insieme di definizione di un'equazione.

$$a\,x \quad = \quad b \qquad\qquad a, b, x \in \Re$$

$ax = b$

Equazione **Determinata**

Una soluzione

$0x = 0$

Equazione **Indeterminata**

Infinite soluzioni

$0x = b$

Equazione **Impossibile**

(nessun soluzione)

Equazioni determinate, indeterminate, impossibili, identità

18 Completa la seguente tabella.

Equazione	Dominio	Classificazione			
$x+2=0$	$\mathbb{N}$	☐ Determinata	☐ Indeterminata	☒ Impossibile	☐ Identità
$x^2=-2$	$\mathbb{Q}$	☐ Determinata	☐ Indeterminata	☒ Impossibile	☐ Identità
$x+2=0$	$\mathbb{Z}$	☒ Determinata	☐ Indeterminata	☐ Impossibile	☐ Identità
$4x-8=0$	$\mathbb{N}$	☒ Determinata	☐ Indeterminata	☐ Impossibile	☐ Identità
$(2x)^2=4x^2$	$\mathbb{R}$	☐ Determinata	☐ Indeterminata	☐ Impossibile	☒ Identità

Stabilisci se le seguenti equazioni sono identità.

26 $(x+1)^2 - x(x+1) = x(x+1) - 1 - x^2$ [No]

27 $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$ [Sì]

28 $(x+1)^2 + (x+1)(x-1) = 2x(x+2)$ [No]

29 $x(x+3) + (x-1)^2 = 2x^2 + 2x$ [No]

30 $(x+1)(2-x) + (x-2)^2 = 6 - 3x$ [Sì]

31 $(2x-1)^2 - (2x+1)^2 = -8x$ [Sì]

32 $x(x+1) + (x-2)(x+3) = 2(x-3)^2$ [No]

Mathematica ML

4. CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI

Equazioni algebriche:

equazioni nelle quali compaiono le quattro operazioni elementari e le potenze.

Irrazionale: **Se le incognite compaiono sotto il segno di radice**

Razionale: **Se le incognite non compaioni sotto il segno di radice.**

Numeriche: **Se compaiono numeri e incognita.**

Letterarie: **Se compaiono numeri lettere e incognita.**

Intera: **Se le incognite.non compaiono mai a denominatore, l’equazione si dice**

4. CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI

Intera: **Se le incognite non compaiono mai a denominatore,**

$$5x - 3 + 4x = -3x + 1 + 5x$$

$$\frac{3}{2}x - 1 + \frac{4}{5} = 3x - \frac{2}{3}x + 3$$

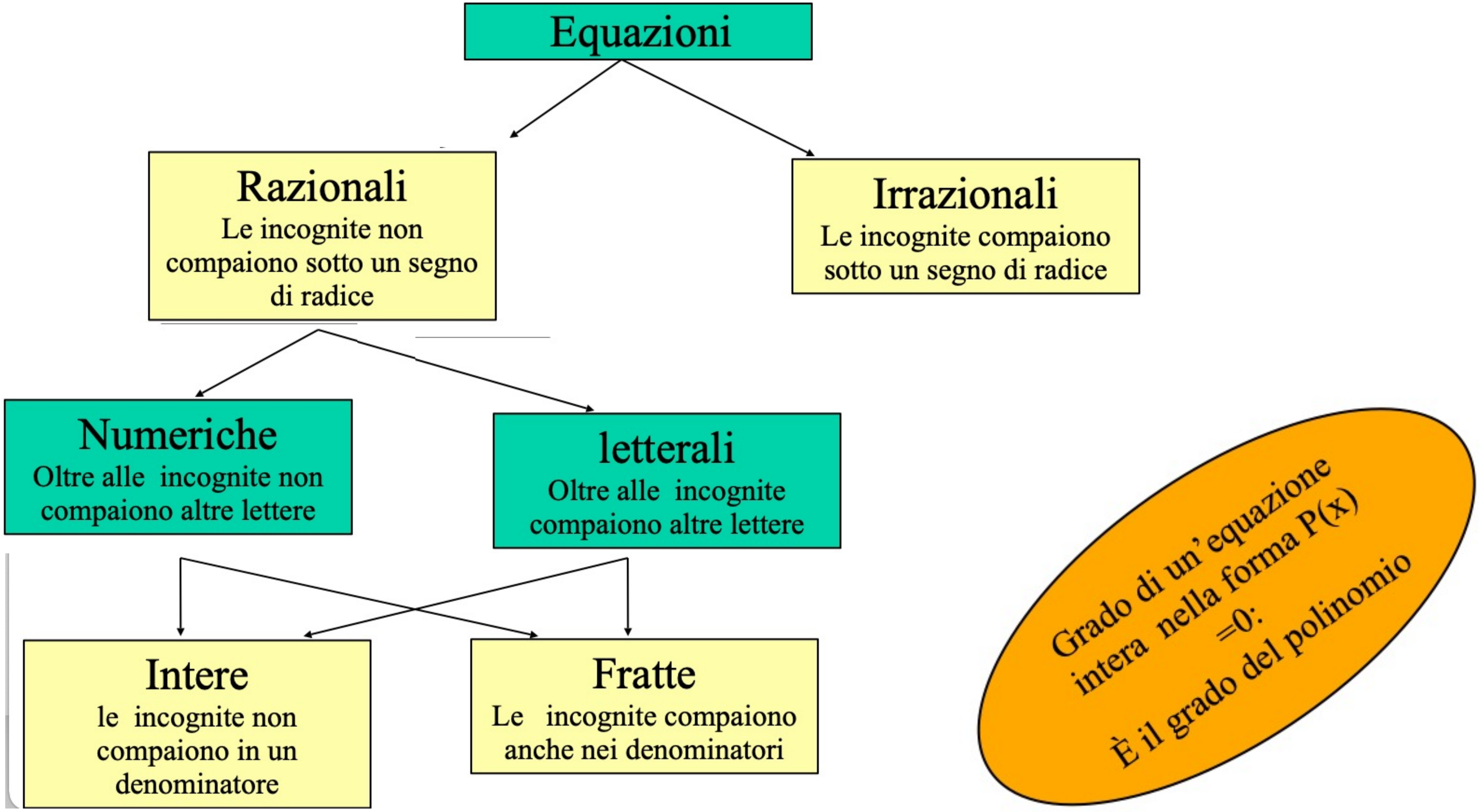
Fratta o frazionaria: **Se l'incognita compare al denominatore**

Esempio

$$\frac{x-3}{5x+1} - \frac{3}{2} + 2x = \frac{2x-3}{10x+2} + 2$$

14

4. CLASSIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI



5. EQUAZIONI EQUIVALENTI

Date le seguenti due equazioni:

$3x + 1 = x + 5$ $\qquad\qquad$ $6x + 2 = 2x + 10$

Entrambi le equazioni hanno soluzione $x = 2$

Verifichiamo:

1ª equazione $\longrightarrow$ $3 \cdot 2 + 1 = 2 + 5$ $\longrightarrow$ $7 = 7$
uguaglianza verificata

2ª equazione $\longrightarrow$ $6 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot 2 + 10$ $\longrightarrow$ $14 = 14$
uguaglianza verificata

LE equazioni che ammettono la stessa soluzione si dicono **equivalenti.**

Esempio 1

La seguente equazione $2x + 1 = -4x + 4$ **ammette come soluzione** $x = \frac{1}{2}$, **Infatti:**

$$2x + 1 = -4x + 4 \longrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = -4\left(\frac{1}{2}\right) + 4 \longrightarrow 1 + 1 = -2 + 4$$

$$\longrightarrow 2 = 2$$

La seguente equazione $4x - 3 = 2x - 2$ **ammette come soluzione** $x = \frac{1}{2}$, **Infatti:**

$$4x - 3 = 2x - 2 \longrightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \longrightarrow 2 - 3 = 1 - 2$$

$$\longrightarrow -1 = -1$$

L'equazione è equivalente a quella data in quanto ammette la stessa soluzione.

Esempio 2

La seguente equazione $2x + 1 = -4x + 4$ ammette come soluzione $x = \frac{1}{2}$, Infatti:

$$2x + 1 = -4x + 4 \longrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = -4\left(\frac{1}{2}\right) + 4 \longrightarrow 2 = 2$$

Consideriamo la seguente equazione $\frac{1}{4}x - 5 = x + 3$ ammette come soluzione $x = \frac{1}{2}$?

$$\frac{1}{4}x - 5 = x + 3 \longrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) - 5 = \frac{1}{2} + 3 \longrightarrow \frac{1}{8} - 5 = \frac{1}{2} + 3 \longrightarrow \frac{1 - 40}{8} = \frac{1 + 6}{2}$$

$$\longrightarrow \frac{-39}{8} = \frac{7}{2}$$

L'equazione non è equivalente a quella data in quanto non ammette la stessa soluzione.

6. PROCEDURA RISOLUTIVA DI UN’EQUAZIONE DI 1° GRADO

a. Principi di equivalenza e conseguenze

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA: -
Addizionando o sottraendo una stessa quantità ad entrambi i membri di un’equazione, si ottiene un’equazione equivalente a quella data (ossia l’equazione non cambia).

ESEMPIO: $4x - 27 = -6x + 3$ Ammette come soluzione $x = 3$

addizionando ad entrambi i membri la quantità 10.

$4x - 27 + 10 = -6x + 3 + 10$

le due equazioni sono equivalenti,
ammettono la stessa soluzione $x = 3$.

Lo stesso discorso vale se sottraiamo una stessa quantità

Mathematica ML

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA –

Moltiplicando o dividendo per una stessa quantità entrambi i membri di un’equazione, si ottiene un’equazione equivalente a quella data (ossia l’equazione non cambia).

Esempio: $2x - 5 = - 4x + 7$ ammette come soluzione $x = 2$

moltiplicando entrambi i membri per la quantità 5. Si ottiene :

$5 \cdot (2x - 5) = 5 \cdot (- 4x + 7)$

le due equazioni sono equivalenti, ammettono la stessa soluzione $x = 2$.

Lo stesso discorso vale se dividiamo per una stessa quantità

ESEMPIO 1 CONSEGUENZA DEL PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Risolviamo l'equazione algebrica intera: $7x - 6 + 2x + 5 = 2x - 15 + 5x$

$7x - 6 + 2x + 5 = 2x - 15 + 5x$

$7x + 2x - 2x - 5x = 6 - 5 - 15$

1. Portiamo i termini contenente l'incognita al primo membro
2. i termini noti al secondo membro.

Nel passaggio da un membro all'altro si cambia segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza), mentre per i termini che rimangono al loro posto i segni rimangono invariati:

$2x = -14$

3. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili:

ESEMPIO 1 $\quad 2x = -4$

3. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza)

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = -\frac{14}{2} \longrightarrow x = -7$$

VERIFICA

Per verificare se la soluzione trovata è esatta, bisogna sostituirla al posto della x nell'equazione di partenza ed ottenere l'uguaglianza tra primo e secondo membro:

$$\mathbf{7x \quad - 6 + 2x \quad + 5 = 2x \quad - 15 + \quad 5x}$$

$$7 \cdot (-7) - 6 + 2 \cdot (-7) + 5 = 2 \cdot (-7) - 15 + 5 \cdot (-7) \longrightarrow -49 - 6 - 14 + 5 = -14 - 15 - 35$$

$$-64 = -64$$

uguaglianza verificata

7. SOLUZIONI DETERMINATE, INDETERMINATE, IMPOSSIBILI

$$ax = b$$

Data un' equazione in forma normale $\boxed{a\,x = b}$

- se $a \neq 0$ l' equazione è **determinata** : ha un' unica soluzione $x = \dfrac{b}{a}$
- se $a = 0$ allora
  - se $b = 0$ l' equazione è **indeterminata**: ha infinite soluzioni (qualsiasi $x \in R$)
  - se $b \neq 0$ l' equazione è **impossibile**: non ha nessuna soluzione

6. Soluzioni di una equazione

$8 + x = 12$ $\qquad$ $x = ?$

Determinata	**Soluzioni numeriche**	$8 \cdot x = 32$	$x = 4$	**Determ.** $8 \cdot 4 = 32$
Indeterminata	**Identità**	$0 \cdot x = 0$	*sempre*	**Indeter.**
Impossibile	**Nessuna soluzione**	$0 \cdot x = 12$	*mai*	**Imposs.**

Insieme delle soluzioni di una equazione può essere

L'equazione si dice

Finito $\mathbf{8 \cdot x = 32}$ → Determinata

Infinito $\mathbf{0 \cdot x = 0}$ → Indeterminata

Vuoto $\mathbf{x^2 = -1}$ → Impossibile

ESEMPIO N. 1

Per risolvere la seguente la seguente equazione algebrica:

$$(5x+1)^2 - 5(2x+3) = (5x-2)(5x+2) - 2x$$

si deve procedere come segue.

1. Si applicano le regole del calcolo algebrico per eliminare le parentesi e sviluppare i prodotti notevoli:

$$25x^2 + 1 + 10x - 10x - 15 = 25x^2 - 4 - 2x$$

2. Si portano i termini contenente l'incognita al primo membro e i termini noti al secondo membro, cambiandoli di segno (conseguenza del 1° principio di equivalenza):

$$25x^2 + 10x - 10x - 25x^2 + 2x = -1 + 15 - 4$$

$$\cancel{25x^2 + 10x - 10x - 25x^2} + 2x = -1 + 15 - 4$$

3. Si riducono, secondo le regole del calcolo algebrico, i termini simili: $2x = 10$

4. Si dividono entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente dell'incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{10}{2} = 5 \longrightarrow x = 5$$

Mathematica ML

ESEMPIO N. 1 Per risolvere la seguente la seguente equazione algebrica:

$$(5x+1)^2 - 5(2x+3) = (5x-2)(5x+2) - 2x$$

$25x^2 + 1 + 10x - 10x - 15 = 25x^2 - 4 - 2x$

$25x^2 + 10x - 10x - 25x^2 + 2x = -1 + 15 - 4$

$\cancel{25x^2} + \cancel{10x} - \cancel{10x} - \cancel{25x^2} + 2x = -1 + 15 - 4$

$2x = 10$

$$\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{2}} = 5 \longrightarrow x = 5$$

ESEMPIO N. 2

Equazione algebrica intera: $\frac{3}{2}x - 3 + \frac{5}{4}x = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}x + 4$

1. Troviamo il mcm tra i denominatori :

$$\frac{12x - 24 + 10x}{8} = \frac{3 - 2x + 32}{8}$$

2. Eliminamo il mcm moltiplicando entrambi i membri per il mcm (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\cancel{8} \cdot \frac{12x - 24 + 10x}{\cancel{8}} = \frac{3 - 2x + 32}{\cancel{8}} \cdot \cancel{8}$$

3. Termini incognita al primo membro e termini noti al secondo membro

ATTENTI AL SEGNO

(conseguenza del 1° principio di equivalenza):

$$12x + 10x + 2x = 24 + 3 + 32$$

ESEMPIO N. 2

4. Riduciamo in termini simili:

$$24x = 59$$

5. Dividiamo i membri dell’equazione per il coefficiente dell’incognita (conseguenza del 2° principio di equivalenza):

$$\frac{\cancel{24}x}{\cancel{24}} = \frac{59}{24} \longrightarrow x = \frac{59}{24}$$

Se l’uguaglianza non è verificata,
c’è un errore o nella risoluzione dell’equazione, o nella verifica.

8. Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni.

78 $2x-3=5x-2$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

79 $3x-2=-x$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

80 $5x-7x=8x-1$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

81 $9-2x=3x-1$ $[2]$

82 $-2(x-1)=3(x+1)$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

83 $5x-1=-(1-2x)$ $[0]$

84 $4(3-x)=x$ $\left[\frac{12}{5}\right]$

85 $3x-(x-1)=7$ $[3]$

86 $1-x=2x-3$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

87 $5x+8=-2x-6$ $[-2]$

88 $2(x-1)+3(2-x)=x-4$ $[4]$

89 $-2(x-1)-(2x-3)=5-x$ $[0]$

90 $-2(x-1)+3(4-x)=2(x-3)-5(2x+1)$ $\left[-\frac{25}{3}\right]$

91 $2-3[x-2(x+1)]=x-[2-(x-3)]$ $[-13]$

92 $x-2(x+1)-3(2-x)=5[x-(3x+1)]$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

93 $x-2-2(x+3)=3-2[3(x-2)-2(x-1)]$ $[19]$

94 $-2[2(x-3)-x]+3[-2(1-x)-4x]=8x$ $\left[\frac{3}{8}\right]$

95 $x^2+(x-1)(x+2)=2(x-1)(x+1)$ $[0]$

96 $2-x[3x-2(x-2)]=1-(x+1)(x-2)$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

97 $2(2x-1)(x+2)-(2x-1)^2=x+2$ $\left[\frac{7}{9}\right]$

98 $x-\{x-2[3x-(x-1)]\}=-(x-3)$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

99 $x(x-2)(x+2)-2x(x-1)^2=x^2(4-x)+6$ $[-1]$

100 $2(x-1)-x[(2x-1)-(3x+1)]=(x-2)^2$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

101 $(x-1)^2-2(x+1)(x-1)=(x+2)^2-2x(x-3)$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

102 $(x-1)(x+2)-x(x+3)=(x-2)(x+2)-(x-1)^2$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

103 $(2x-1)(2x+1)=(2x-1)^2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

104 $x(x-2)=(x+3)^2$ $\left[-\frac{9}{8}\right]$

VERIFICA N. 3 (ripasso)

Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti numerici interi.

1. $-3x + 3(2 - x) + 4(x + 1) = 5(1 - 2x) + 2 - x.$

2. $2[(x - 12) - (16 - x)] = 3[(5x - 4) - 4(3 + x)].$

3. $3(x - 1) - 2(3 - x) = 4(x + 2) + x - 17.$

4. $6x - \{2x - 4x + 2(x + 8) + 2 - 7\} = 2(x + 4) + 5.$

5. $1 + 2x - [x - 1 - (2x + 1) - 3] = x + 2.$

6. $6 - (1 + 2x) - 1 - 2[3(x - 5) - 5x + 4(2x + 2) - 1] = 5x - 2.$

7. $2x - 5(3x + 1) = 4 - 7x - 2(3x - 4).$

8. $(3x - 1)^2 - 3x(x - 3) = 2x(3x - 2) + 5x.$

9. $(x - 2)^3 - 3x(2 - x) = (x - 1)^3 + 2.$

10. $5x - (1 - x)(1 + x) = -5 + (x + 2)^2.$

11. $(2x + 1)(x - 1) - 3x(1 - x) = 5x^2 - (5x - 2).$

12. $1 + (x - 1)^2 + 2x - 2 = 1 + (x + 1)(x + 2);$ $\quad 3 + (x - 2)^2 - (x + 1)^2 = 0.$

13. $-1 + 5(x + 1) - (1 + x)(1 - x) - (5 + 2x) = (x + 3)^2 - 11.$

14. $3 + (2 - 3x)^2 - (3x + 1)(3x - 1) + 1 = 3(x - 1) - 15x.$

15. $2[5(x + 1) - 2(1 + x)^2 - 2x(5 - x) + 1] = 26.$

16. $4(2x - 7)(3x + 14) = 2(3x - 11)(4x + 21).$

17. $3(1 - y)(5 - 9y) = 2(15y^2 + 22y + 7) - (3y^2 + 51y - 71).$

Equazioni con coefficienti frazionari

Risolviamo l'equazione $$\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{4}=\frac{x+2}{3}$$

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{4}=\frac{x+2}{3}$$

Troviamo il mcm fra i denominatori *mcm (2, 4, 3)=12*

$$\frac{6(x-1)-3(x+3)}{12}=\frac{4(x+2)}{12}$$

Moltiplico ambo i membri per 12

$$12\,\frac{6(x-1)-3(x+3)}{12}=\frac{4(x+2)}{12}\,12$$

Semplifico

$$6(x-1)-3(x+3)=4(x+2)$$

Per la proprietà distributiva

$$6x-6-3x-9=4x+8$$

Termini con incognita al 1^ membro e termini noti al 2^

$$6x-6-3x-9=4x+8$$

Risolviamo l'equazione $$\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{4}=\frac{x+2}{3}$$

$6x-6-3x-9=4x+8$

Termini con incognita al 1^ membro e termini noti al 2^

$6x-3x-4x=+8+6+9$

Riduco i termini simili

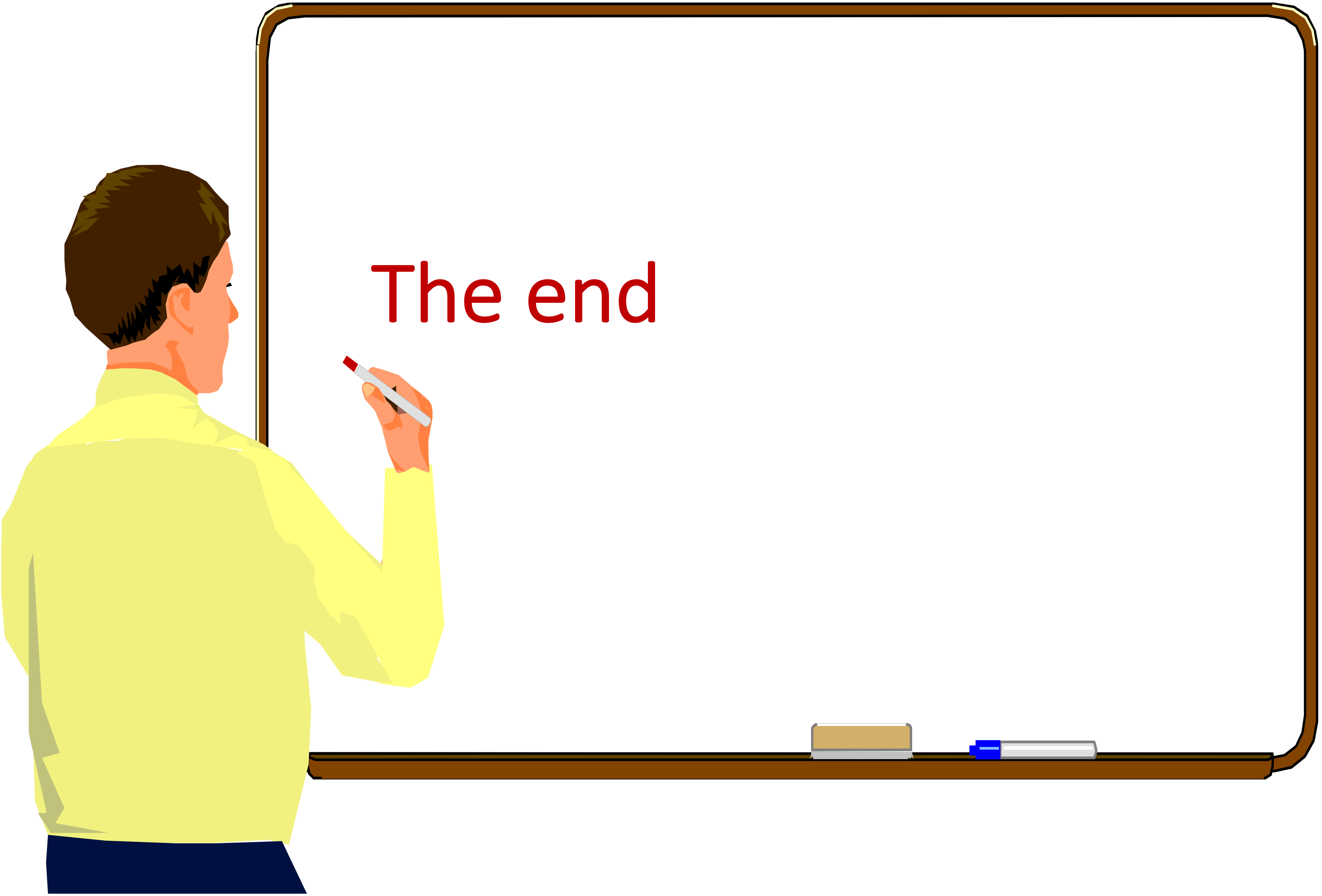
$-x=+23$

$x=-23$

La soluzione dell'equazione è: $S=\{-23\}$

Libro di testo, volume 1

Pag 329, n° dal 129 al 152


The end